

PRIMENA ODREĐENOG INTEGRALA



Zapremina obrtnog tela

ZAPREMINA TELA



- Kada se traži zapremina tela, pojavljuje se isti tip problema kao i kod problema određivanja površine ispod krive.

ZAPREMINA TELA



- Na osnovu razmatranja o površini ispod krive i površini između dve krive, verovatno imate ideju kako bi se mogla izračunati zapremina tela proizvoljnog oblika.
- Međutim, kao i do sada, ta ideja se mora precizno sprovesti da bi kalkulacija bila korektna.

ZAPREMINA TELA

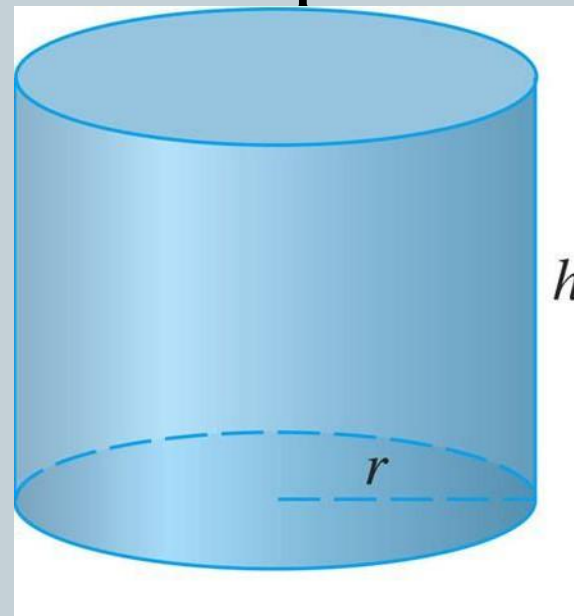


- Podsetićemo se kako se računa zapremina valjka:

$$V = B \cdot h$$

- B je površina osnove, dakle,

$$V = \pi r^2 h.$$



Tokom školovanja ste se susretali sa zapremina još nekih pravilnih tela.

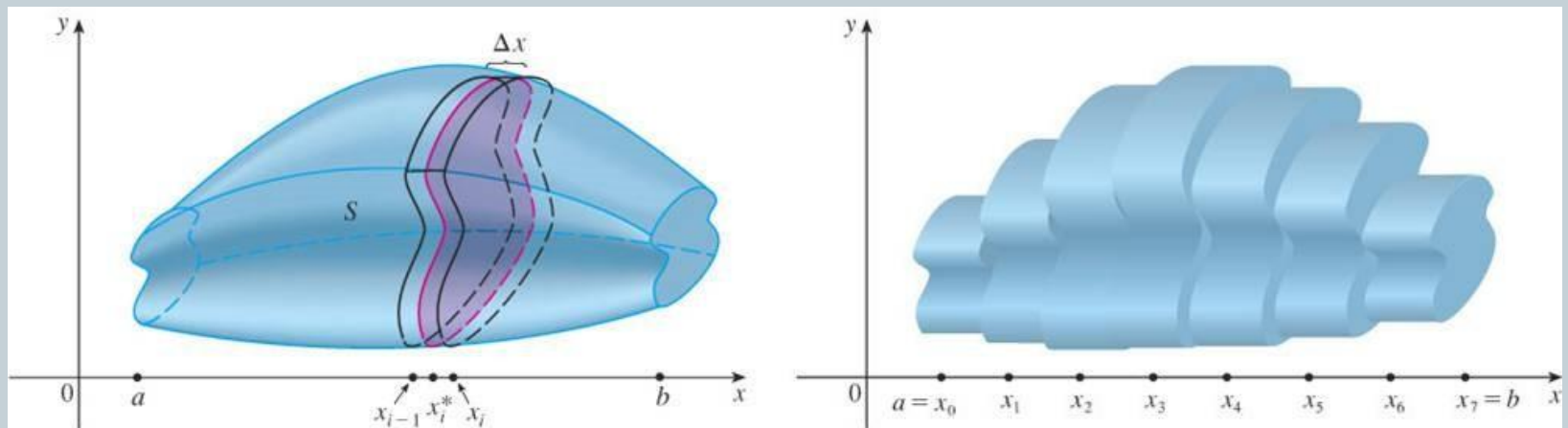
ZAPREMINA NEPRAVILNIH TELA



- Telo S koje nije valjak se prvo podeli na delove. A zatim se svaki taj deo se aproksimira odgovarajućim valjkom.
 - Zapremina tela S se aproksimira zbirom zapremina aproksimativnih valjaka.
 - Tačna vrednost zapremine tela S se dobija graničnim procesom kada se broj delova na koje je telo podeljeno neograničeno povećava.

