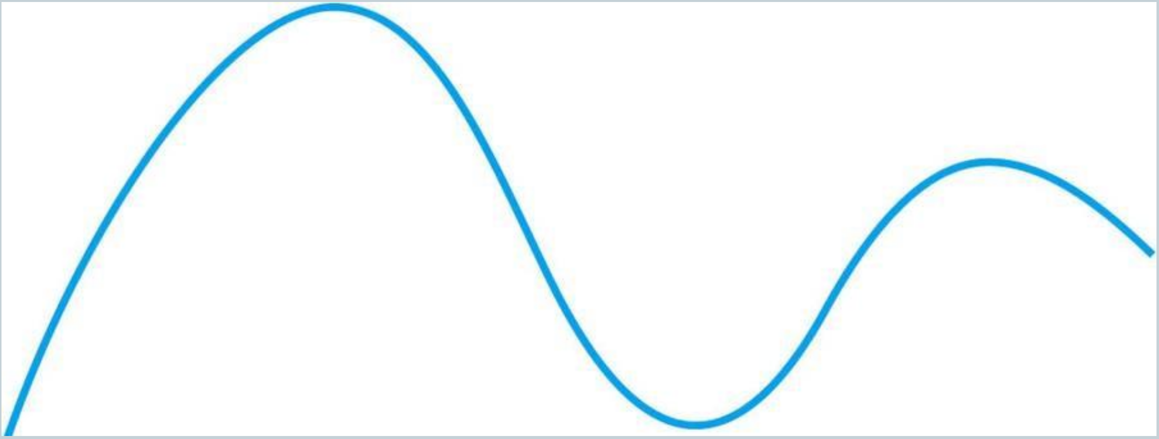
PRIMENA ODREĐENOG INTEGRALA

Dužina luka krive

DUŽINA LUKA KRIVE

- Šta se podrazumeva pod dužinom krive?
- Možemo zamisliti da se parče kanapa stavi na krivu tako da je potpuno prati, a zatim da se taj kanap razvuče i izmeri lenjirom ili metrom.



DUŽINA LUKA KRIVE

- Međutim, takav postupak u principu ne bi mogao da se sprovede sa velikom tačnošću za neke komplikovane krive.

DUŽINA LUKA KRIVE

- Potrebna je precizna definicija dužine luka krive, kao što smo to radili za površinu ispod krive i zapreminu tela.

MNOGOUGAO

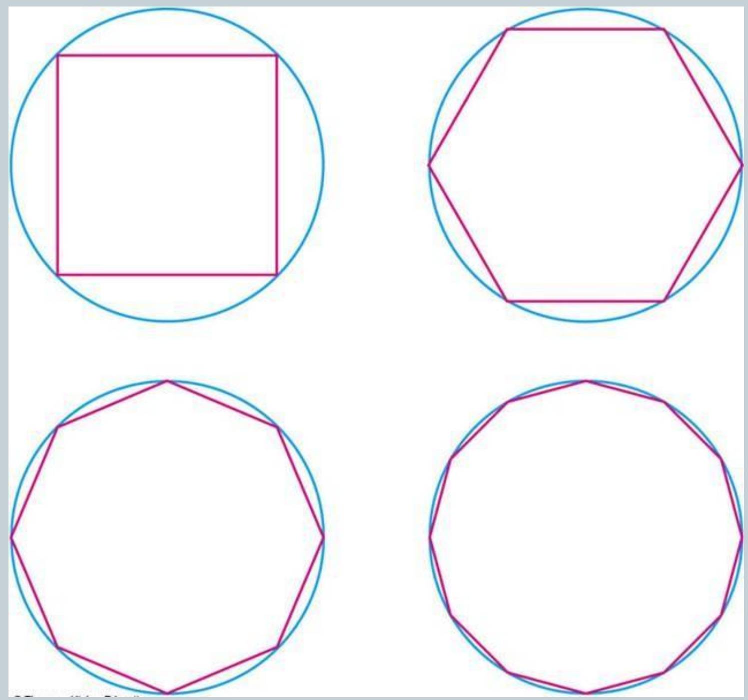
- Ako je kriva mnogougao, onda se njena dužina lako određuje.
  - Sabiraju se dužine stranica koje čine taj mnogougao.
  - Pri tome se može koristiti formula za računanje rastojanja između dve tačke.

