

Integral kompleksne funkcije. Red Tejlora

PREDAVANJA 11

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, decembar 2024

Definicija i osobine integrala

Neka je f jednoznačno definisana i neprekidna funkcija nad putanjom L čija je početna tačka a i krajnja b . Krivu L podelimo na n delova izabranim tačkama $a = z_0, z_1, \dots, z_n = b$ u smeru od a ka b . Ako je L zatvorena putanja, pozitivan smer je suprotan od kretanja kazaljke na satu. Označimo $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Proizvoljno izaberimo tačke ξ_k između z_{k-1} i z_k , $k = 1, \dots, n$ i formiramo **integralnu sumu** $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$. Ako postoji uvek ista (jedinstvena) granična vrednost

$$\lim_{\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k,$$

nazavisno od izbora tačaka z_k i ξ_k , tada tu graničnu vrednost nazivamo **integral** funkcije f duž krive L i označavamo $\int_L f(z) dz$. Ako je L zatvorena putanja, koristimo oznaku $\oint_L f(z) dz$.

Osobine integrala

Za $z = x + iy$, $dz = dx + idy$ i $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, važi

$$\int_L f(z)dz = \int_L P(x, y)dx - Q(x, y)dy + i \int_L Q(x, y)dx + P(x, y)dy.$$

Osobine integrala:

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, važi

$$\int_L (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_L f(z) dz + \beta \int_L g(z) dz.$$

2) Ako je $-L$ putanja određena istim skupom tačaka kao i L , a suprotno orijentisana u odnosu na L , tada važi

$$\int_L f(z) dz = - \int_{-L} f(z) dz.$$

Osobine integrala

Za $z = x + iy$, $dz = dx + idy$ i $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, važi

$$\int_L f(z)dz = \int_L P(x, y)dx - Q(x, y)dy + i \int_L Q(x, y)dx + P(x, y)dy.$$

Osobine integrala:

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, važi

$$\int_L (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_L f(z) dz + \beta \int_L g(z) dz.$$

2) Ako je $-L$ putanja određena istim skupom tačaka kao i L , a suprotno orijentisana u odnosu na L , tada važi

$$\int_L f(z) dz = - \int_{-L} f(z) dz.$$

Osobine integrala

Za $z = x + iy$, $dz = dx + idy$ i $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, važi

$$\int_L f(z)dz = \int_L P(x, y)dx - Q(x, y)dy + i \int_L Q(x, y)dx + P(x, y)dy.$$

Osobine integrala:

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, važi

$$\int_L (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_L f(z) dz + \beta \int_L g(z) dz.$$

2) Ako je $-L$ putanja određena istim skupom tačaka kao i L , a suprotno orijentisana u odnosu na L , tada važi

$$\int_L f(z) dz = - \int_{-L} f(z) dz.$$

Osobine integrala

3) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i putanje L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz.$$

4) Ako je $|f(z)| \leq M$, za sve $z \in L$, i ΔL dužina krive L , tada važi

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq M \Delta L.$$

5) Ako je $L : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, tada važi

$$\int_L f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt,$$

gde je $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Osobine integrala

3) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i putanje L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz.$$

4) Ako je $|f(z)| \leq M$, za sve $z \in L$, i ΔL dužina krive L , tada važi

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq M \Delta L.$$

5) Ako je $L : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, tada važi

$$\int_L f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt,$$

gde je $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Osobine integrala

3) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i putanje L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz.$$

4) Ako je $|f(z)| \leq M$, za sve $z \in L$, i ΔL dužina krive L , tada važi

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq M \Delta L.$$

5) Ako je $L : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, tada važi

$$\boxed{\int_L f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt,}$$

gde je $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Primer

Izračunati $I = \int_L \bar{z} dz$ od tačke $z = 0$ do tačke $z = 4 + 2i$

a) duž putanje $L : z(t) = t^2 + it, t \in \overrightarrow{[0, 2]}$,

b) duž putanje $L = L_1 + L_2$, gde je L_1 duž od $z = 0$ do $z = 2i$, a L_2 je duž od $z = 2i$ do $z = 4 + 2i$.

Rešenje:

$$a) I = \int_L \bar{z} dz = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i) dt = \left(2\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 - i \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = 10 - \frac{8}{3}i.$$

$$b) L_1 : z(t) = ti, t \in \overrightarrow{[0, 2]}, L_2 : z(t) = t + 2i, t \in \overrightarrow{[0, 4]},$$

$$I = \int_{L_1} \bar{z} dz + \int_{L_2} \bar{z} dz = \int_0^2 (-it) i dt + \int_0^4 (t - 2i) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{t^2}{2} - 2it \right) \Big|_0^4 = 10 - 8i.$$

Primer

Izračunati $I = \int_L \bar{z} dz$ od tačke $z = 0$ do tačke $z = 4 + 2i$

a) duž putanje $L : z(t) = t^2 + it, t \in \overrightarrow{[0, 2]}$,

b) duž putanje $L = L_1 + L_2$, gde je L_1 duž od $z = 0$ do $z = 2i$, a L_2 je duž od $z = 2i$ do $z = 4 + 2i$.

