Brojni redovi

PREDAVANJA 1 i 2

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, oktobar 2024

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Rastojanje između $x, y \in \mathbb{R}$, je dato sa $d(x, y) = |x - y|$, gde $|\cdot|$ označava apsolutnu vrednost. Rastojanje između $z, w \in \mathbb{C}$ sa $d(z, w) = |z - w|$, gde $|\cdot|$ označava modul.
- Brojni niz je preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, dato sa $a(n) := a_n$, $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ (a je granična vrednost niza $\{a_n\}$) ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a, a_k) = |a - a_k| < \epsilon$, što zapisujemo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ je Košijev ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a_{k+p}, a_k) = |a_{k+p} - a_k| < \epsilon$.
- U $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ brojni niz $\{a_n\}$ je konvergentan akko je $\{a_n\}$ Košijev niz.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Rastojanje između $x, y \in \mathbb{R}$, je dato sa $d(x,y) = |x-y|$, gde $|\cdot|$ označava apsolutnu vrednost. Rastojanje između $z, w \in \mathbb{C}$ sa $d(z,w) = |z-w|$, gde $|\cdot|$ označava modul.
- Brojni niz je preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, dato sa $a(n) := a_n$, $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ (a je granična vrednost niza $\{a_n\}$) ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a, a_k) = |a - a_k| < \epsilon$, što zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ je Košijev ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a_{k+p}, a_k) = |a_{k+p} - a_k| < \epsilon$.
- U $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ brojni niz $\{a_n\}$ je konvergentan akko je $\{a_n\}$ Košijev niz.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Rastojanje između $x, y \in \mathbb{R}$, je dato sa $d(x, y) = |x - y|$, gde $|\cdot|$ označava apsolutnu vrednost. Rastojanje između $z, w \in \mathbb{C}$ sa $d(z, w) = |z - w|$, gde $|\cdot|$ označava modul.
- Brojni niz je preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, dato sa $a(n) := a_n$, $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ (a je granična vrednost niza $\{a_n\}$) ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a, a_k) = |a - a_k| < \epsilon$, što zapisujemo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ je Košijev ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a_{k+p}, a_k) = |a_{k+p} - a_k| < \epsilon$.
- U $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ brojni niz $\{a_n\}$ je konvergentan akko je $\{a_n\}$ Košijev niz.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Rastojanje između $x, y \in \mathbb{R}$, je dato sa $d(x, y) = |x - y|$, gde $|\cdot|$ označava apsolutnu vrednost. Rastojanje između $z, w \in \mathbb{C}$ sa $d(z, w) = |z - w|$, gde $|\cdot|$ označava modul.
- Brojni niz je preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, dato sa $a(n) := a_n$, $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ (a je granična vrednost niza $\{a_n\}$) ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a, a_k) = |a - a_k| < \epsilon$, što zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ je Košijev ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a_{k+p}, a_k) = |a_{k+p} - a_k| < \epsilon$.
- U $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ brojni niz $\{a_n\}$ je konvergentan akko je $\{a_n\}$ Košijev niz.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Rastojanje između $x, y \in \mathbb{R}$, je dato sa $d(x, y) = |x - y|$, gde $|\cdot|$ označava apsolutnu vrednost. Rastojanje između $z, w \in \mathbb{C}$ sa $d(z, w) = |z - w|$, gde $|\cdot|$ označava modul.
- Brojni niz je preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, dato sa $a(n) := a_n$, $n \in \mathbb{N}$, gde je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ (a je granična vrednost niza $\{a_n\}$) ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a, a_k) = |a - a_k| < \epsilon$, što zapisujemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
- Brojni niz $\{a_n\}$ je Košijev ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq n \Rightarrow d(a_{k+p}, a_k) = |a_{k+p} - a_k| < \epsilon$.
- U $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ brojni niz $\{a_n\}$ je konvergentan akko je $\{a_n\}$ Košijev niz.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Broj $b \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja (TN) niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ako se u svakoj ϵ-okolini broja b (u svakom intervalu $(b-\epsilon, b+\epsilon)$) nalazi beskonačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$, odnosno ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = b$.
- Najveću TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M$, a najmanju TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = m$.
- Za svaki niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ važi $m, M \in \mathbb{R}$ ili $m, M \in \{\pm\infty\}$.
- Ako je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M \in \mathbb{R}$, tada je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Primer

