

Kompleksni brojevi

Predavanje 1

Algebarski oblik kompleksnog broja

Algebarski oblik kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + yi$,
gde je $x, y \in \mathbb{R}$, a i je **imaginarna jedinica** za koju važi:

$$i^2 = -1.$$

Ako je $z = x + yi$, tada je x **realni deo** kompleksnog broja z , što označavamo $Re(z) = x$, a y je **imaginarni deo** kompleksnog broja z , u oznaci $Im(z) = y$.

Na osnovu definicije imaginarne jedinice, za $k \in \mathbb{Z}$ sledi

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Dva kompleksna broja z_1 i z_2 su **jednaka** ako i samo ako je $Re(z_1) = Re(z_2)$ i $Im(z_1) = Im(z_2)$.

Kompleksan broj $\bar{z} = x - yi$ je **konjugovan** kompleksnom broju $z = x + yi$.
Primetimo da važi

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \bar{\bar{z}} = z.$$

Algebarski oblik kompleksnog broja

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je **moduo (modul)** kompleksnog broja z .

Za svaki kompleksni broj z važi

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje kompleksnih brojeva u algebarskom obliku:

Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dati u algebarskom obliku $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$.

Tada je

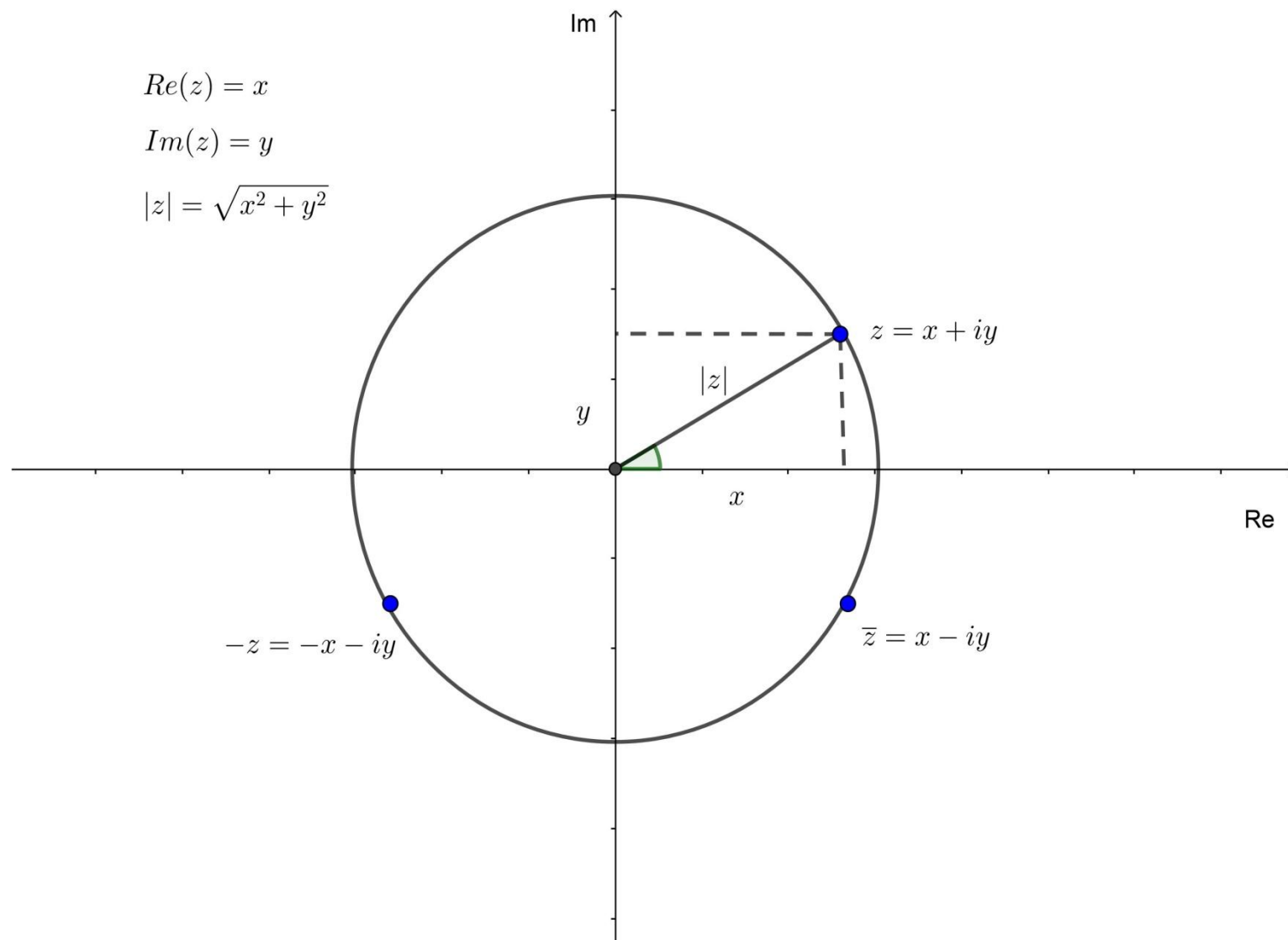
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + (y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Kompleksna ravan



