Konformna preslikavanja

PREDAVANJA 10

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, decembar 2024

Konformna preslikavanja

- Preslikavanje $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ koje oblast $D \subseteq \mathbb{C}$ preslikava u oblast $G \subseteq \mathbb{C}$ je konformno u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ ako očuvava ugao među krivama koje prolaze kroz tačku z_0.
- Ako se funkcijom f tačka $x_0 + iy_0$ preslikava u $u_0 + iv_0$ i ako se krive C_1 i C_2 koje se seku u $x_0 + iy_0$ preslikavaju u C_1' i C_2' respektivno (C_1' i C_2' se seku u $u_0 + iv_0$), i ako je f konformno preslikavanje, tada je ugao između krivih C_1' i C_2' jednak (po veličini i orijentaciji) uglu između krivih C_1 i C_2.
- Kažemo da je preslikavanje f konformno na oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ ako je f konformno u svakoj tački $z_0 \in D$.

Konformna preslikavanja

- Preslikavanje $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ koje oblast $D \subseteq \mathbb{C}$ preslikava u oblast $G \subseteq \mathbb{C}$ je konformno u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ ako očuvava ugao među krivama koje prolaze kroz tačku z_0.
- Ako se funkcijom f tačka $x_0 + iy_0$ preslikava u $u_0 + iv_0$ i ako se krive C_1 i C_2 koje se seku u $x_0 + iy_0$ preslikavaju u C_1' i C_2' respektivno (C_1' i C_2' se seku u $u_0 + iv_0$), i ako je f konformno preslikavanje, tada je ugao između krivih C_1' i C_2' jednak (po veličini i orijentaciji) uglu između krivih C_1 i C_2.
- Kažemo da je preslikavanje f konformno na oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ ako je f konformno u svakoj tački $z_0 \in D$.

Konformna preslikavanja

- Preslikavanje $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ koje oblast $D \subseteq \mathbb{C}$ preslikava u oblast $G \subseteq \mathbb{C}$ je konformno u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ ako očuvava ugao među krivama koje prolaze kroz tačku z_0.
- Ako se funkcijom f tačka $x_0 + iy_0$ preslikava u $u_0 + iv_0$ i ako se krive C_1 i C_2 koje se seku u $x_0 + iy_0$ preslikavaju u C_1' i C_2' respektivno (C_1' i C_2' se seku u $u_0 + iv_0$), i ako je f konformno preslikavanje, tada je ugao između krivih C_1' i C_2' jednak (po veličini i orijentaciji) uglu između krivih C_1 i C_2.
- Kažemo da je preslikavanje f konformno na oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ ako je f konformno u svakoj tački $z_0 \in D$.

Teorema

Ako je f analitička funkcija i $f'(z) \neq 0$ za svako z iz oblasti D, tada je $\omega = f(z)$ konformno na D.

Dokaz: Neka je $z = x + iy$ i $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, i neka kriva C ima parametarsku jednačinu $z(t) = x(t) + iy(t)$, tada C' $\omega(t) = u(t) + iv(t)$. Ako tangenta u tački z_0 na krivu C zaklapa sa pozitivnim delom realne ose ugao θ_0, onda će tangenta u tački $\omega_0 = f(z_0)$ na krivu $C' = f(C)$ zaklapati ugao $\varphi_0 = \theta_0 + \arg f'(z_0)$.
$\frac{dz}{dt}\Big|_{z=z_0}$, $\frac{d\omega}{dt}\Big|_{\omega=\omega_0}$ je vektor tangente u z_0 na C, odnosno u ω_0 na C' jer $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z)\frac{dz}{dt}$, $f'(z_0) \neq 0$, te je
$\frac{d\omega}{dt}\Big|_{\omega=\omega_0} = f'(z_0)\frac{dz}{dt}\Big|_{z=z_0}$, i $\arg\frac{d\omega}{dt}\Big|_{\omega=\omega_0} = \arg f'(z_0) + \arg\frac{dz}{dt}\Big|_{z=z_0}$,
tj. $\varphi_0 = \theta_0 + \arg f'(z_0)$.
U slučaju $f'(z_0) = 0$, $\arg f'(z_0)$ nije definisan.
Rotacija za isti ugao $\alpha = \arg f'(z_0)$, očuvava ugao između krivih. $\square$

Teorema

Ako je f analitička funkcija i $f'(z) \neq 0$ za svako z iz oblasti D, tada je $\omega = f(z)$ konformno na D.