Rešenje:

$$a) I = \int_L \bar{z} dz = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i) dt = \left(2\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2 - i \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = 10 - \frac{8}{3}i.$$

$$b) L_1 : z(t) = ti, t \in \overrightarrow{[0, 2]}, L_2 : z(t) = t + 2i, t \in \overrightarrow{[0, 4]},$$

$$I = \int_{L_1} \bar{z} dz + \int_{L_2} \bar{z} dz = \int_0^2 (-it) i dt + \int_0^4 (t - 2i) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{t^2}{2} - 2it \right) \Big|_0^4 = 10 - 8i.$$

Košijeva teorema i njene posledice

Teorema

(Košijeva teorema) Neka je f analitička funkcija definisana na jednostruko povezanoj oblasti G , a L zatvorena putanja koja sa svojom unutrašnjošću $\text{int} L = D$ pripada G . Tada je

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Dokaz: Kako je funkcija f analitička funkcija, $f'(z)$ je neprekidna funkcija na L , te su P_x , P_y , Q_x i Q_y neprekidni na L i važe Koši-Rimanovi uslovi.

$$\oint_L f(z) dz = \oint_L P dx - Q dy + i \oint_L Q dx + P dy = \iint_D (-Q_x - P_y) dx dy + i \iint_D (P_x - Q_y) dx dy = 0 + i0 = 0. \quad \square$$

Košijeva teorema i njene posledice

Teorema

(Košijeva teorema) Neka je f analitička funkcija definisana na jednostruko povezanoj oblasti G , a L zatvorena putanja koja sa svojom unutrašnjošću $\text{int} L = D$ pripada G . Tada je

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Dokaz: Kako je funkcija f analitička funkcija, $f'(z)$ je neprekidna funkcija na L , te su P_x , P_y , Q_x i Q_y neprekidni na L i važe Koši-Rimanovi uslovi.

$$\begin{aligned} \oint_L f(z) dz &= \oint_L P dx - Q dy + i \oint_L Q dx + P dy = \\ \iint_D (-Q_x - P_y) dx dy + i \iint_D (P_x - Q_y) dx dy &= 0 + i0 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **primitivna funkcija** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f , tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija na D . Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D .
- Osnovna formula integralnog računa

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **primitivna funkcija** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f , tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija na D . Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D .
- Osnovna formula integralnog računa

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **primitivna funkcija** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f , tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija na D . Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D .
- Osnovna formula integralnog računa
 $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **primitivna funkcija** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f , tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija na D . Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D .
- Osnovna formula integralnog računa

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **primitivna funkcija** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f , tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija na D . Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D .
- Osnovna formula integralnog računa

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **primitivna funkcija** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f , tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija na D . Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^z f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D .
- Osnovna formula integralnog računa

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

- Neka su L i L_1 zatvorene putanje takve da L_1 leži u unutrašnjosti L , tj. $L_1 \subset \text{int } L$, i neka je f analitička na L , L_1 i na $\text{int } L \setminus \text{int } L_1$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$$

Dokaz: Neka je $T = L + AB + (-L_1) + BA$ pozitivno orijentisana zatvorena putanja. Na osnovu Košijeve teoreme važi $\oint_T f(z)dz = 0$, tj.

$$\oint_L f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{-L_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0.$$

Dakle, $\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz$.

- Neka su $L_1, \dots, L_n$ zatvorene putanje koje leže u unutrašnjosti L , tj. $L_k \subset \text{int } L$, $k \in \{1, \dots, n\}$, i za sve $k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq m$, $\text{int } L_m \cap \text{int } L_k = \emptyset$, i neka je f analitička na L , $L_1, \dots, L_n$ i na $\text{int } L \setminus \bigcup_{k=1}^n \text{int } L_k$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \dots + \oint_{L_n} f(z)dz.$$

- Neka su L i L_1 zatvorene putanje takve da L_1 leži u unutrašnjosti L , tj. $L_1 \subset \text{int } L$, i neka je f analitička na L , L_1 i na $\text{int } L \setminus \text{int } L_1$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$$

Dokaz: Neka je $T = L + AB + (-L_1) + BA$ pozitivno orijentisana zatvorena putanja. Na osnovu Košijeve teoreme važi $\oint_T f(z)dz = 0$, tj.

$$\oint_L f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{-L_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0.$$

Dakle, $\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz$.