Ako je $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *tada je* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{3}{2}$, *a* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Broj $b \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja (TN) niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ako se u svakoj ϵ-okolini broja b (u svakom intervalu $(b-\epsilon, b+\epsilon)$) nalazi beskonačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$, odnosno ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = b$.
- Najveću TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M$, a najmanju TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = m$.
- Za svaki niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ važi $m, M \in \mathbb{R}$ ili $m, M \in \{\pm\infty\}$.
- Ako je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M \in \mathbb{R}$, tada je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Primer

Ako je $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *tada je* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{3}{2}$, *a* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Broj $b \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja (TN) niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ako se u svakoj ϵ-okolini broja b (u svakom intervalu $(b-\epsilon, b+\epsilon)$) nalazi beskonačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$, odnosno ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = b$.
- Najveću TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M$, a najmanju TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = m$.
- Za svaki niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ važi $m, M \in \mathbb{R}$ ili $m, M \in \{\pm\infty\}$.
- Ako je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M \in \mathbb{R}$, tada je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Primer

Ako je $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *tada je* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{3}{2}$, *a* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Broj $b \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja (TN) niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ako se u svakoj ϵ-okolini broja b (u svakom intervalu $(b-\epsilon, b+\epsilon)$) nalazi beskonačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$, odnosno ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = b$.
- Najveću TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M$, a najmanju TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = m$.
- Za svaki niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ važi $m, M \in \mathbb{R}$ ili $m, M \in \{\pm\infty\}$.
- Ako je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M \in \mathbb{R}$, tada je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Primer

Ako je $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *tada je* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{3}{2}$, *a* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Brojni nizovi (ponavljanje)

- Broj $b \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja (TN) niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ako se u svakoj ϵ-okolini broja b (u svakom intervalu $(b-\epsilon, b+\epsilon)$) nalazi beskonačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$, odnosno ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ niza $\{a_n\}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = b$.
- Najveću TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M$, a najmanju TN niza $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ označavamo sa $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = m$.
- Za svaki niz $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ važi $m, M \in \mathbb{R}$ ili $m, M \in \{\pm\infty\}$.
- Ako je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = M \in \mathbb{R}$, tada je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Primer

Ako je $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *tada je* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{3}{2}$, *a* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Brojni redovi

- Brojni red u skupu $\mathbb{R}$ je uređeni par $(\{a_n\}, \{s_k\})$ dva niza, $a_n \in \mathbb{R}$, $s_k \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ za koje važi

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, \quad s_{k+1} = s_k + a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Broj a_n je (n-ti) član reda, a broj s_k je (k-ta) parcijalna suma reda. Brojni red označavamo sa $\sum a_n$ ili $\sum\limits_n a_n$ ili $a_1 + a_2 + \ldots$
- Analogno se definiše brojni red u $\mathbb{C}$.
- Brojni red $\sum a_n$ je konvergentan ili sumabilan ako je niz $\{s_n\}$ konvergentan. Suma (zbir) reda je gr. vrednost niza $\{s_n\}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}\,(s \in \mathbb{C}),$$

i zapisuje se $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \left(= \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right)$.