<u>Dokaz:</u> Neka je $z = x + iy$ i $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, i neka kriva C ima parametarsku jednačinu $z(t) = x(t) + iy(t)$, tada C' $\omega(t) = u(t) + iv(t)$. Ako tangenta u tački z_0 na krivu C zaklapa sa pozitivnim delom realne ose ugao θ_0, onda će tangenta u tački $\omega_0 = f(z_0)$ na krivu $C' = f(C)$ zaklapati ugao $\varphi_0 = \theta_0 + \arg f'(z_0)$.
$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$, $\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\omega=\omega_0}$ je vektor tangente u z_0 na C, odnosno u ω_0 na C' jer $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z)\frac{dz}{dt}$, $f'(z_0) \neq 0$, te je
$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\omega=\omega_0} = f'(z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$, i $\arg\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{\omega=\omega_0} = \arg f'(z_0) + \arg\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$,
tj. $\varphi_0 = \theta_0 + \arg f'(z_0)$.
U slučaju $f'(z_0) = 0$, $\arg f'(z_0)$ nije definisan.
Rotacija za isti ugao $\alpha = \arg f'(z_0)$, očuvava ugao između krivih. $\square$

Neki primeri konformnih preslikavanja

1. Linearna funkcija $\omega = az + b$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$

Neka je $a = |a|e^{i\alpha}$. Preslikavanje $\omega = az + b$ je kompozicija tri preslikavanja:

- $\omega_1 = e^{i\alpha} z$, rotacija za ugao α,
- $\omega_2 = |a|\omega_1$, homotetija sa faktorom $|a|$,
- $\omega = \omega_2 + b$, translacija za vektor b.

Oblik figure ostaje očuvan, pri homotetiji se menja veličina figure, ako je $|a| < 1$, smanjuje se, a za $|a| > 1$, povećava se.
Za $a = 1$, $z = \frac{b}{1-a}$ i $z = \infty$ su fiksne tačke linearnog preslikavanja $\omega = az + b$.

Neki primeri konformnih preslikavanja

1. Linearna funkcija $\omega = az + b$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$

Neka je $a = |a|e^{i\alpha}$. Preslikavanje $\omega = az + b$ je kompozicija tri preslikavanja:

- $\omega_1 = e^{i\alpha}z$, rotacija za ugao α,
- $\omega_2 = |a|\omega_1$, homotetija sa faktorom $|a|$,
- $\omega = \omega_2 + b$, translacija za vektor b.

Oblik figure ostaje očuvan, pri homotetiji se menja veličina figure, ako je $|a| < 1$, smanjuje se, a za $|a| > 1$, povećava se.
Za $a = 1$, $z = \frac{b}{1-a}$ i $z = \infty$ su fiksne tačke linearnog preslikavanja $\omega = az + b$.

Neki primeri konformnih preslikavanja

1. Linearna funkcija $\omega = az + b$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$

Neka je $a = |a|e^{i\alpha}$. Preslikavanje $\omega = az + b$ je kompozicija tri preslikavanja:

- $\omega_1 = e^{i\alpha}z$, rotacija za ugao α,
- $\omega_2 = |a|\omega_1$, homotetija sa faktorom $|a|$,
- $\omega = \omega_2 + b$, translacija za vektor b.

Oblik figure ostaje očuvan, pri homotetiji se menja veličina figure, ako je $|a| < 1$, smanjuje se, a za $|a| > 1$, povećava se.

Za $a = 1$, $z = \frac{b}{1-a}$ i $z = \infty$ su fiksne tačke linearnog preslikavanja $\omega = az + b$.