DUŽINA LUKA KRIVE

- Do definicije dužine luka krive ćemo doći na sledeći način.
  - Prvo se kriva aproksimira sa mnogougaonom linijom.
  - Zatim se računa granična vrednost zbira dužina svakog segmenta mnogougaone linije, kada se broj segmenata na koji je kriva podeljena povećava.

DUŽINA LUKA KRIVE

- Ovaj postupak je sličan postupku traženja obima kružnice kao granične vrednosti obima upisanih mnogouglova.



DUŽINA LUKA KRIVE

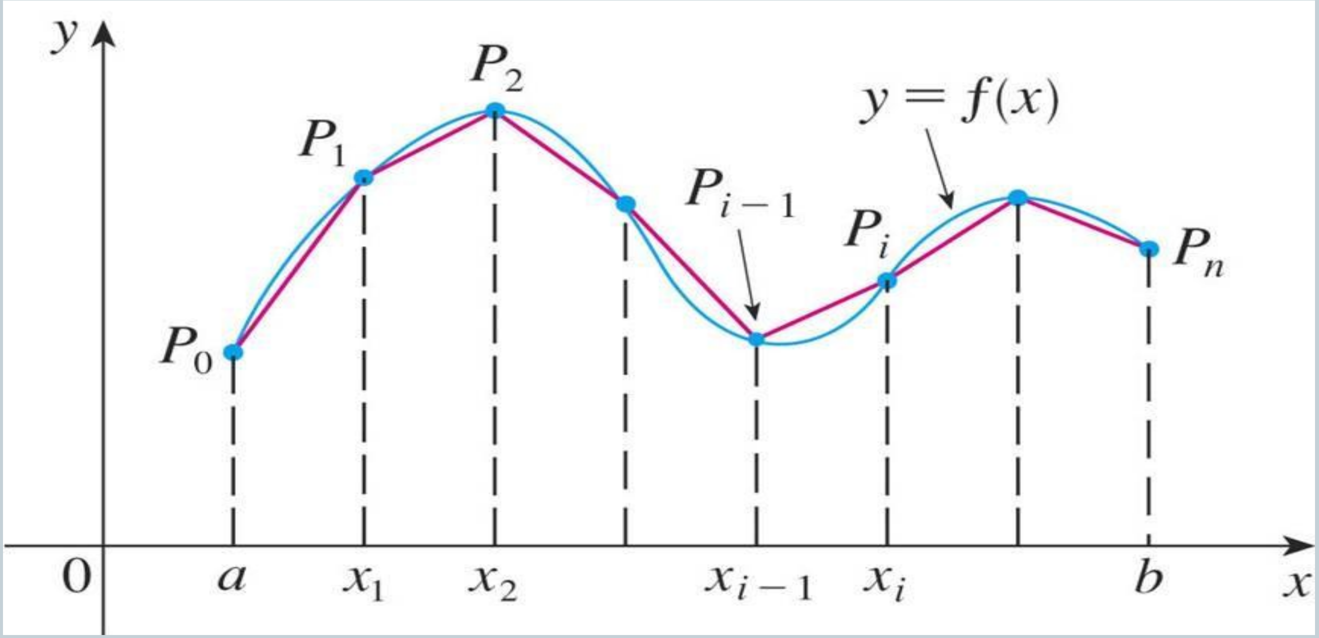
- Neka je kriva C definisana jednačinom $y = f(x)$, gde je f neprekidna funkcija za $a \leq x \leq b$.

DUŽINA LUKA KRIVE

- Aproksimaciju krive C mnogougaonom linijom dobijamo podelom intervala $[a, b]$ na n podinteravla jednake dužine Δx, čiji su krajevi tačke $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