Brojni redovi

- Brojni red u skupu $\mathbb{R}$ je uređeni par $(\{a_n\},\{s_k\})$ dva niza, $a_n \in \mathbb{R}$, $s_k \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ za koje važi
$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, \quad s_{k+1} = s_k + a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
- Broj a_n je (n-ti) član reda, a broj s_k je (k-ta) parcijalna suma reda. Brojni red označavamo sa $\sum a_n$ ili $\sum_n a_n$ ili $a_1 + a_2 + \dots$
- Analogno se definiše brojni red u $\mathbb{C}$.
- Brojni red $\sum a_n$ je konvergentan ili sumabilan ako je niz $\{s_n\}$ konvergentan. Suma (zbir) reda je gr. vrednost niza $\{s_n\}$, tj.
$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}\,(s \in \mathbb{C}),$$
i zapisuje se $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \right)$.

Brojni redovi

- Brojni red u skupu $\mathbb{R}$ je uređeni par $(\{a_n\}, \{s_k\})$ dva niza, $a_n \in \mathbb{R}$, $s_k \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ za koje važi

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, \quad s_{k+1} = s_k + a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Broj a_n je (n-ti) član reda, a broj s_k je (k-ta) parcijalna suma reda. Brojni red označavamo sa $\sum a_n$ ili $\sum\limits_n a_n$ ili $a_1 + a_2 + \dots$
- Analogno se definiše brojni red u $\mathbb{C}$.
- Brojni red $\sum a_n$ je konvergentan ili sumabilan ako je niz $\{s_n\}$ konvergentan. Suma (zbir) reda je gr. vrednost niza $\{s_n\}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}\,(s \in \mathbb{C}),$$

i zapisuje se $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \left(= \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right)$.

Brojni redovi

- Brojni red u skupu $\mathbb{R}$ je uređeni par $(\{a_n\}, \{s_k\})$ dva niza, $a_n \in \mathbb{R}$, $s_k \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ za koje važi

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n, \quad s_{k+1} = s_k + a_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Broj a_n je (n-ti) član reda, a broj s_k je (k-ta) parcijalna suma reda. Brojni red označavamo sa $\sum a_n$ ili $\sum\limits_n a_n$ ili $a_1 + a_2 + \dots$
- Analogno se definiše brojni red u $\mathbb{C}$.
- Brojni red $\sum a_n$ je konvergentan ili sumabilan ako je niz $\{s_n\}$ konvergentan. Suma (zbir) reda je gr. vrednost niza $\{s_n\}$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}\,(s \in \mathbb{C}),$$

i zapisuje se $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \left(= \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right)$.

Brojni redovi

- Za red koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.
- Brojni red se često označava i sa $\sum\limits_{n=0} a_n$ ili $\sum\limits_{n=p} a_n$, a odgovarajuće parcijalne sume sa $s_k = \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n$, odnosno $s_k = \sum\limits_{n=p}^{k+p-1} a_n$.
- $$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = s_p + R_p.$$
- $R_p = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$ naziva se (p-ti) ostatak reda i važi $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = 0$ akko $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = s$.

Brojni redovi

- Za red koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.
- Brojni red se često označava i sa $\sum_{n=0} a_n$ ili $\sum_{n=p} a_n$, a odgovarajuće parcijalne sume sa $s_k = \sum_{n=0}^{k-1} a_n$, odnosno $s_k = \sum_{n=p}^{k+p-1} a_n$.
- $$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = s_p + R_p.$$
- $R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ naziva se (p-ti) ostatak reda i važi $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$ akko $\lim_{p\to\infty} s_p = s$.

Brojni redovi

- Za red koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.
- Brojni red se često označava i sa $\sum_{n=0} a_n$ ili $\sum_{n=p} a_n$, a odgovarajuće parcijalne sume sa $s_k = \sum_{n=0}^{k-1} a_n$, odnosno $s_k = \sum_{n=p}^{k+p-1} a_n$.
- $$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = s_p + R_p.$$
- $R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ naziva se (p-ti) ostatak reda i važi $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$ akko $\lim_{p\to\infty} s_p = s$.

