Chapter 1

Skalarne funkcije više promenljivih

Sa stanovišta primene, fizičke veličine koje možemo predstaviti pomoću funkcija mogu biti skalarne i vektorske. Skalarne veličine se mogu potpuno izraziti brojnom vrednošću (masa, dužina, vreme, rad, energija, itd.), dok se vektorske veličine iskazuju vektorima (brzina, ubrzanje, sila, itd.).

1.1 Skalarne funkcije

Definicija 1.1.1 *Realna funkcija n realnih promenljivih je preslikavanje skupa $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, u skup $\mathbb{R}$, tj. podskup Dekartovog proizvoda $D \times \mathbb{R}$ u kome se svaki element iz D pojavljuje tačno jedanput kao prva komponenta.*

Skup D se naziva domen funkcije, a vrednost funkcije f u tački $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ se zapisuje $f(x_1, \ldots, x_n)$. Pišemo i

$$\boxed{f = f(x_1, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n}$$

ili

$$f : D \to \mathbb{R}^n : \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n).$$

Za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$, jednačinom $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ je zadata nivo površ funkcije f. U slučaju $n = 2$ nivo površ se naziva i nivo kriva.

Primer 1.1.1 *Izolinije (grč. isos = jednak) su linije koje na geografskim kartama spajaju tačke u kojima neka pojava ima istu vrednost. Neki primeri izolinija su:*

Izohipse (grč. hypsos = visina) su krive koje na geografskim kartama povezuju mesta iste nadmorske visine. U delovima gde je mreža izohipsi gusta, u prirodi je područje strmo.

Izobate (grč. batos=dubina) su krive koje na geografskim kartama spajaju mesta jednake dubine.

Izobare (grč. baros = težina) su krive koje na kartama povezuju mesta istog vazdušnog pritiska.

Primer 1.1.2 *Skicirati nivo krive sledećih funkcija*

(i) $z = x + y$

(ii) $z = (x-1)^2 + (y+1)^2$

(iii) $z = x^2 - y^2$.

1.2 Površi drugog reda

Površ drugog reda je skup tačaka (x, y, z) u prostoru $\mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju jednačinu

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2exy + 2fxz + 2gyz + 2hx + 2iy + 2jz + k = 0}$$

gde je $(a, b, c, e, f, g) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Rotacione površi. Rotacione (ili kružne) površi nastaju rotacijom krive oko prave u prostoru $\mathbb{R}^3$, pri čemu date prava i kriva pripadaju istoj ravni. Karakteristični primeri su rotacione površi koje su dobijene rotacijom krivih koje pripadaju koordinatnim ravnima oko koordinatnih osa:

- površ data jednačinom $z = f(x^2+y^2)$ je dobijena rotacijom krive $z = f(y^2)$ (u yz-ravni) oko z-ose;
- površ data jednačinom $x = f(y^2 + z^2)$ je dobijena rotacijom krive $x = f(z^2)$ (u xz-ravni)oko x-ose;
- površ data jednačinom $y = f(z^2 + x^2)$ je dobijena rotacijom krive $y = f(x^2)$ (u xy-ravni)oko x-ose.

Posmatrajmo u ravni $x = 0$ grafik funkcije $z = f(y)$, $y \geq 0$, kao što je prikazano na Slici 1.1(a). Rotacijom date krive oko z-ose dobijamo površ prikazanu na Slici 1.1(b). Pretpostavimo da je jednačina date površi $h = h(x, y)$. Primetimo da u tom slučaju važi sledeće:

$$h(0, y) = \begin{cases} f(y) & , y \geq 0 \\ f(-y) & , y < 0. \end{cases}$$

Izaberimo proizvoljni tačku na površi, neka je to $A(x_1, y_1, h(x_1, y_1))$. Postavlja se pitanje kako izraziti vrednost $h(x_1, y_1)$ pomoću funkcije f. Tačke A i B leže u istoj ravni i na istom rastojanju od z-ose, kao što je prikazano na slici. Tako dobijamo da je

$$h(x_1, y_1) = h\left(0, \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right) = f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right).$$

tj. $h(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

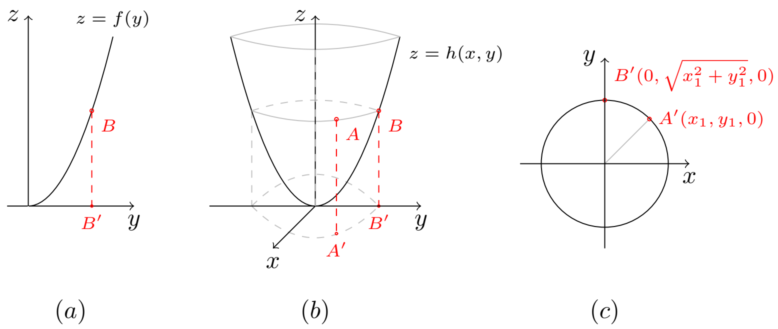


Figure 1.1: Rotaciona površ

Primer 1.2.1 *Skicirati grafike realnih funkcija dve realne promenljive koje su zadate na sledeći način:*