Primeri

Primer 1

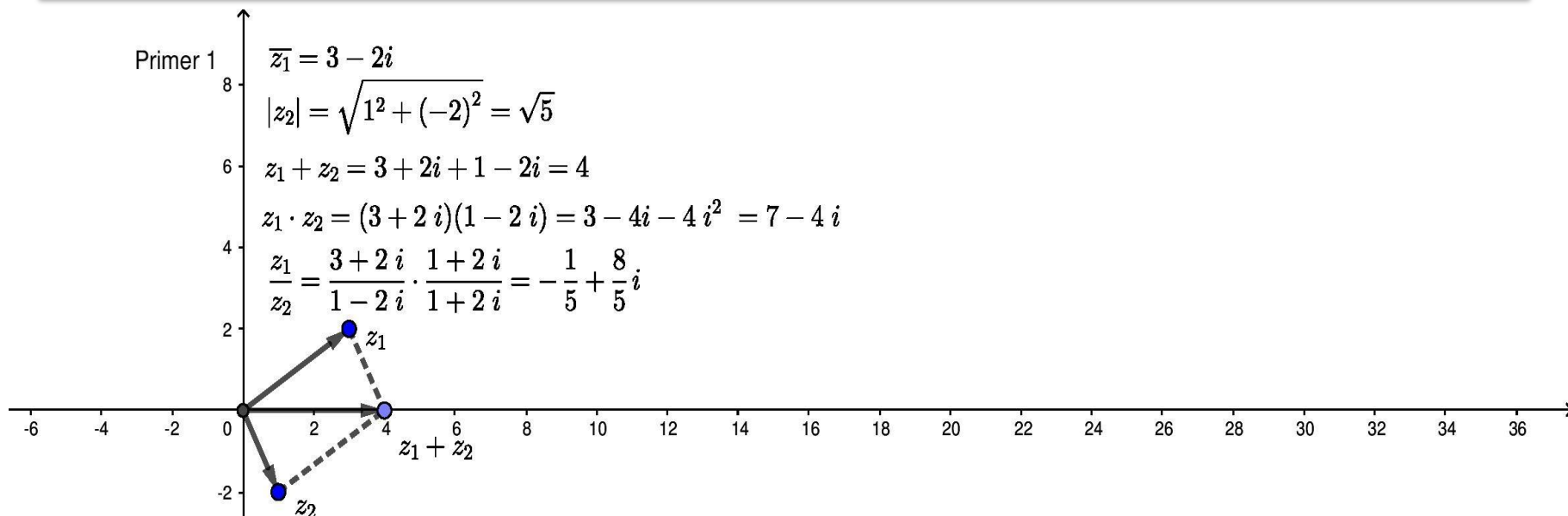
$$\overline{z_1} = 3 - 2i$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i + 1 - 2i = 4$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(1 - 2i) = 3 - 4i - 4i^2 = 7 - 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$



Primer 2

$$\sqrt{3 + 4i} = x + yi \quad /^2$$

$$3 + 4i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$3 = x^2 - y^2 \wedge 4 = 2xy$$

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow 3 = x^2 - \frac{4}{x^2} \quad / \cdot x^2 \neq 0$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \text{ smena } x^2 = t$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$t = -1 \vee \underline{t = 4}$$

$$t = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow y = \pm 1$$

$$\underline{z_1 = 2 + i}, \underline{z_2 = -2 - i}$$

Primeri

Primer 3 **Izračunati** $(1-i)^{100}$.

Rešenje:

$$(1-i)^{100} = ((1-i)^2)^{50} = (1-2i+i^2)^{50} = (-2i)^{50} = (-1)^{50} 2^{50} i^{4 \cdot 12 + 2} = -2^{50}.$$

Primer 4 **Odrediti kompleksan broj z koji se nalazi u prvom kvadrantu i zadovoljava uslove $|z| = 5$ i $Im(z) = Re(z) - 1$.**

Rešenje:

Neka je traženi kompleksni broj z oblika $z = x + yi$. Iz uslova zadatka dobijamo dve jednačine

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5, \quad y = x - 1.$$

Kvadriranjem prve jednačine i zamenom y iz druge jednačine, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$x^2 + (x - 1)^2 = 25,$$

čija su rešenja $x = 4$ i $x = -3$. Po uslovu zadatka, traženi broj se nalazi u prvom kvadrantu, tako da je $x = 4$, tj. $z = 4 + 3i$.