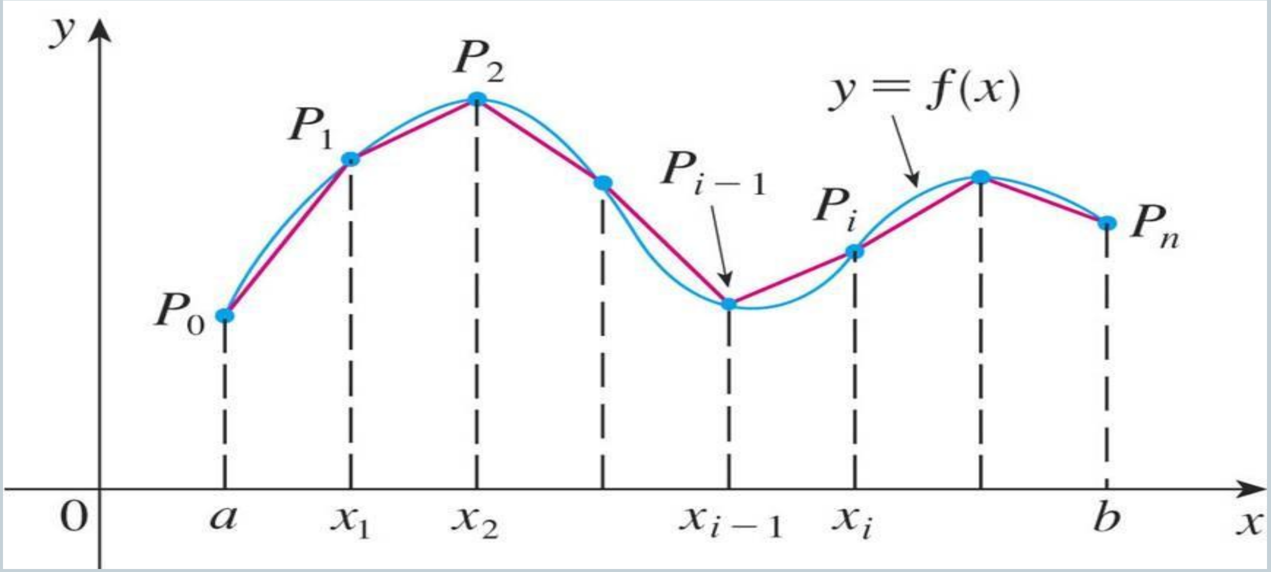
DUŽINA LUKA KRIVE

- Ako je $y_i = f(x_i)$, onda tačke $P_i\,(x_i, y_i)$ leže na C i mnogougaona linija sa čvorovima $P_0, P_1, \ldots, P_n$, predstavlja aproksimaciju krive C.



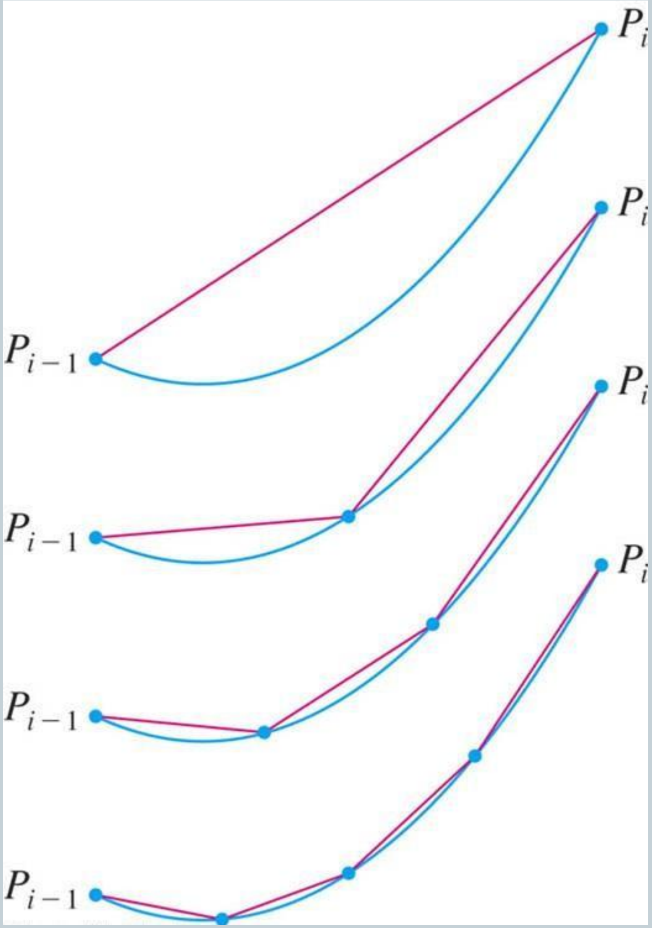
DUŽINA LUKA KRIVE

- Dužina *L* krive *C* je približno jednaka dužini ove mnogougaone linije, a aproksimacija postaje sve bolja kako se *n* povećava, što se može videti na sledećem slajdu.