Neki primeri konformnih preslikavanja

1. Linearna funkcija $\omega = az + b$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$

Neka je $a = |a|e^{i\alpha}$. Preslikavanje $\omega = az + b$ je kompozicija tri preslikavanja:

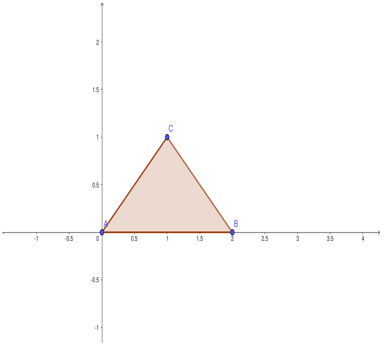
- $\omega_1 = e^{i\alpha}z$, rotacija za ugao α,
- $\omega_2 = |a|\omega_1$, homotetija sa faktorom $|a|$,
- $\omega = \omega_2 + b$, translacija za vektor b.

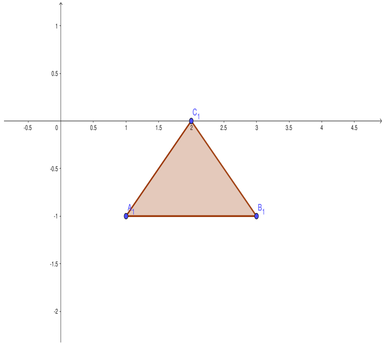
Oblik figure ostaje očuvan, pri homotetiji se menja veličina figure, ako je $|a| < 1$, smanjuje se, a za $|a| > 1$, povećava se.
Za $a = 1$, $z = \frac{b}{1-a}$ i $z = \infty$ su fiksne tačke linearnog preslikavanja $\omega = az + b$.

Primer

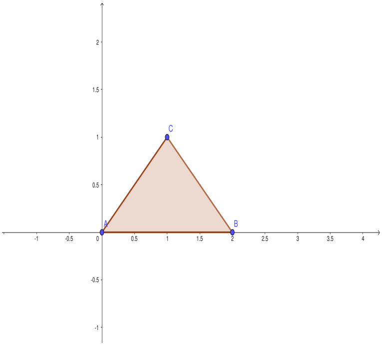
Trougao $\triangle ABC$, $A = 0$, $B = 2$, $C = 1 + i$ *preslikati sa*
1) $\omega_1 = z + (1 - i)$ *(translacija za vektor* $1 - i$*),*
2) $\omega_2 = e^{\frac{\pi}{2} i} z$ *(rotacija za ugao* $\frac{\pi}{2}$*),*
3) $\omega_3 = \frac{1}{2} z$ *(homotetija sa faktorom* $\frac{1}{2}$*),*
4) $\omega_4 = \frac{i}{2} z + 1 - i$.

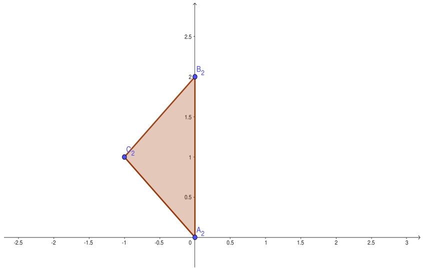
$\omega_1 = z + (1 - i)$, translacija



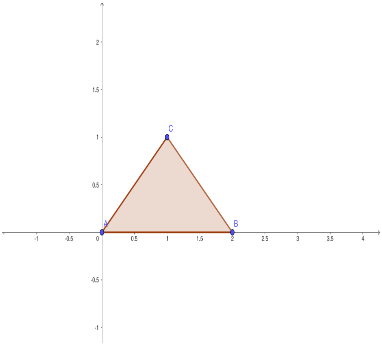


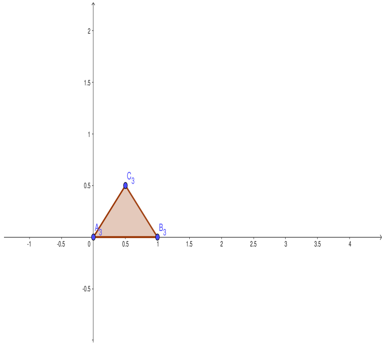
$\omega_2 = iz = e^{\frac{\pi}{2}i}z$, rotacija



