

PRIMENA ODREĐENOG INTEGRALA

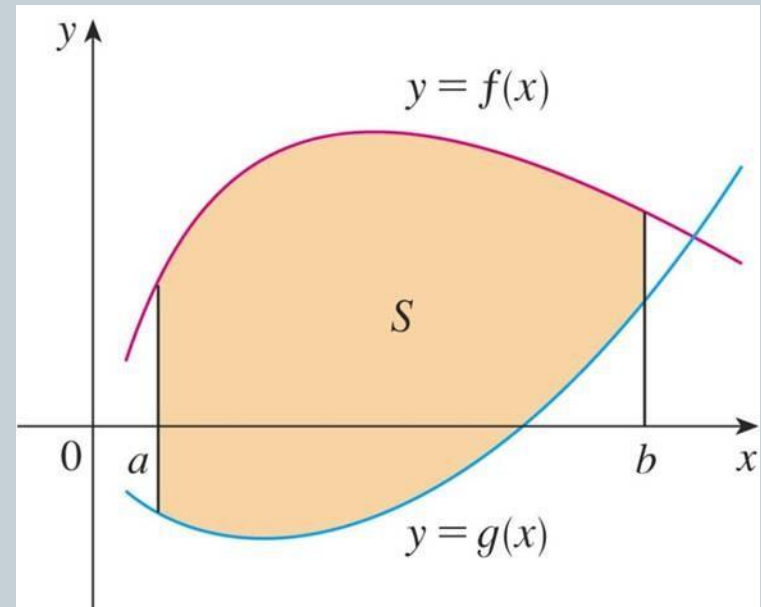


Površina između krivih

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

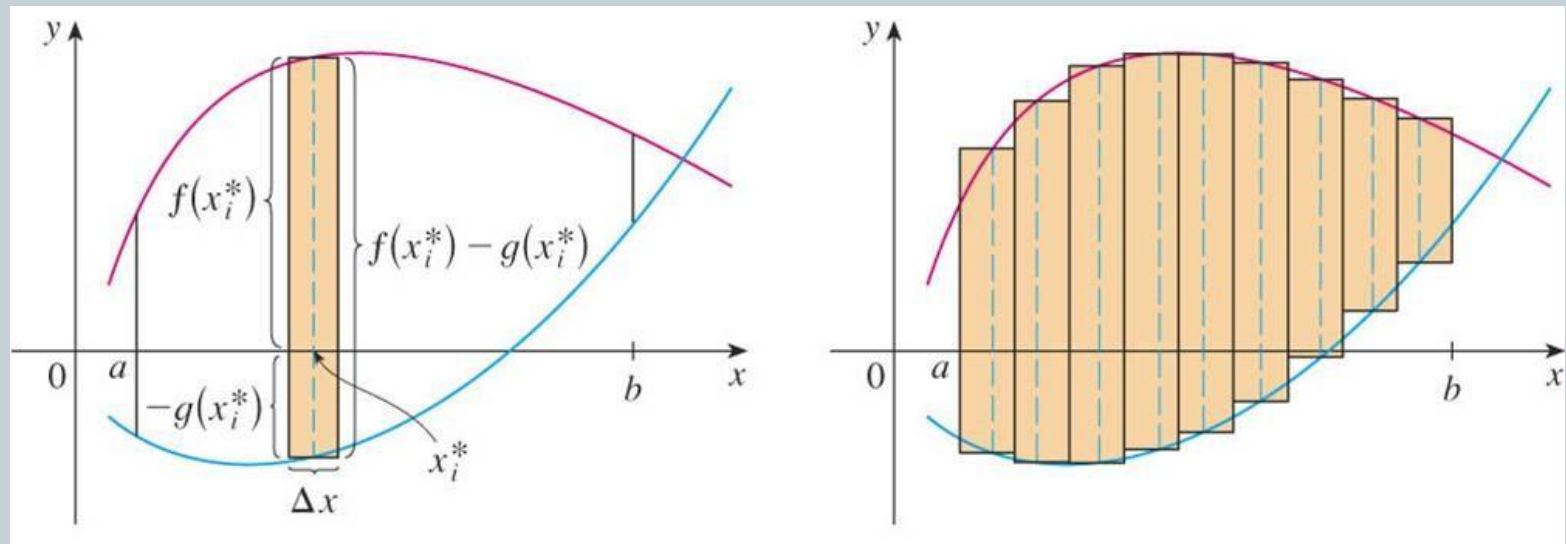


- Posmatramo oblast S koja se nalazi između dve krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i vertikalnih pravih $x = a$ i $x = b$.
 - f i g su neprekidne funkcije i $f(x) \geq g(x)$ za sve x iz $[a, b]$.