NEPRAVILNA TELA

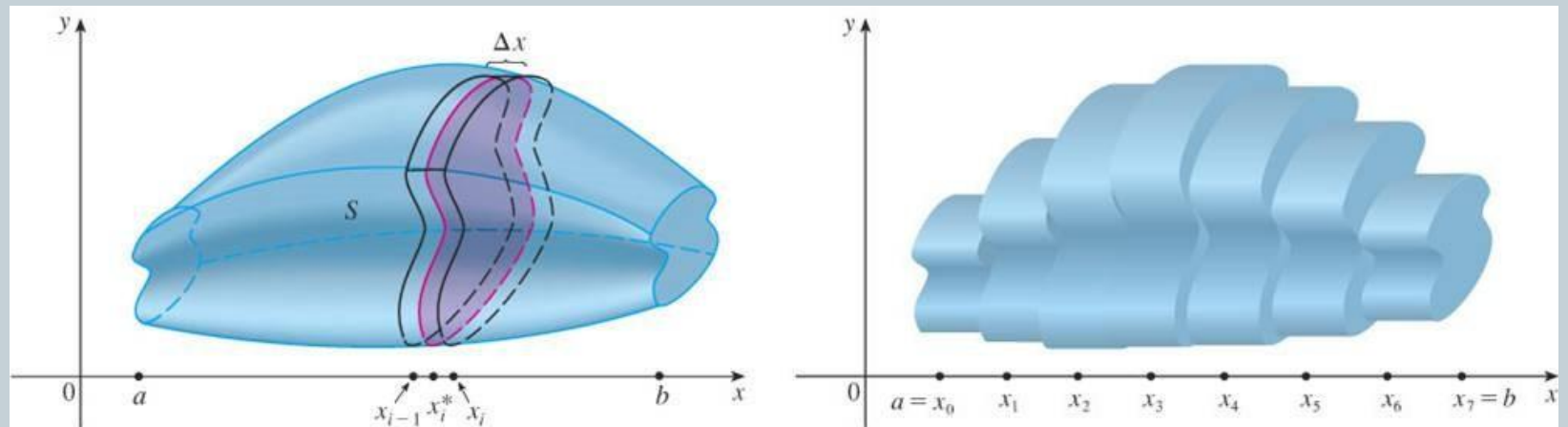
- Telo S se, ravnima koje su normalne na x -osu, podeli na n delova jednake širine Δx .
- Kao da, na primer, sečemo veknu hleba.
- Intervali ne moraju biti jednake širine. Ovakva podela nam samo omogućava jednostavnije označavanje.



NEPRAVILNA TELA



- Odaberu se tačke x_i^* iz intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Svaki i -ti deo S_i se aproksimira valjkom čija je površina osnove $B(x_i^*)$, a visina Δx .



NEPRAVILNA TELA



- Zapremina svakog od ovih valjaka je $B(x_i^*) \cdot \Delta x$.
- Dakle, aproksimacija i -tog dela S_i tela S je data sa:

$$V(S_i) \approx B(x_i^*) \Delta x$$

NEPRAVILNA TELA



- Sabirajući zapremine ovih delova, dobijamo aproksimaciju ukupne zapremine:

$$V \approx \sum_{i=1}^n B(x_i^*) \Delta x$$

- Očigledno je da ova aproksimacija postaje bolja kako $n \rightarrow \infty$, tj. kada delovi postaju sve tanji i tanji.

NEPRAVILNA TELA



- Zato se zapremina nepravilnog tela definiše kao granična vrednost date sume kada $n \rightarrow \infty$.
- Ovde treba prepoznati da se radi o graničnoj vrednosti Rimanove sume, tj. da je reč o određenom integralu.