DUŽINA LUKA KRIVE

- Na ovoj slici je luk krive između tačaka P_{i-1} i P_i uvećan i prikazane su aproksimacije sa sve manjim vrednostima od Δx.



DUŽINA LUKA KRIVE

Definicija 1

- Dužina L luka krive C koja je zadata jednačinom $y = f(x)$, $a \le x \le b$, je granična vrednost sume dužina delova aproksimirajuće mnogougaone linije (ako ta granična vrednost postoji):

(1)
$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left| P_{i-1} P_i \right|$$

DUŽINA LUKA KRIVE

- Treba uočiti da je procedura koju smo koristili za definisanje dužine luka krive veoma slična proceduri koja se koristila za definiciju površine ispod krive i zapremine tela.
  - Prvo se kriva podeli na n manjih delova.
  - Zatim se aproksimiraju dužine tih malih delova i saberu.
  - Na kraju se izračuna granična vrednost kada $n \to \infty$.

DUŽINA LUKA KRIVE

- Definicija dužine luka data sa (1) se ne koristi za konkretno izračunavanje jer bi to bilo dosta komplikovano i nepraktično.

  - Ali se iz nje može izvesti integralna formula za L u slučaju kada funkcija f ima neprekidan prvi izvod.

GLATKA FUNKCIJA

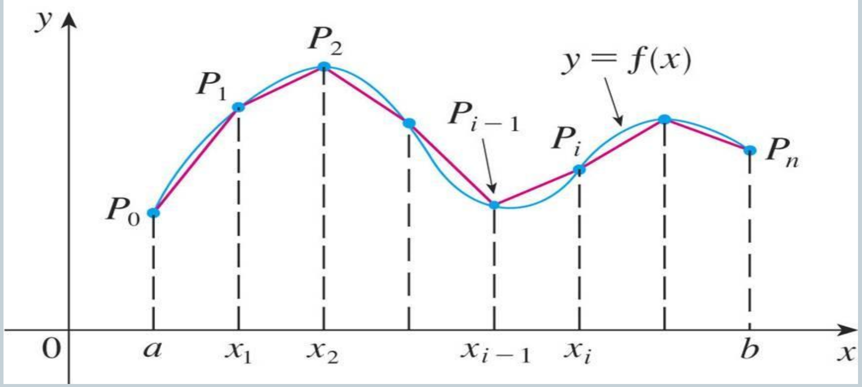
- Funkcija f čiji je izvod neprekidna funkcija se zove glatka funkcija jer mala promena nezavisne promenljive x ima za posledicu malu promenu vrednosti funkcije $f'(x)$.

GLATKA FUNKCIJA

- Ako uvedemo oznaku $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, onda važi

$$\left|P_{i-1}P_i\right| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$



GLATKA FUNKCIJA

- Na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti primenjene na funkciju f na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, sledi da postoji broj x_i^* između x_{i-1} i x_i takav da važi

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}),$$

to jest

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$$

GLATKA FUNKCIJA

- Dakle, sledi:

$$
\begin{aligned}
\left|P_{i-1}P_i\right| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_i^*)\Delta x)^2} \\
&= \sqrt{1+\left[f'(x_i^*)\right]^2}\sqrt{(\Delta x)^2} \\
&= \sqrt{1+\left[f'(x_i^*)\right]^2}\,\Delta x \quad (\text{jer je } \Delta x > 0)
\end{aligned}
$$

GLATKA FUNKCIJA

- Na osnovu Definicije 1 onda sledi

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left| P_{i-1} P_i \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f\,'(x_i^*) \right]^2} \Delta x$$

GLATKA FUNKCIJA

- Prepoznajemo da je ovaj izraz jednak sa

$$\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

na osnovu definicije određenog integrala.

  - Ovaj integral postoji jer je podintegralna funkcija

$$g(x)=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$$

neprekidna.

GLATKA FUNKCIJA

- Tako je dokazana sledeća teorema.