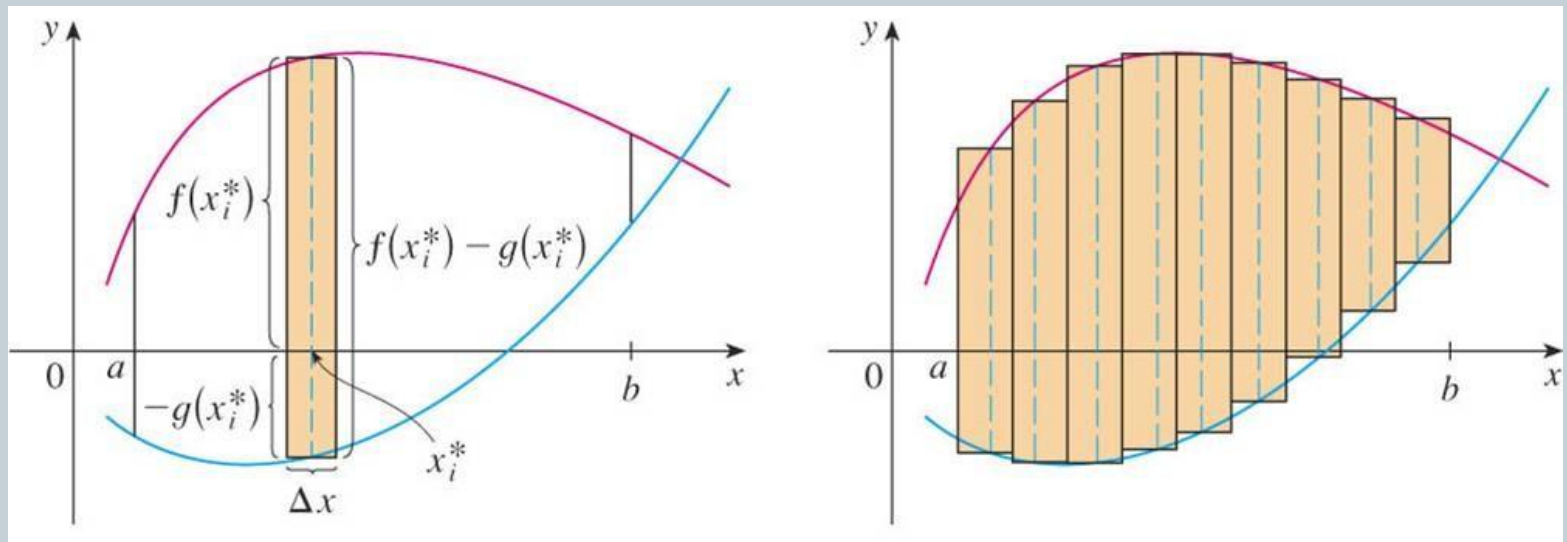
POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

- Kao što smo već radili kod površine ispod krive, tako i ovde oblast S delimo na n delova iste širine i svaki i -ti deo aproksimiramo pravougaonikom čija je širina Δx , a visina $f(x_i^*) - g(x_i^*)$.



POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

- Tačke koje biramo iz podintervala mogu biti i desni krajevi podintervala. U tom slučaju je $x_i^* = x_i$.



POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH



- Rimanova suma $\sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$

je stoga aproksimacija površine oblasti S .

- Ova aproksimacija će biti sve bolja kako $n \rightarrow \infty$.