DEFINICIJA ZAPREMINE



- Neka je S telo koje se nalazi između $x = a$ i $x = b$.
- Ako je $B(x)$ neprekidna funkcija koja u svakoj tački x iz $[a, b]$ daje površinu osnove aproksimativnog valjka (odnosno površinu preseka tela sa ravni koja je u toj tački normalna na x -osu), onda je zapremina tela S data sa:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B(x_i^*) \Delta x = \int_a^b B(x) dx$$

ZAPREMINA OBRTNOG TELA



- Ako je telo S nastalo obrtanjem oblasti ispod neprekidne krive $y=f(x)$ oko x -ose između $x=a$ i $x=b$, onda je $B(x) = \pi f^2(x)$.
- Dakle, zapremina obrtnog tela koje nastaje na taj način je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

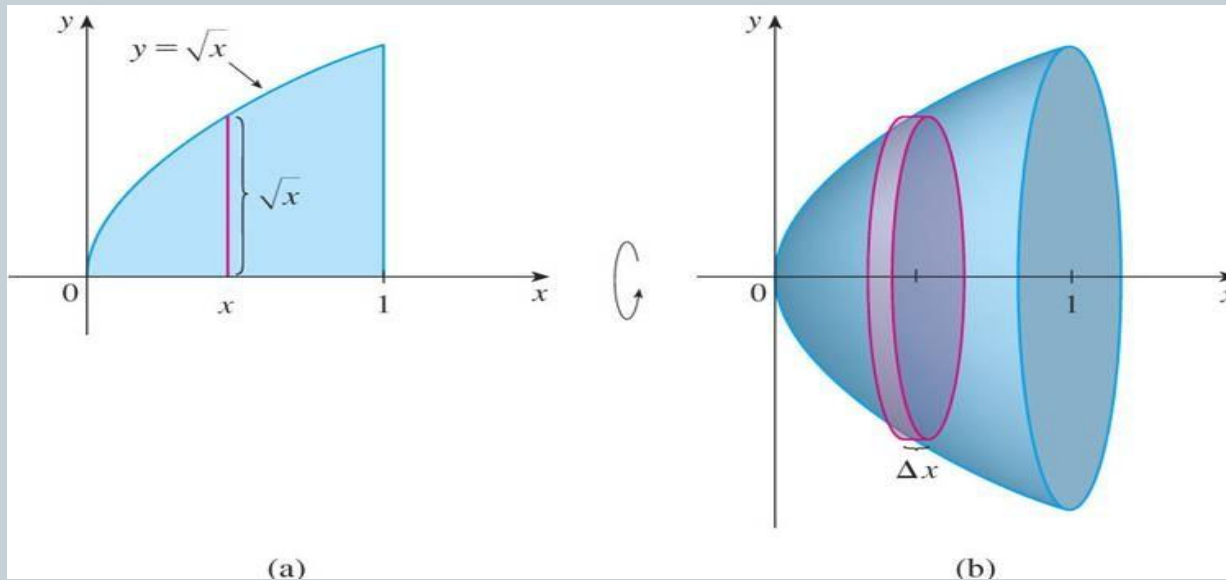


- Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem krive $y = \sqrt{x}$ oko x -ose od 0 do 1.
- Ilustrovati definiciju zapremine skiciranjem tipičnog aproksimativnog valjka.

ZAPREMINA

Primer 1

- Oblast o kojoj je reč je data na slici (a).
- Kada ona rotira oko x -ose, dobijamo telo prikazano na slici (b).
 - Kada se napravi presek u tački x , dobijamo disk (valjak) poluprečnika \sqrt{x} .





- U ovom primeru je:

$$B(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

- Zapremina tipičnog valjka kojim se aproksimira svaki deo je

$$B(x)\Delta x = \pi x \Delta x$$



- Telo se nalazi između $x = 0$ i $x = 1$.
- Dakle, zapremina je:

$$V = \pi \int_0^1 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



- Naći zapreminu tela koje se dobija rotacijom oko y -ose oblasti ograničene sa $y = x^3$, $y = 8$ i $x = 0$.