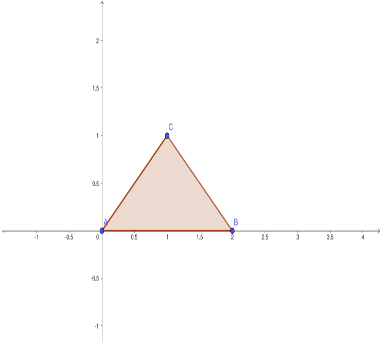


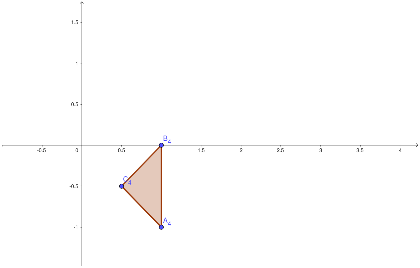
$\omega_3 = \frac{z}{2}$, homotetija





$\omega_4 = \frac{i}{2}z + 1 - i = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}z}{2} + (1 - i)$, linearno preslikavanje





2. Inverzija $\omega = \frac{1}{z}$

- Tačka $z = re^{i\varphi}$ preslikava se u $\omega = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$.
- Skup tačaka izvan jedničnog kruga $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ preslikava se u unutrašnjost jediničnog kruga $\{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| < 1\}$ i obrnuto.
- Kružnica $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ se preslikava u kružnicu $\{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| = 1\}$.
- Tačke 1 i -1 su fiksne tačke, ∞ se preslikava u 0, a 0 u ∞.
- Prava je kružnica sa beskonačnim radijusom.

Opšti oblik jednačine kružnice: $|z - a| = r$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.
Transformacijom dobijamo $(z - a)(\overline{z - a}) = r^2$, tj.
$z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2 - r^2 = 0$, odnosno
$Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
gde je $\alpha = -\overline{a}A$, $A = -\frac{\alpha}{\overline{a}}$, $A = -\frac{\overline{\alpha}}{a}$ i $B = A(|a|^2 - r^2)$.

2. Inverzija $\omega = \frac{1}{z}$

- Tačka $z = re^{i\varphi}$ preslikava se u $\omega = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$.
- Skup tačaka izvan jedničnog kruga $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1\}$ preslikava se u unutrašnjost jediničnog kruga $\{\omega \in \mathbb{C} \,|\, |\omega| < 1\}$ i obrnuto.
- Kružnica $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ se preslikava u kružnicu $\{\omega \in \mathbb{C} \,|\, |\omega| = 1\}$.
- Tačke 1 i -1 su fiksne tačke, ∞ se preslikava u 0, a 0 u ∞.
- Prava je kružnica sa beskonačnim radijusom.

Opšti oblik jednačine kružnice: $|z-a| = r$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.
Transformacijom dobijamo $(z-a)(\overline{z-a}) = r^2$, tj.
$z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2 - r^2 = 0$, odnosno
$Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
gde je $\alpha = -\overline{a}A$, $A = -\frac{\alpha}{\overline{a}}$, $A = -\frac{\overline{\alpha}}{a}$ i $B = A(|a|^2 - r^2)$.

Jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja kružnicu ili pravu u zavisnosti od A, B i α.

- Za $A \neq 0$ i $\alpha\overline{\alpha} - AB > 0$ to je kružnica sa centrom u a i poluprečnikom $r > 0$,

$$a = -\frac{\overline{\alpha}}{A}, \ r^2 = |a|^2 - \frac{B}{A} = \frac{A^2|a|^2 - AB}{A^2}, \ r = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 - AB}}{|A|}.$$

- Ako je $A = 0$, $\alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ je prava $px + qy + s = 0$, gde je $p = \mathrm{Re}\,\alpha$, $q = -\mathrm{Im}\,\alpha$, $s = \frac{B}{2}$.
- Dakle, jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja
  1) $A \neq 0, \ B \neq 0$, kružnicu koja ne sadrži 0,
  2) $A \neq 0, \ B = 0$, kružnicu koja sadrži 0,
  3) $A = 0, \ B \neq 0$, pravu koja ne sadrži 0,
  4) $A = 0, \ B = 0$, pravu koja sadrži 0.

Jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja kružnicu ili pravu u zavisnosti od A, B i α.