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH



- Površina P oblasti S se definiše kao granična vrednost sume površina aproksimirajućih pravougaonika:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x) - g(x)] \Delta x$$

- Ova granična vrednost je određeni integral od $f - g$.



- Dakle, imamo sledeću formulu za računanje površine između krivih:
- Površina P oblasti ograničene krivama $y = f(x)$, $y = g(x)$, i pravama $x = a$, $x = b$, gde su f i g neprekidne funkcije i $f(x) \geq g(x)$ za sve x iz $[a, b]$ je data sa:

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH



- Treba uočiti da, u specijalnom slučaju kada je $g(x) = 0$, S predstavlja oblast ispod grafika funkcije f i ova definicija se svodi na prethodno uvedenu definiciju površine ispod krive.

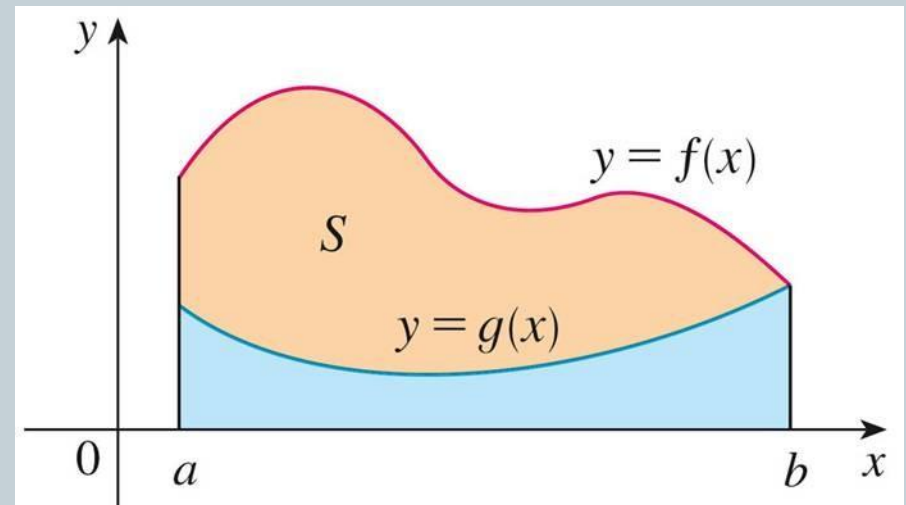
POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

- Kada su obe funkcije f i g nenegativne, sa date slike se vidi da je:

$$P = [\text{površina ispod } y = f(x)] - [\text{površina ispod } y = g(x)]$$

$$= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



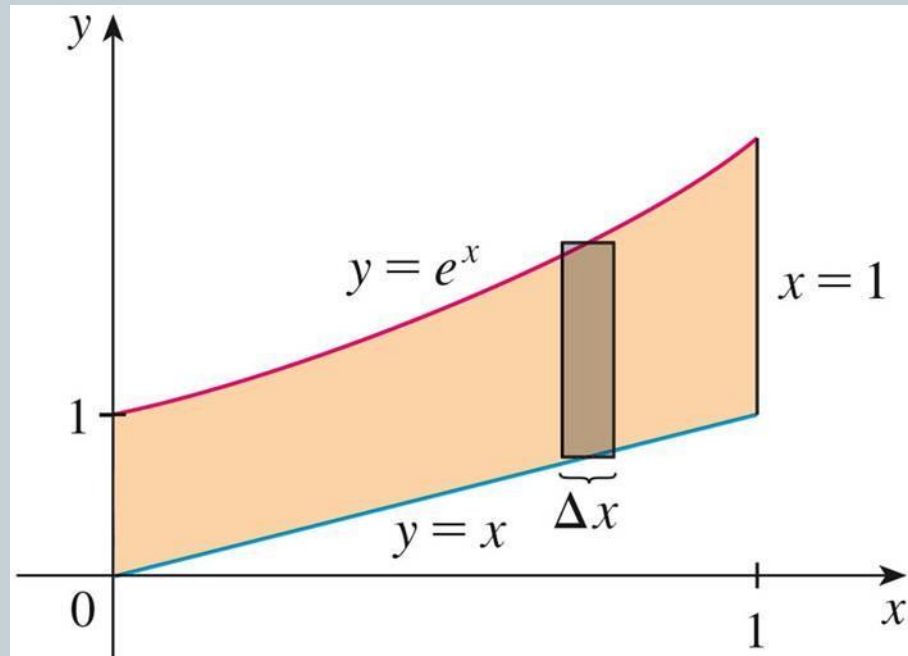


- Naći površinu oblasti ograničene krivom $y = e^x$ i pravom $y = x$ od $x = 0$ do $x = 1$.