DUŽINA LUKA KRIVE - formula

- Ako je f' neprekidna funkcija na $[a, b]$, onda je dužina luka krive $y = f(x)$, $a \le x \le b$ data sa

(2) $$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

DUŽINA LUKA KRIVE - formula

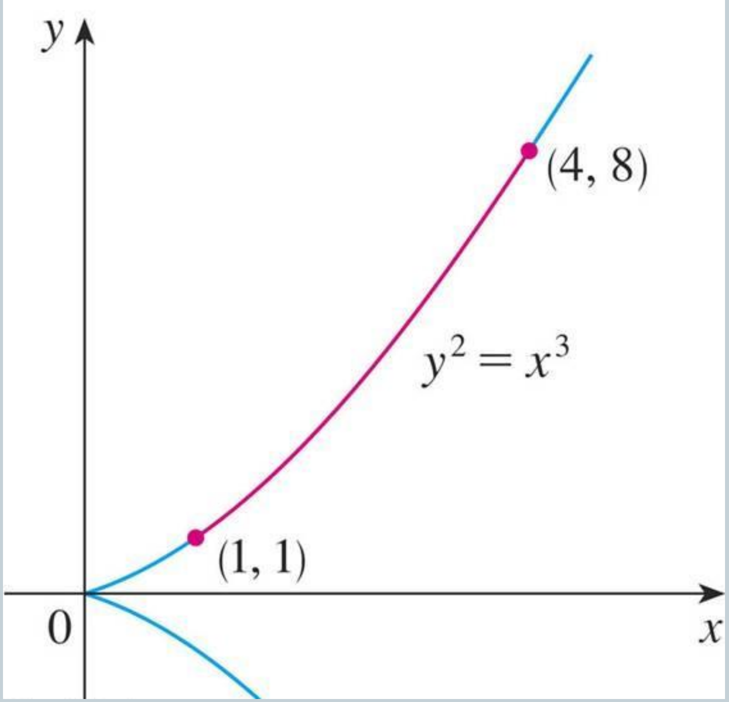
- Ako se upotrebi Lajbnicova notacija za izvode, formula za dužinu luka krive glasi:

(3) $$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

DUŽINA LUKA KRIVE

Primer 1

- Naći dužinu luka krive $y^2 = x^3$ između tačaka (1, 1) i (4, 8) označenu na slici.



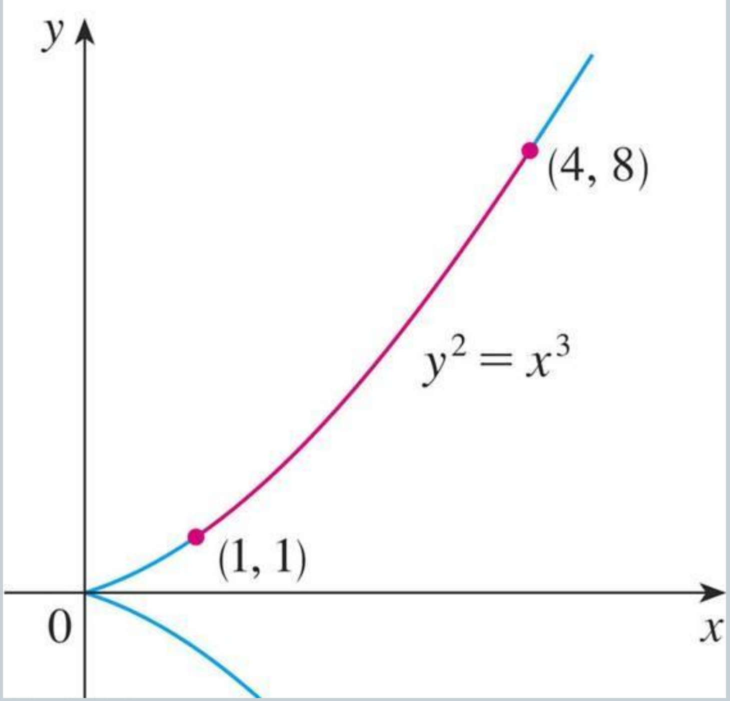
DUŽINA LUKA KRIVE

Primer 1

- Traži se deo krive koji se nalazi iznad *x*-ose:

$$y = x^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2} x^{1/2}$$



DUŽINA LUKA KRIVE

Primer 1

- Dakle, na osnovu formule za dužinu luka:

$$L=\int_{1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}\,dx=\int_{1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

Primer 1

- Uvođenjem smene $u = 1 + (9/4)x$, se dobija $du = (9/4)\,dx$.

- Kada je $x = 1$, onda je $u = 13/4$. Za $x = 4$, sledi $u = 10$.