- Za $A \neq 0$ i $\alpha\overline{\alpha} - AB > 0$ to je kružnica sa centrom u a i poluprečnikom $r > 0$,

$$a = -\frac{\overline{\alpha}}{A}, \;\; r^2 = |a|^2 - \frac{B}{A} = \frac{A^2|a|^2 - AB}{A^2}, \;\; r = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 - AB}}{|A|}.$$

- Ako je $A = 0$, $\alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ je prava $px + qy + s = 0$, gde je $p = \operatorname{Re}\alpha$, $q = -\operatorname{Im}\alpha$, $s = \frac{B}{2}$.
- Dakle, jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja
  1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, kružnicu koja ne sadrži 0,
  2) $A \neq 0$, $B = 0$, kružnicu koja sadrži 0,
  3) $A = 0$, $B \neq 0$, pravu koja ne sadrži 0,
  4) $A = 0$, $B = 0$, pravu koja sadrži 0.

Jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja kružnicu ili pravu u zavisnosti od A, B i α.

- Za $A \neq 0$ i $\alpha\overline{\alpha} - AB > 0$ to je kružnica sa centrom u a i poluprečnikom $r > 0$,

$$a = -\frac{\overline{\alpha}}{A},\ r^2 = |a|^2 - \frac{B}{A} = \frac{A^2|a|^2 - AB}{A^2},\ r = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 - AB}}{|A|}.$$

- Ako je $A = 0$, $\alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ je prava $px + qy + s = 0$, gde je $p = \operatorname{Re}\alpha$, $q = -\operatorname{Im}\alpha$, $s = \frac{B}{2}$.
- Dakle, jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja
  1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, kružnicu koja ne sadrži 0,
  2) $A \neq 0$, $B = 0$, kružnicu koja sadrži 0,
  3) $A = 0$, $B \neq 0$, pravu koja ne sadrži 0,
  4) $A = 0$, $B = 0$, pravu koja sadrži 0.

Jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja kružnicu ili pravu u zavisnosti od A, B i α.

- Za $A \neq 0$ i $\alpha\overline{\alpha} - AB > 0$ to je kružnica sa centrom u a i poluprečnikom $r > 0$,

$$a = -\frac{\overline{\alpha}}{A}, \; r^2 = |a|^2 - \frac{B}{A} = \frac{A^2|a|^2 - AB}{A^2}, \; r = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 - AB}}{|A|}.$$

- Ako je $A = 0$, $\alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ je prava $px + qy + s = 0$, gde je $p = \operatorname{Re}\alpha$, $q = -\operatorname{Im}\alpha$, $s = \frac{B}{2}$.
- Dakle, jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ predstavlja
  1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, kružnicu koja ne sadrži 0,
  2) $A \neq 0$, $B = 0$, kružnicu koja sadrži 0,
  3) $A = 0$, $B \neq 0$, pravu koja ne sadrži 0,
  4) $A = 0$, $B = 0$, pravu koja sadrži 0.

Jednačina $Az\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + B = 0$ se uvođenjem $\omega = \frac{1}{z}$ transformiše u

$$\frac{A}{\omega\overline{\omega}} + \frac{\alpha}{\omega} + \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\omega}} + B = 0, \ \ tj.$$

$$B\omega\overline{\omega} + \overline{\alpha}\omega + \alpha\overline{\omega} + A = 0.$$

Primer

Preslikati inverzijom $\omega = f(z) = \frac{1}{z}$ *oblasti* $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ *i* $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| \leq 1\}$.

Rešenje:

$|z| = 1 \leftrightarrow z\overline{z} = 1 \leftrightarrow z\overline{z} - 1 = 0 \leftrightarrow \frac{1}{\omega\overline{\omega}} = 1 \leftrightarrow 1 - \omega\overline{\omega} = 0 \leftrightarrow |\omega| = 1.$ *Dakle,* $f(G_1) = \{\omega \in \mathbb{C} \,|\, |\omega| \geq 1\}$.