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

Primer 1

- Kriva $y = e^x$ je iznad prave $y = x$.





- Dakle, koristimo formulu za površinu između krivih sa $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ i $b = 1$:

$$P = \int_0^1 (e^x - x) dx = \left(e^x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1$$
$$= e - \frac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$



- Naći površinu oblasti koju ograničavaju parabole $y = x^2$ i $y = 2x - x^2$.

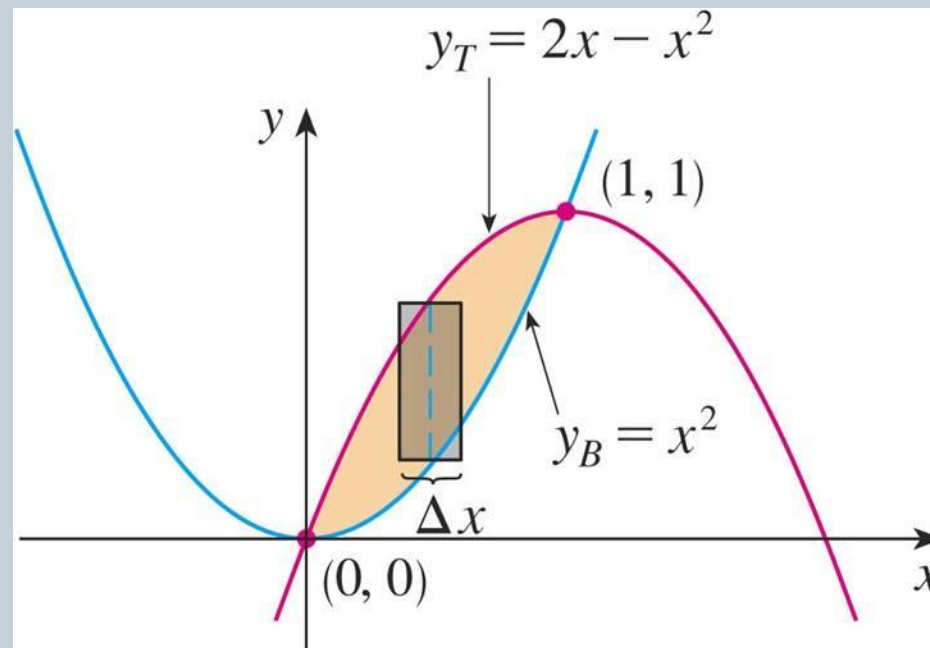


- Prvo moramo pronaći tačke preseka ove dve parabole. Tačke preseka dobijamo rašavajući sistem jednačina.
 - Tako dobijamo $x^2 = 2x - x^2$, tj. $2x^2 - 2x = 0$.
 - Dakle, $2x(x - 1) = 0$, iz čega sledi $x = 0$ ili $x = 1$.
 - Presečne tačke su $(0, 0)$ i $(1, 1)$.

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

Primer 2

- Sa slike vidimo da je gornja granica oblasti kriva $y_T = 2x - x^2$, a donja granica oblasti kriva $y_B = x^2$





- Površina tipičnog pravougaonika iz podele je

$$(y_T - y_B) \Delta x = (2x - x^2 - x^2) \Delta x$$

a oblast se nalazi između $x = 0$ i $x = 1$.