DUŽINA LUKA KRIVE

Primer 1

- Dakle,

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10}$$

$$= \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)$$

DUŽINA LUKA KRIVE

- Ako je kriva data sa $x = g(y)$, $c \le y \le d$, a $g'(y)$ neprekidna funkcija, onda se zamenom uloga x i y u formuli (2) ili (3) dobija:

$$(4) \qquad L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

DUŽINA LUKA KRIVE

- Kako se u formulama za računanje dužine luka krive pojavljuje kvadratni koren pod integralom, može se desiti da je određivanje tog integrala teško ili čak nemoguće eksplicitno.

- U takvim slučajevima se traži aproksimativno rešenje.

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- U mnogim slučajevim je korisno imati funkciju koja će moći da meri dužinu krive od neke polazne tačke pa do bilo koje druge tačke krive.

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- Neka je kriva C zadata jednačinom $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

- Sa $s(x)$ ćemo označiti rastojanje duž krive C od početne tačke $P_0(a, f(a))$ do tačke $Q(x, f(x))$.

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- Tada je *s* funkcija koja se zove funkcija dužine luka i data je sa

$$s(x)=\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt \tag{5}$$

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- Na osnovu Fundamentalne teoreme, izraz (5) se može diferencirati (pošto je podintegralna funkcija neprekidna):

(6) $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- Iz (6) sledi da je brzina promene od s u odnosu na x najmanje 1 i da je baš jednaka sa 1 kada je $f'(x)$ (nagib krive) jednak 0.

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- Diferencijal funkcije dužine luka:

(7) $$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

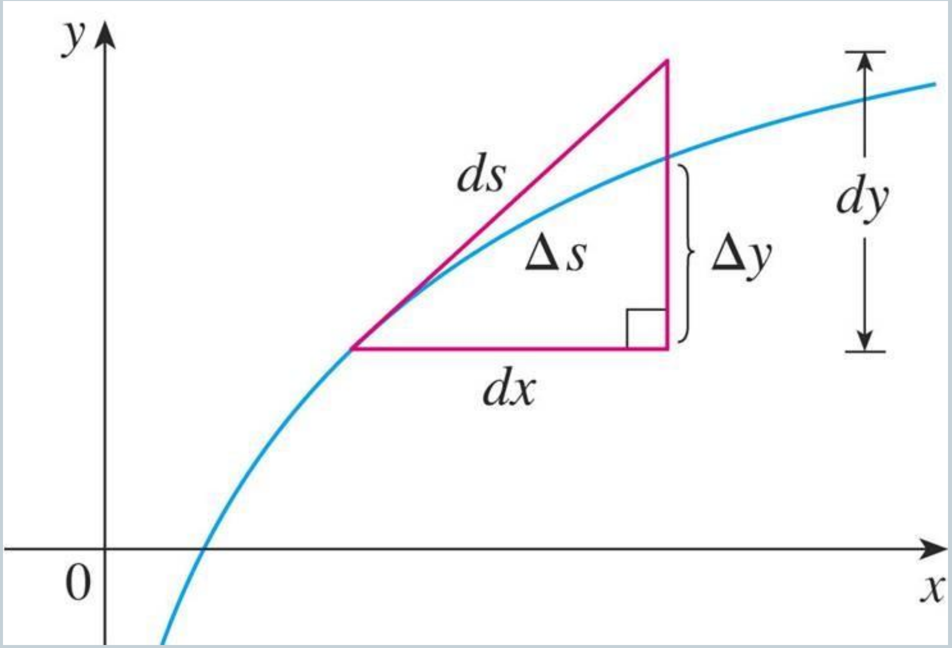
FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- (7) se često piše u simetričnoj formi

(8) $$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- Geometrijska interpretacija (8) je data na slici.



FUNKCIJA DUŽINE LUKA

Primer 2

- Naći funkciju dužine luka za krivu $y = x^2 - \frac{1}{8} \ln x$ uzimajući $P_0(1, 1)$ za početnu tačku.

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

Primer 2

- Kako je $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, sledi

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

- Dakle, $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

Primer 2

- Funkcija dužine luka je data sa:

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t}\right) dt$$

$$= t^2 + \tfrac{1}{8} \ln t \Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8} \ln x - 1$$

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

Primer 2

- Na primer, dužina luka krive od (1, 1) do (3, *f*(3)) je:

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1$$

$$= 8 + \frac{\ln 3}{8}$$

$$\approx 8.1373$$

FUNKCIJA DUŽINE LUKA

- Na slici je data interpretacija funkcije dužine luka krive iz prethodnog primera.