$|z-1| = 1 \leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = 1 \leftrightarrow z\overline{z} - z - \overline{z} = 0 \leftrightarrow 1 - \omega - \overline{\omega} = 0 \leftrightarrow \frac{\omega+\overline{\omega}}{2} = \frac{1}{2} \leftrightarrow \mathrm{Re}\,\omega = \frac{1}{2}.$ *Dakle,* $f(G_2) = \{\omega \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\omega \geq \frac{1}{2}\}$.

3. Bilinearno preslikavanje $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$

- Bilinearno preslikavanje obostrano jednoznačno i konformno preslikava $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.
- Svaka analitička funkcija koja obostrano jednoznačno i konformno slika $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ je bilinearno preslikavanje.
- Bilinearno preslikavanje možemo razložiti na tri preslikavanja:
  1) $\omega_1 = cz + d$, linearno preslikavanje,
  2) $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$, inverzija,
  3) $\omega = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\omega_2$, linearno preslikavanje.
- Bilinearnim preslikavanjem kružnice se preslikavaju u kružnice (prava je kružnica sa beskonačnim radijusom).
- Fiksne tačke (preslikavaju se u same sebe) zadovoljavaju jednačinu $z = \frac{az+b}{cz+d}$.

3. Bilinearno preslikavanje $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$

- Bilinearno preslikavanje obostrano jednoznačno i konformno preslikava $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.
- Svaka analitička funkcija koja obostrano jednoznačno i konformno slika $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ je bilinearno preslikavanje.
- Bilinearno preslikavanje možemo razložiti na tri preslikavanja:
  1) $\omega_1 = cz + d$, linearno preslikavanje,
  2) $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$, inverzija,
  3) $\omega = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\omega_2$, linearno preslikavanje.
- Bilinearnim preslikavanjem kružnice se preslikavaju u kružnice (prava je kružnica sa beskonačnim radijusom).
- Fiksne tačke (preslikavaju se u same sebe) zadovoljavaju jednačinu $z = \frac{az+b}{cz+d}$.

3. Bilinearno preslikavanje $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$

- Bilinearno preslikavanje obostrano jednoznačno i konformno preslikava $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.
- Svaka analitička funkcija koja obostrano jednoznačno i konformno slika $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ je bilinearno preslikavanje.
- Bilinearno preslikavanje možemo razložiti na tri preslikavanja:
  1) $\omega_1 = cz + d$, linearno preslikavanje,
  2) $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$, inverzija,
  3) $\omega = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\omega_2$, linearno preslikavanje.
- Bilinearnim preslikavanjem kružnice se preslikavaju u kružnice (prava je kružnica sa beskonačnim radijusom).
- Fiksne tačke (preslikavaju se u same sebe) zadovoljavaju jednačinu $z = \frac{az+b}{cz+d}$.

3. Bilinearno preslikavanje $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$

- Bilinearno preslikavanje obostrano jednoznačno i konformno preslikava $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.
- Svaka analitička funkcija koja obostrano jednoznačno i konformno slika $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ je bilinearno preslikavanje.
- Bilinearno preslikavanje možemo razložiti na tri preslikavanja:
  1) $\omega_1 = cz + d$, linearno preslikavanje,
  2) $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$, inverzija,
  3) $\omega = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\omega_2$, linearno preslikavanje.
- Bilinearnim preslikavanjem kružnice se preslikavaju u kružnice (prava je kružnica sa beskonačnim radijusom).
- Fiksne tačke (preslikavaju se u same sebe) zadovoljavaju jednačinu $z = \frac{az+b}{cz+d}$.

3. Bilinearno preslikavanje $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$

- Bilinearno preslikavanje obostrano jednoznačno i konformno preslikava $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.
- Svaka analitička funkcija koja obostrano jednoznačno i konformno slika $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$ je bilinearno preslikavanje.
- Bilinearno preslikavanje možemo razložiti na tri preslikavanja:
  1) $\omega_1 = cz + d$, linearno preslikavanje,
  2) $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$, inverzija,
  3) $\omega = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\omega_2$, linearno preslikavanje.
- Bilinearnim preslikavanjem kružnice se preslikavaju u kružnice (prava je kružnica sa beskonačnim radijusom).
- Fiksne tačke (preslikavaju se u same sebe) zadovoljavaju jednačinu $z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Primer

Bilinearnim preslikavanjem $\omega = f(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$ *preslikati oblast* $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$.