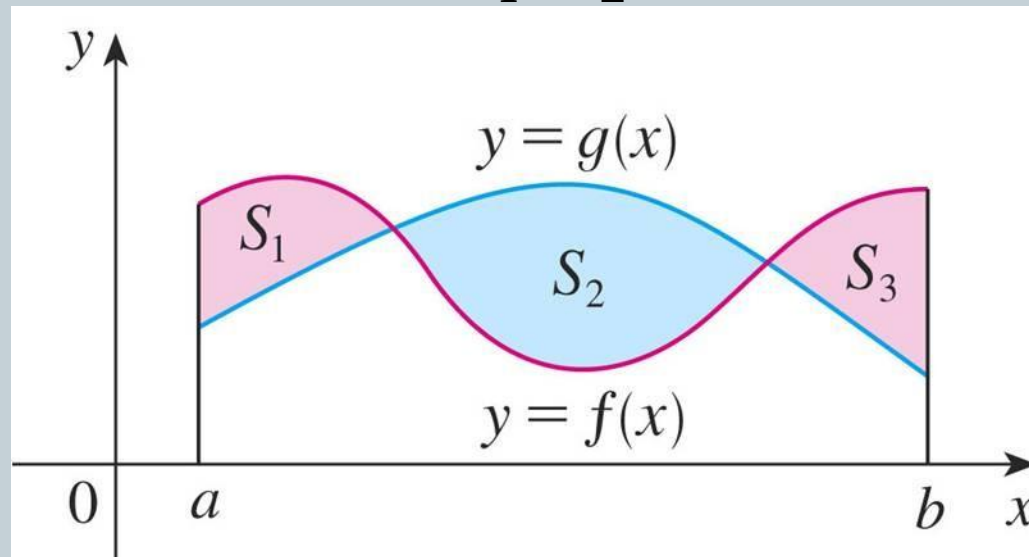
- Dakle, tražena površina je:

$$P = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$= 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

- Ako je potrebno pronaći površinu između krivih $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gde važi $f(x) \geq g(x)$ za neke vrednosti x , ali $g(x) \geq f(x)$ za neke druge vrednosti od x , onda oblast S treba razdvojiti na nekoliko oblasti S_1, S_2, \dots čije su površine P_1, P_2, \dots .



POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH



- U tom slučaju se površina oblasti S računa kao zbir površina manjih oblasti S_1, S_2, \dots , tj.

$$P = P_1 + P_2 + \dots$$

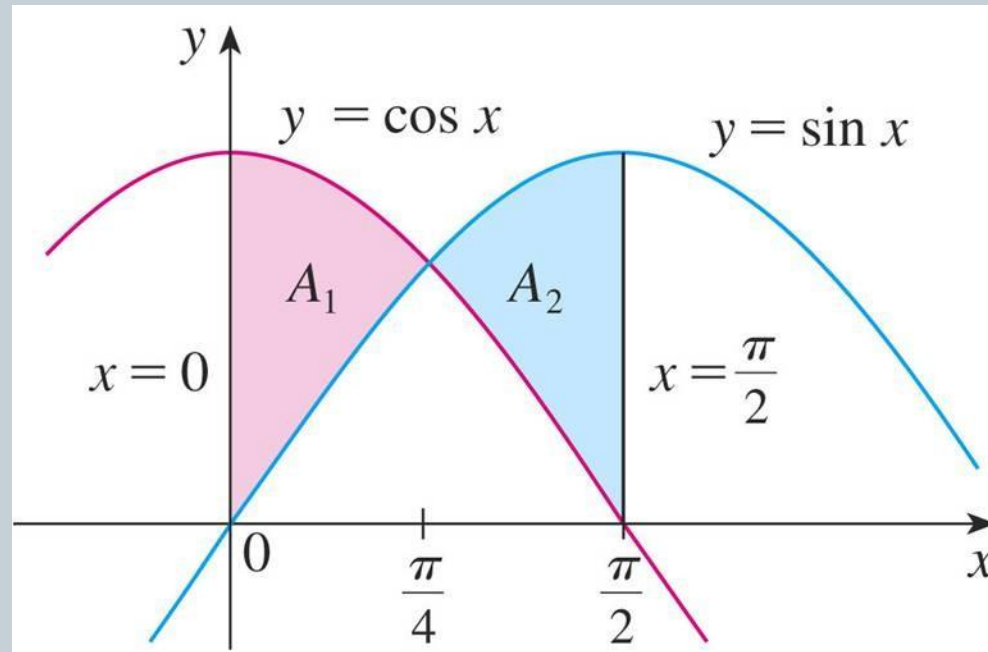


- Naći površinu oblasti ograničene krivama $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ i $x = \pi/2$.