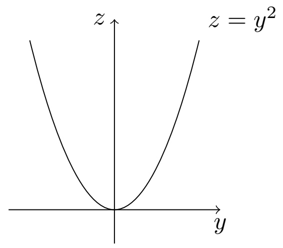
(a) $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D = \mathbb{R}^2$

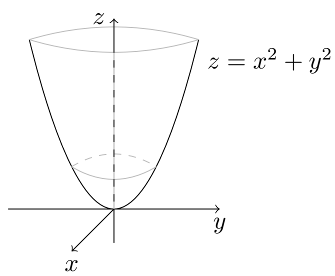
(b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in D = \mathbb{R}^2$.

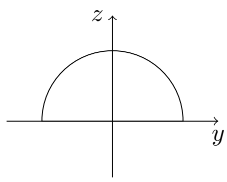
Rešenje. Grafici posmatranih funkcija su rotacione površi tj. površi dobijene rotacijom nekih krivih oko ose rotacije (što je u ovom slučaju z-osa).

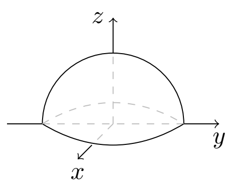
(a) Grafik funkcije $z = x^2 + y^2$ može se dobiti rotacijom krive $z = y^2$ oko z-ose.



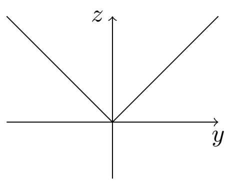


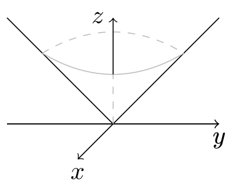
(b) Grafik funkcije $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ može se dobiti rotacijom krive $z = \sqrt{1 - y^2}$ oko z-ose. Treba primetiti da je $z = \sqrt{1 - y^2}$ jednačina dela kružnice sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika 1, koji leži iznad y-ose.





(c) Grafik funkcije $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ može se dobiti rotacijom krive $z = |y|$ oko z-ose.





Napomena: Primetimo da se rotaciona površ može dobiti rotacijom dela krive za koji je argument nenegativan.

1.3 Granična vrednost i neprekidnost funkcije dve promenljive

Neka je $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je M_1 tačka nagomilavanja skupa D.

Definicija 1.3.1 *Kažemo da je $A \in \mathbb{R}$ granična vrednost funkcije f kad M teži M_1 ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r = r(\epsilon) > 0)(\forall M \in D \setminus \{M_1\})\ d(M, M_1) < r \Rightarrow d(f(x, y), A) < \epsilon$$

i pišemo

$$\lim_{M \to M_1} f(M) = A.$$

Primer 1.3.1 *Neka je*

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & , \textit{ ako je } (x,y) \neq (2,5) \\ 1 & , \textit{ ako je } (x,y) = (2,5) \end{cases}$$

Granična vrednost funkcije f *kad* M *teži* $(2,5)$ *jednaka je* $A = 7$.

Definicija 1.3.2 *Funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, *je neprekidna u unutrašnjoj tački* $M_1 \in D$ *ako je*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r = r(\epsilon) > 0)(\forall M \in D)\ d(M, M_1) < r \Rightarrow d(f(M), f(M_1)) < \epsilon$$

Znači, tri uslova moraju biti zadovoljena:

(a) $\lim\limits_{M \to M_1} f(M) = A$, tj. postoji granična vrednost kada $M \to M_1$;

(b) postoji $f(M_1)$, tj. f je definisana u tački M_1;

(c) $A = f(M_1)$.

Definicija 1.3.3 *Funkcija* $z = f(x,y)$ *je neprekidna u oblasti* D *ako je neprekidna u svakoj tački iz* D.

Primer 1.3.2 *Funkcija* f *u Primeru 1.3.1 ima otklonjiv prekid u tački* $(2,5)$. *Moguće je definisati funkciju*

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y & , \textit{ ako je } (x,y) \neq (2,5) \\ 7 & , \textit{ ako je } (x,y) = (2,5) \end{cases}$$

koja je neprekidna u $\mathbb{R}^2$.