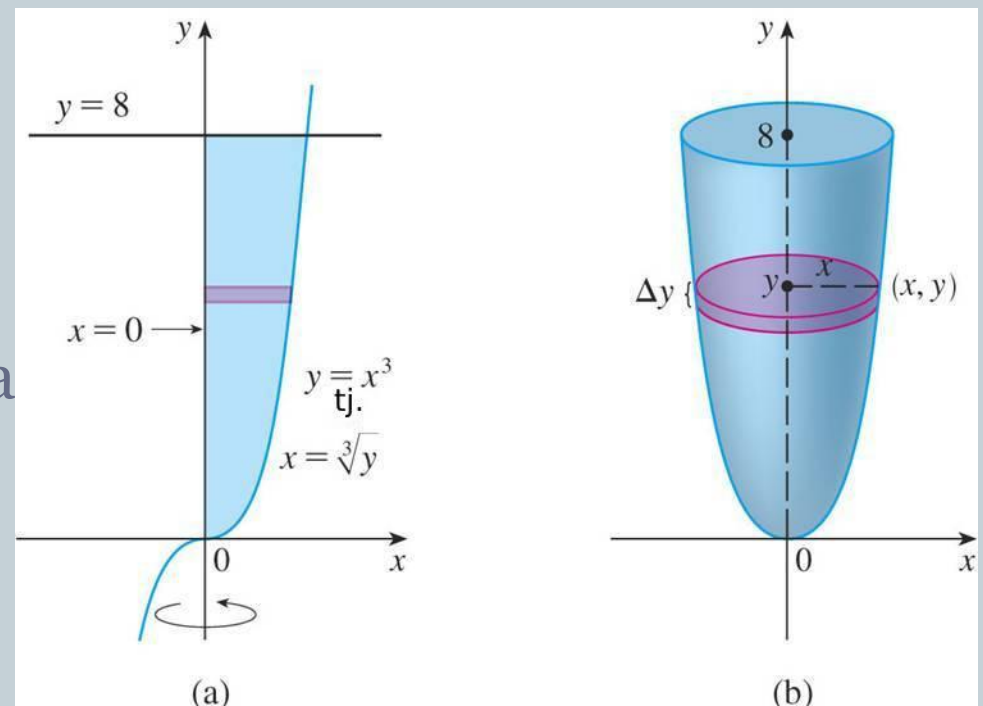
ZAPREMINA

Primer 2

- Kako oblast rotira oko y -ose i podela se može napraviti normalno na y -osu, tako da se onda integrali u odnosu na promenljivu y .

- Ako posmatramo deo koji je na visini y , dobijamo valjak poluprečnika x , gde je

$$x = \sqrt[3]{y}$$





- Sada imamo:

$$B(y) = \pi x^2(y) = \pi (\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

- Zapremina aproksimirajućeg valjka:

$$B(y)\Delta y = \pi y^{2/3} \Delta y$$



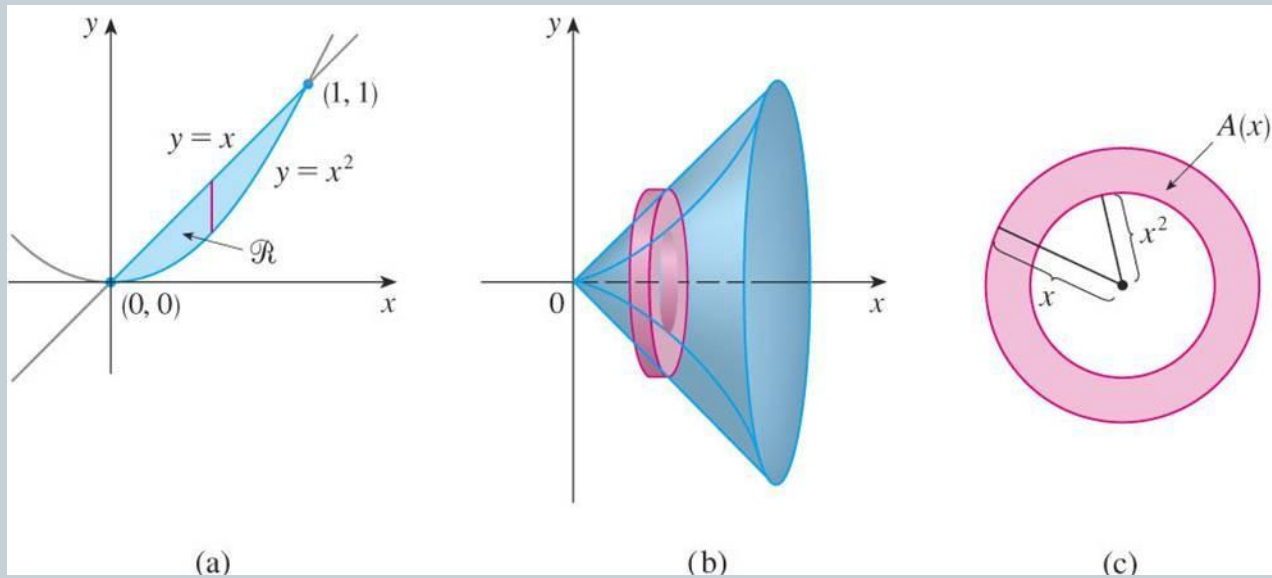
- Kako se telo nalazi između $y = 0$ i $y = 8$, zapremina je data sa:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^8 B(y) dy \\ &= \pi \int_0^8 y^{2/3} dy = \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \right) \Big|_0^8 = \frac{96\pi}{5} \end{aligned}$$