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

Primer 3

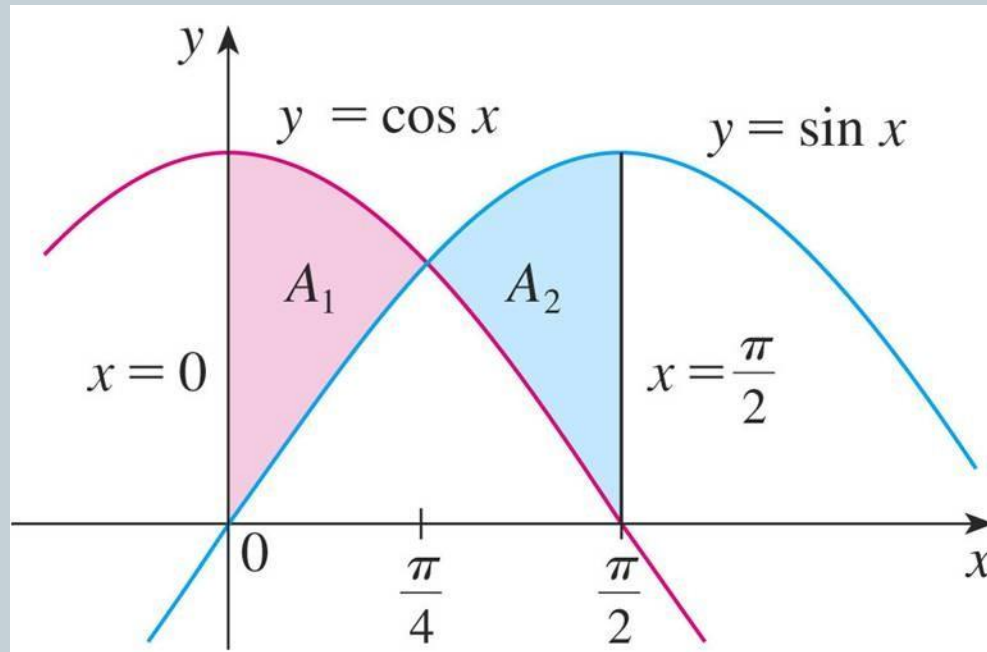
- Tačke preseka se dobijaju kao rešenje jednačine $\sin x = \cos x$. To je $x = \pi / 4$ (pošto važi $0 \leq x \leq \pi / 2$).



POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

Primer 3

- Treba uočiti da važi $\cos x \geq \sin x$ za $0 \leq x \leq \pi / 4$, a $\sin x \geq \cos x$ kada $\pi / 4 \leq x \leq \pi / 2$.





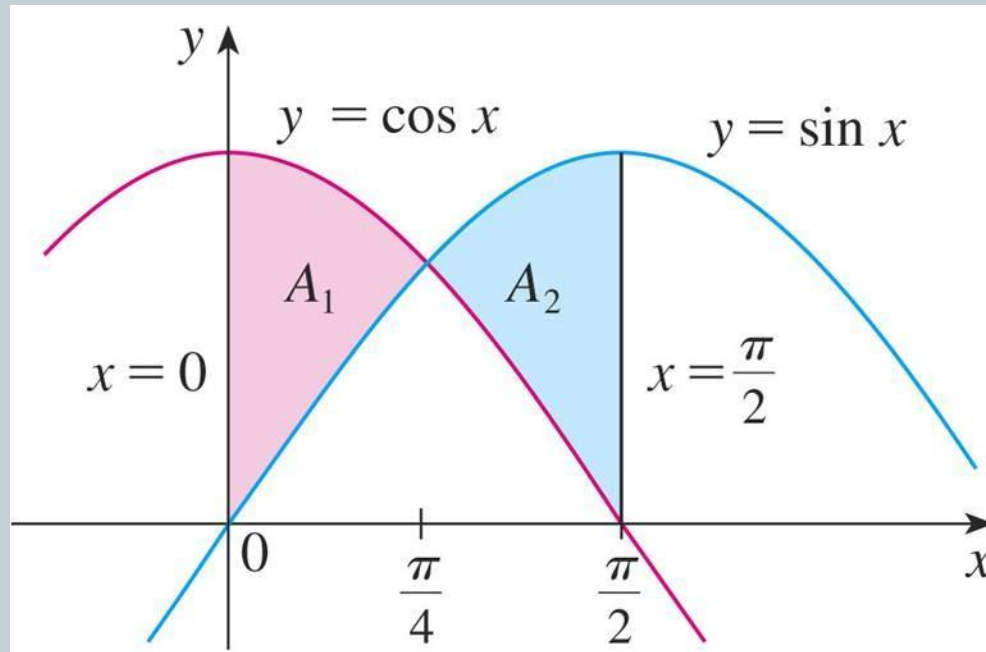
- Dakle, tražena površina je:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\ &= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 \right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