- Neka su $L_1, \dots, L_n$ zatvorene putanje koje leže u unutrašnjosti L , tj. $L_k \subset \text{int } L$, $k \in \{1, \dots, n\}$, i za sve $k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq m$, $\text{int } L_m \cap \text{int } L_k = \emptyset$, i neka je f analitička na L , $L_1, \dots, L_n$ i na $\text{int } L \setminus \bigcup_{k=1}^n \text{int } L_k$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \dots + \oint_{L_n} f(z)dz.$$

- Neka su L i L_1 zatvorene putanje takve da L_1 leži u unutrašnjosti L , tj. $L_1 \subset \text{int } L$, i neka je f analitička na L , L_1 i na $\text{int } L \setminus \text{int } L_1$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$$

Dokaz: Neka je $T = L + AB + (-L_1) + BA$ pozitivno orijentisana zatvorena putanja. Na osnovu Košijeve teoreme važi $\oint_T f(z)dz = 0$, tj.

$$\oint_L f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{-L_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0.$$

Dakle, $\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz$.

- Neka su $L_1, \dots, L_n$ zatvorene putanje koje leže u unutrašnjosti L , tj. $L_k \subset \text{int } L$, $k \in \{1, \dots, n\}$, i za sve $k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq m$, $\text{int } L_m \cap \text{int } L_k = \emptyset$, i neka je f analitička na L , $L_1, \dots, L_n$ i na $\text{int } L \setminus \bigcup_{k=1}^n \text{int } L_k$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \dots + \oint_{L_n} f(z)dz.$$

Primer

Izračunati $I = \oint_L \frac{dz}{z-\alpha}$, ako je

a) $\alpha \in \text{ext } L$, b) $\alpha \in \text{int } L$.

Rešenje:

a) Funkcija $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ je analitička na L i $\text{int } L$, te je $I = 0$.

b) $I = \oint_\gamma \frac{dz}{z-\alpha}$, gde je $\gamma \subset \text{int } L$, $\gamma: z-\alpha = \epsilon e^{ti}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\epsilon > 0$.

Dakle, $I = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{ti}}{\epsilon e^{ti}} dt = ti \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(a,b)} (3z^2 - 2iz) dz$, ako je $a = 1 + i$ i $b = 2 + 3i$.

Rešenje:

Kako je $F(z) = \int_0^z (3\omega^2 - 2i\omega) d\omega = z^3 - iz^2$, traženi integral je

$$\begin{aligned} I &= \int_{1+i}^{2+3i} (3z^2 - 2iz) dz = F(2+3i) - F(1+i) \\ &= (2+3i)^3 - i(2+3i)^2 - (1+i)^3 + i(1+i)^2 = 34 + 12i. \end{aligned}$$

Primer

Izračunati $I = \oint_L \frac{dz}{z-\alpha}$, ako je

a) $\alpha \in \text{ext } L$, b) $\alpha \in \text{int } L$.

Rešenje:

a) Funkcija $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ je analitička na L i $\text{int } L$, te je $I = 0$.

b) $I = \oint_\gamma \frac{dz}{z-\alpha}$, gde je $\gamma \subset \text{int } L$, $\gamma: z-\alpha = \epsilon e^{ti}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\epsilon > 0$.

Dakle, $I = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{ti}}{\epsilon e^{ti}} dt = ti \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(a,b)} (3z^2 - 2iz) dz$, ako je $a = 1 + i$ i $b = 2 + 3i$.

Rešenje:

Kako je $F(z) = \int_0^z (3\omega^2 - 2i\omega) d\omega = z^3 - iz^2$, traženi integral je

$$\begin{aligned} I &= \int_{1+i}^{2+3i} (3z^2 - 2iz) dz = F(2+3i) - F(1+i) \\ &= (2+3i)^3 - i(2+3i)^2 - (1+i)^3 + i(1+i)^2 = 34 + 12i. \end{aligned}$$

Košijeve integralne formule

Teorema

(Košijeve integralne formule) Neka je f analitička funkcija na jednostruko povezanoj oblasti G i neka je L zatvorena, pozitivno orijentisana putanja koja zajedno sa svojom unutrašnošću $\text{int } L = D$ pripada oblasti G . Tada, za sve $a \in D$ i $n \in \mathbb{N}$, važi

$$\begin{aligned}f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz, \\f^{(n)}(a) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.\end{aligned}$$

Dokaz: Funkcija $f(z) = \frac{1}{z-a}$ je analitička na $D \setminus \{a\}$.