Rešenje:

1) $\omega_1 = z - 1$ *(translacija za -1),*
2) $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$ *(inverzija),*
3) $\omega_3 = 2\omega_2$ *(homotetija sa faktorom 2),*
4) $\omega = 1 + \omega_3$ *(translacija za 1).*
Dakle, $f(G) = \{\omega \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, \omega \leq 0,\ \mathrm{Im}\, \omega \leq 0\}$.

4. Eksponencijalno preslikavanje $\omega = e^z$

Oblast u z-ravni u obliku beskonačne horizontalne pruge širine 2π, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} | \, a \le \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$, $a \in \mathbb{R}$, preslikava se u celu ω-ravan bez 0. Npr. $\{z \in \mathbb{C} | \, 0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, gde je $z = x + iy$, $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < 2\pi$, se preslikavanjem $\omega = e^z = e^x e^{iy}$ slika na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, jer je $0 \le \arg(\omega) < 2\pi$ i $0 < |\omega| < +\infty$.

- Preslikavanje Žukovskog $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \ne 0$, konformno je u svim tačkama, osim $z = 1$ i $z = -1$. Ekvivalentni oblici su
  1) $\frac{\omega-1}{\omega+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$,
  2) $z = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$,
  3) $\operatorname{Re} \omega = \frac{1}{2}\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right) \cos\varphi$, $\operatorname{Im} \omega = \frac{1}{2}\left(|z| - \frac{1}{|z|}\right) \sin\varphi$, $\varphi = \arg(z)$.
- I spoljašnjost i unutrašnjost jedinične kružnice preslikavanjem Žukovskog slikaju se u celu ω-ravan iz koje je izbačena duž $\operatorname{Im} \omega = 0$, $-1 \le \operatorname{Re} \omega \le 1$, u koju se preslikava jedinična kružnica $|z| = 1$.

4. Eksponencijalno preslikavanje $\omega = e^z$

Oblast u z-ravni u obliku beskonačne horizontalne pruge širine 2π, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} | \, a \leq \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$, $a \in \mathbb{R}$, preslikava se u celu ω-ravan bez 0. Npr. $\{z \in \mathbb{C} | \, 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, gde je $z = x + iy$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < 2\pi$, se preslikavanjem $\omega = e^z = e^x e^{iy}$ slika na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, jer je $0 \leq \arg(\omega) < 2\pi$ i $0 < |\omega| < +\infty$.

- Preslikavanje Žukovskog $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$, konformno je u svim tačkama, osim $z = 1$ i $z = -1$. Ekvivalentni oblici su
  1) $\frac{\omega-1}{\omega+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$,
  2) $z = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$,
  3) $\operatorname{Re} \omega = \frac{1}{2}\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right) \cos \varphi$, $\operatorname{Im} \omega = \frac{1}{2}\left(|z| - \frac{1}{|z|}\right) \sin \varphi$, $\varphi = \arg(z)$.
- I spoljašnjost i unutrašnjost jedinične kružnice preslikavanjem Žukovskog slikaju se u celu ω-ravan iz koje je izbačena duž $\operatorname{Im} \omega = 0$, $-1 \leq \operatorname{Re} \omega \leq 1$, u koju se preslikava jedinična kružnica $|z| = 1$.

4. Eksponencijalno preslikavanje $\omega = e^z$

Oblast u z-ravni u obliku beskonačne horizontalne pruge širine 2π, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} |\, a \le \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$, $a \in \mathbb{R}$, preslikava se u celu ω-ravan bez 0. Npr. $\{z \in \mathbb{C} |\, 0 \le \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, gde je $z = x + iy$, $-\infty < x < \infty$, $0 \le y < 2\pi$, se preslikavanjem $\omega = e^z = e^x e^{iy}$ slika na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, jer je $0 \le \arg(\omega) < 2\pi$ i $0 < |\omega| < +\infty$.