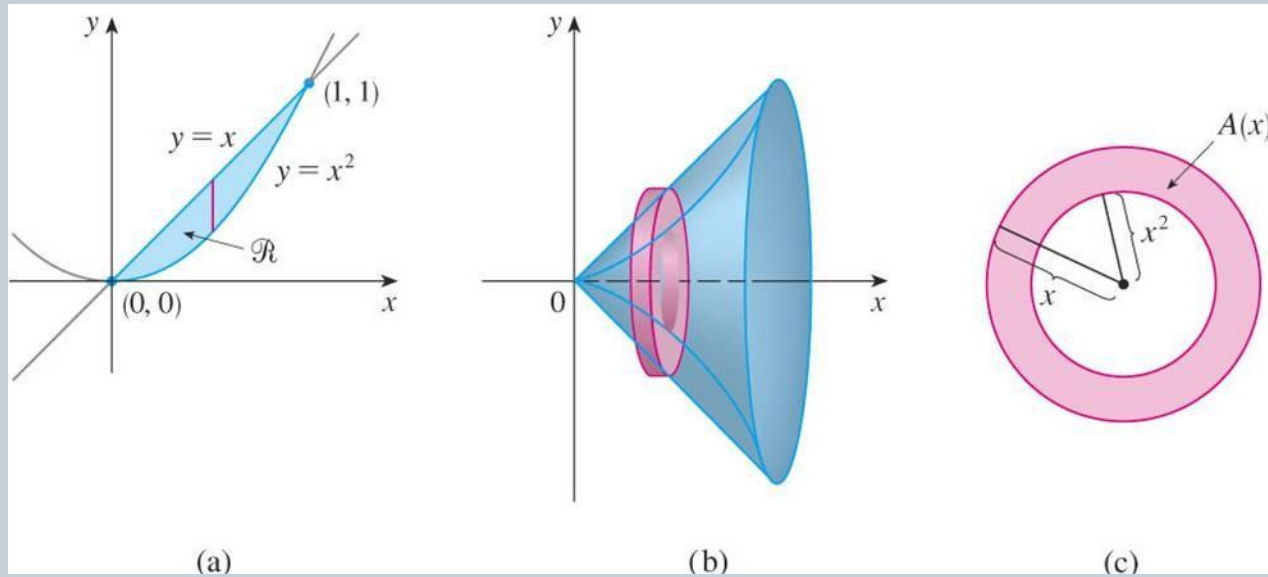


- Oblast \mathcal{R} koja je ograničena krivama $y = x$ i $y = x^2$ rotira oko x -ose.
- Naći zapreminu tela koje se dobija na ovaj način.

- Krive $y = x$ i $y = x^2$ se seku u tačkama $(0, 0)$ i $(1, 1)$.
 - Oblast koja je ograničena ovim krivama rotira oko x -ose i na slici je dat prsten kojim se aproksimira poprečni presek.



- Poluprečnik unutrašnje kružnice je x^2 , a spoljašnje x .





- Tako da u ovom primeru imamo:

$$\begin{aligned} B(x) &= \pi x^2 - \pi (x^2)^2 \\ &= \pi (x^2 - x^4) \end{aligned}$$



- Iz toga sledi:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$