Neka je $\gamma \subset \text{int } L$ pozitivno orijentisana putanja, $\gamma : z - a = \epsilon e^{ti}$, $t \in \overline{[0, 2\pi]}$, $\epsilon > 0$. Kako je $dz = \epsilon i e^{it} dt$, dobijamo

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz &= \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\epsilon e^{ti} + a)}{\epsilon e^{ti}} \epsilon i e^{ti} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(\epsilon e^{ti} + a) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(\epsilon e^{ti} + a) dt &= i \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon e^{ti} + a) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a) dt = f(a) 2\pi i. \end{aligned}$$

Dakle, $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz$. Slično se pokazuje i druga formula $\square$
Ako f ima prvi izvod na D , ona ima i sve izvode višeg reda na D .

Primer

Ako je $L : |z| = 2$, naći a) $\oint_L \frac{2 \sin z}{(z-1)(z+1)} dz$, b) $\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$.

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{2 \sin z}{(z-1)(z+1)} dz &= \oint_L \frac{\sin z}{z-1} dz - \oint_L \frac{\sin z}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \sin 1 - 2\pi i \sin(-1) = 4\pi i \sin 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} (e^{2z})''' \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{8}{3} \pi i e^{-2}. \end{aligned}$$

Primer

Ako je $L : |z| = 2$, naći a) $\oint_L \frac{2 \sin z}{(z-1)(z+1)} dz$, b) $\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$.

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{2 \sin z}{(z-1)(z+1)} dz &= \oint_L \frac{\sin z}{z-1} dz - \oint_L \frac{\sin z}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \sin 1 - 2\pi i \sin(-1) = 4\pi i \sin 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} (e^{2z})''' \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{8}{3} \pi i e^{-2}. \end{aligned}$$

Primer

Ako je $L : |z| = 2$, naći a) $\oint_L \frac{2 \sin z}{(z-1)(z+1)} dz$, b) $\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$.

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{2 \sin z}{(z-1)(z+1)} dz &= \oint_L \frac{\sin z}{z-1} dz - \oint_L \frac{\sin z}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \sin 1 - 2\pi i \sin(-1) = 4\pi i \sin 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} (e^{2z})''' \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{8}{3} \pi i e^{-2}. \end{aligned}$$

Red Tejlora

Teorema

(Tejlorova teorema) Neka je f analitička funkcija na kružnici $K : |z - \alpha| = r$ i u unutrašnjosti kružnice $\text{int } K$. Tada, za svako $z \in \text{int } K$, važi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

gde je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Dokaz: Za svako $z \in \text{int } K$, važi $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$.

Kako je $\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega - \alpha - (z - \alpha)} = \frac{1}{\omega - \alpha} \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\omega - \alpha}}$, a iz uslova $z \in \text{int } K$ i

$\omega \in K$, sledi $|z - \alpha| < |\omega - \alpha|$, dobijamo $\frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\omega - \alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{\omega - \alpha} \right)^n$.

Za fiksirano $z \in \text{int } K$, red $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{\omega - \alpha} \right)^n$ konvergira uniformno na K

(jer brojni red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, za $q = \frac{|z - \alpha|}{r} < 1$, konvergira), te je

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \left(\frac{f(\omega)}{\omega - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^n}{(\omega - \alpha)^n} \right) d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega - \alpha)^{n+1}} \right) (z - \alpha)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n. \quad \square \end{aligned}$$

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, za $|z - \alpha| < r$, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ **Tejlorov razvoj** ili **Tejlorov red** funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α . Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α , poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α . Broj r je **poluprečnik konvergencije**.
- Na kružnici $|z - \alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z - \alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularitet funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se **Maklorenov razvoj** funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, za $|z - \alpha| < r$, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ **Tejlorov razvoj** ili **Tejlorov red** funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α . Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α , poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α . Broj r je **poluprečnik konvergencije**.
- Na kružnici $|z - \alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z - \alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularitet funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se **Maklorenov razvoj** funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, za $|z - \alpha| < r$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$$
 Tejlorov razvoj ili Tejlorov red funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α . Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α , poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α . Broj r je poluprečnik konvergencije.
- Na kružnici $|z - \alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z - \alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularitet funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se Maklorenov razvoj funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, za $|z - \alpha| < r$, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ **Tejlorov razvoj** ili **Tejlorov red** funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α . Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α , poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α . Broj r je **poluprečnik konvergencije**.
- Na kružnici $|z - \alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z - \alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularitet funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se **Maklorenov razvoj** funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, za $|z - \alpha| < r$, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ **Tejlorov razvoj** ili **Tejlorov red** funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α . Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α , poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α . Broj r je **poluprečnik konvergencije**.
- Na kružnici $|z - \alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z - \alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularitet funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se **Maklorenov razvoj** funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, za $|z - \alpha| < r$, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$ **Tejlorov razvoj** ili **Tejlorov red** funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α . Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α , poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α . Broj r je **poluprečnik konvergencije**.
- Na kružnici $|z - \alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z - \alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularitet funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se **Maklorenov razvoj** funkcije f (isti kao u realnoj analizi).