Primer 3

- Račun se može skratiti ako se primeti da se radi o dve površine koje su simetrične u odnosu na $x = \pi / 4$.
- Dakle,
$$P = 2A_1 = 2 \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx$$

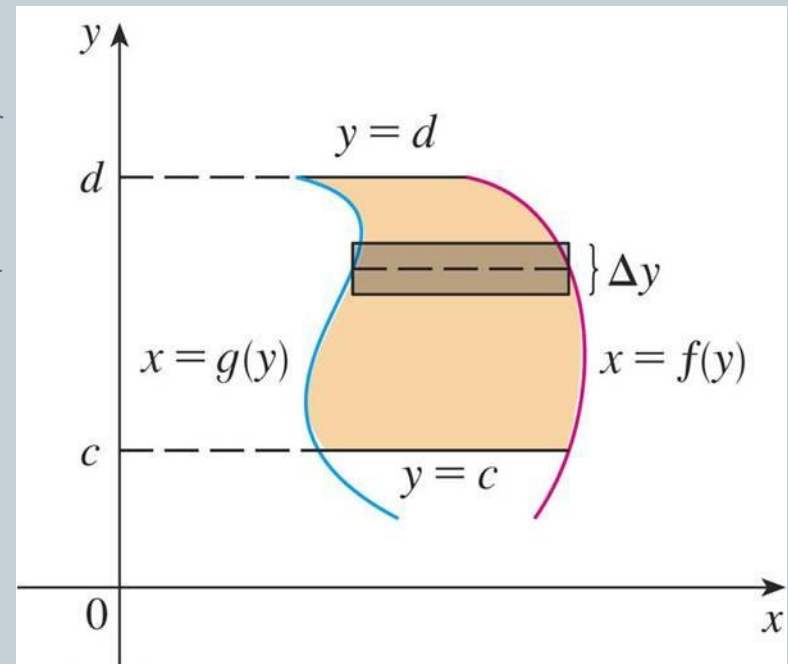


POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH



- Površine nekih oblasti se lakše računaju ako se x posmatra kao funkcija od y .
 - Ako je oblast ograničena krivama $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$, i $y = d$, gde su f i g neprekidne funkcije i važi $f(y) \geq g(y)$ za $c \leq y \leq d$, tada je površina te oblasti data sa:

$$P = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

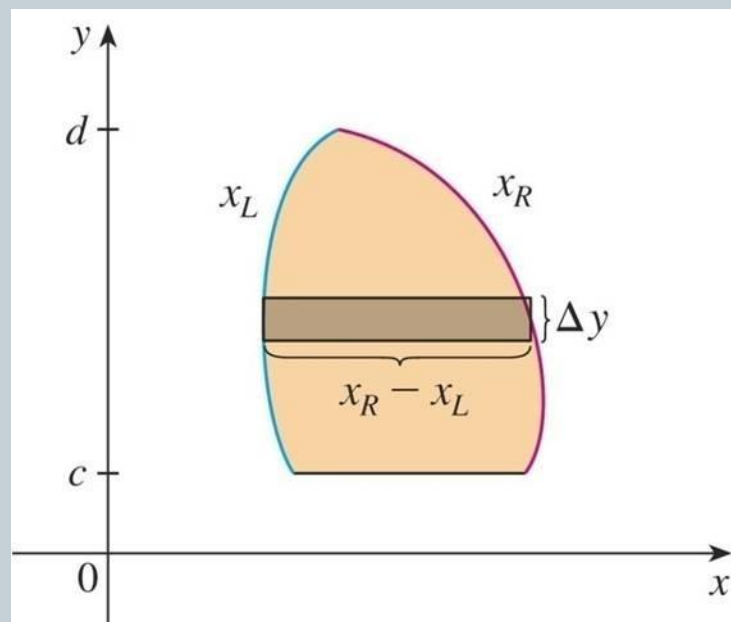


POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

- Ako se sa x_R označi desna granica oblasti, a sa x_L leva granica oblasti, onda imamo:

$$P = \int_c^d (x_R(y) - x_L(y)) dy$$

- Ovde tipičan aproksimirajući pravougaonik ima dimenzije $x_R - x_L$ i Δy .





- Naći površinu oblasti koju ograničavaju prava $y = x - 1$ i parabola $y^2 = 2x + 6$.

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

Primer 4

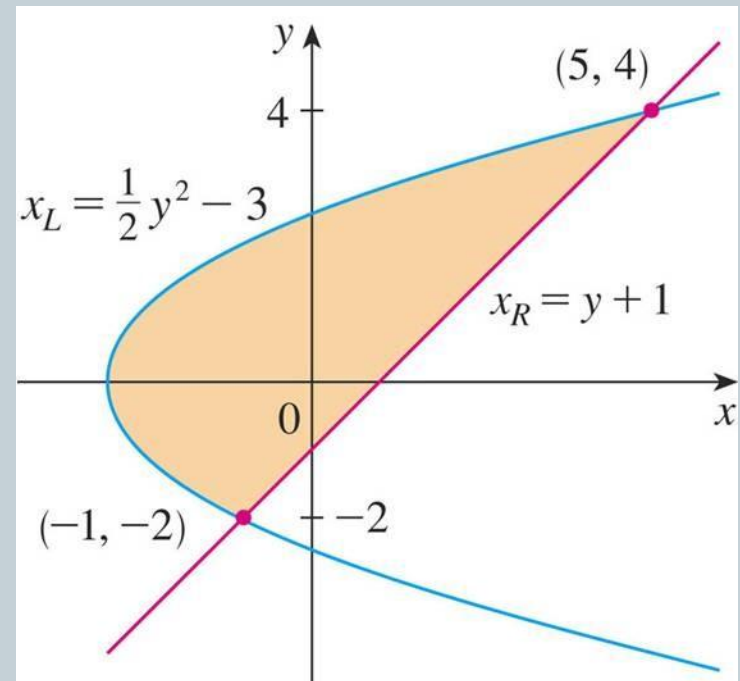
- Rešavanjem sistema, dobijaju se presečne tačke $(-1, -2)$ i $(5, 4)$.

- Iz jednačine parabole se izrazi x .

- Sa slike se vidi koja je desna, a koja leva granica oblasti:

$$x_L = \frac{1}{2} y^2 - 3$$

$$x_R = y + 1$$





- Granice integracije su odgovarajuće y -vrednosti: $y = -2$ i $y = 4$.



- Sledi:
$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^4 (x_R - x_L) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left[(y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right) \right] dy \\ &= \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4 \right) dy \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_{-2}^4 \\ &= -\frac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\frac{4}{3} + 2 - 8 \right) = 18 \end{aligned}$$

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH



- U ovom primeru se površina mogla odrediti i integracijom u odnosu na x .
- Međutim, taj pristup u ovom primeru zahteva više računa.

POVRŠINA IZMEĐU KRIVIH

- Integracija po x bi zahtevala poddelu oblasti na dve A_1 i A_2 i računanje njihovih površina.

- Metod kojim smo mi ovde računali je znatno jednostavniji.