- Preslikavanje Žukovskog $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$, konformno je u svim tačkama, osim $z = 1$ i $z = -1$. Ekvivalentni oblici su
  1) $\frac{\omega-1}{\omega+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$,
  2) $z = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$,
  3) $\operatorname{Re} \omega = \frac{1}{2}\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right)\cos\varphi$, $\operatorname{Im} \omega = \frac{1}{2}\left(|z| - \frac{1}{|z|}\right)\sin\varphi$, $\varphi = \arg(z)$.
- I spoljašnjost i unutrašnjost jedinične kružnice preslikavanjem Žukovskog slikaju se u celu ω-ravan iz koje je izbačena duž $\operatorname{Im} \omega = 0$, $-1 \le \operatorname{Re} \omega \le 1$, u koju se preslikava jedinična kružnica $|z| = 1$.

4. Eksponencijalno preslikavanje $\omega = e^z$

Oblast u z-ravni u obliku beskonačne horizontalne pruge širine 2π, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} |\, a \leq \mathrm{Im}\, z < a + 2\pi\}$, $a \in \mathbb{R}$, preslikava se u celu ω-ravan bez 0. Npr. $\{z \in \mathbb{C} |\, 0 \leq \mathrm{Im}\, z < 2\pi\}$, gde je $z = x + iy$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < 2\pi$, se preslikavanjem $\omega = e^z = e^x e^{iy}$ slika na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, jer je $0 \leq \arg(\omega) < 2\pi$ i $0 < |\omega| < +\infty$.

- Preslikavanje Žukovskog $\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$, konformno je u svim tačkama, osim $z = 1$ i $z = -1$. Ekvivalentni oblici su

  1) $\frac{\omega-1}{\omega+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$,

  2) $z = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$,

  3) $\mathrm{Re}\, \omega = \frac{1}{2}\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right) \cos\varphi$, $\mathrm{Im}\, \omega = \frac{1}{2}\left(|z| - \frac{1}{|z|}\right) \sin\varphi$, $\varphi = \arg(z)$.

- I spoljašnjost i unutrašnjost jedinične kružnice preslikavanjem Žukovskog slikaju se u celu ω-ravan iz koje je izbačena duž $\mathrm{Im}\, \omega = 0$, $-1 \leq \mathrm{Re}\, \omega \leq 1$, u koju se preslikava jedinična kružnica $|z| = 1$.

Primer

Funkcijom $\omega = f(z) = e^{\frac{\pi i}{(z-2i)^2+1}}$ *preslikati oblast*
$G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2i| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 2,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

Rešenje:

1) $\omega_1 = z - 2i$ *(*$\{\omega_1 \in \mathbb{C} \,|\, |\omega_1| < 1,\ \mathrm{Im}\, \omega_1 > 0,\ \mathrm{Re}\, \omega_1 > 0\}$*),*
2) $\omega_2 = (\omega_1)^2$ *(*$\{\omega_2 \in \mathbb{C} \,|\, |\omega_2| < 1,\ 0 < \arg \omega_2 < \pi\}$*),*
3) $\omega_3 = \omega_2 + 1$ *(*$\{\omega_3 \in \mathbb{C} \,|\, |\omega_3 - 1| < 1,\ \mathrm{Im}\, \omega_3 > 0,\ \mathrm{Re}\, \omega_3 > 0\}$*),*
4) $\omega_4 = \frac{1}{\omega_3}$ *(*$\{\omega_4 \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, \omega_4 < 0,\ \mathrm{Re}\, \omega_4 > \frac{1}{2}\}$*),*
5) $\omega_5 = i\omega_4$ *(*$\{\omega_5 \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, \omega_5 > \frac{1}{2},\ \mathrm{Re}\, \omega_5 > 0\}$*),*
6) $\omega_6 = \pi\omega_5$ *(*$\{\omega_6 \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, \omega_6 > \frac{\pi}{2},\ \mathrm{Re}\, \omega_6 > 0\}$*),*
7) $\omega = e^{\omega_5}$ *(*$f(G) = \{\omega \in \mathbb{C} \,|\, |\omega| > 1\}$*).*

$G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2i| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 2,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $f(G) = \{\omega \in \mathbb{C} \,|\ |\omega| > 1\}$