Brojni redovi

- Za red koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.
- Brojni red se često označava i sa $\sum\limits_{n=0} a_n$ ili $\sum\limits_{n=p} a_n$, a odgovarajuće parcijalne sume sa $s_k = \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n$, odnosno $s_k = \sum\limits_{n=p}^{k+p-1} a_n$.
- $$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = s_p + R_p.$$
- $R_p = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$ naziva se (p-ti) ostatak reda i važi $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = 0$ akko $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = s$.

Primer

a) Geometrijski red sa članovima $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *je konvergentan i njegova suma je* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, *jer je konvergentan niz njegovih parcijalnih suma,* $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_k = 2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, *gde je*

$$s_k = \sum_{n=0}^{k-1} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right), \ k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Primer

a) Geometrijski red sa članovima $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *je konvergentan i njegova suma je* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, *jer je konvergentan niz njegovih parcijalnih suma,* $s = \lim_{k \to \infty} s_k = 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, *gde je*

$$s_k = \sum_{n=0}^{k-1} a_n = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Teorema

(Košijev kriterijum konvergencije) Brojni red $\sum a_n$ *je konvergentan ako i samo ako za svako* $\epsilon > 0$ *postoji* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tako da sve* $p \in \mathbb{N}$ *i sve* $k \in \mathbb{N}$ *važi*

$$k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \epsilon.$$

Dokaz: Brojni red $\sum a_n$ je konvergentan akko je niz njegovih parcijalnih suma $\{s_n\}$ Košijev, tj. akko za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi

$$k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+p} - s_k| < \epsilon.$$

Kako je $|s_{k+p} - s_k| = \left|\sum_{n=1}^{k+p} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n\right| = |a_{k+1} + \cdots + a_{k+p}| =$ $\left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \epsilon$, time je teorema dokazana. □

Teorema

(Košijev kriterijum konvergencije) Brojni red $\sum a_n$ *je konvergentan ako i samo ako za svako* $\epsilon > 0$ *postoji* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tako da sve* $p \in \mathbb{N}$ *i sve* $k \in \mathbb{N}$ *važi*

$$k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \epsilon.$$

Dokaz: Brojni red $\sum a_n$ je konvergentan akko je niz njegovih parcijalnih suma $\{s_n\}$ Košijev, tj. akko za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $p \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi

$$k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p} - s_k| < \epsilon.$$

Kako je $|s_{k+p} - s_k| = \left| \sum_{n=1}^{k+p} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n \right| = |a_{k+1} + \cdots + a_{k+p}| = \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \right| < \epsilon$, time je teorema dokazana. $\square$

Posledica

(Potreban uslov za konvergenciju) Ako je brojni red $\sum a_n$ *konvergentan, tada* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Dokaz:</u> Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, tada za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i za $p = 1$ važi

$$k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+1} - s_k| = |a_{k+1} - 0| < \epsilon.$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

$$\boxed{a_n \not\to 0,\; n \to \infty \;\Rightarrow\; \text{red } \sum a_n \text{ divergira.}}$$

Posledica

(Potreban uslov za konvergenciju) Ako je brojni red $\sum a_n$ *konvergentan, tada* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Dokaz:</u> Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, tada za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i za $p = 1$ važi

$$k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+1} - s_k| = |a_{k+1} - 0| < \epsilon.$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

$$\boxed{a_n \not\to 0,\; n \to \infty \;\Rightarrow\; \text{red } \sum a_n \text{ divergira.}}$$

Posledica

(Potreban uslov za konvergenciju) Ako je brojni red $\sum a_n$ konvergentan, tada $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Dokaz:</u> Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, tada za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i za $p = 1$ važi

$$k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+1} - s_k| = |a_{k+1} - 0| < \epsilon.$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\square$

$$\boxed{a_n \not\to 0,\; n \to \infty \;\Rightarrow\; \text{red } \sum a_n \text{ divergira.}}$$

Primer

Red $\sum \frac{1}{n}$ *je harmonijski red*, $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$, *ali* $\sum \frac{1}{n}$ *je divergentan. Kako je* n*-ta parcijalna suma*
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, *za* $k = p$ *dobijamo*

$$\begin{aligned} |s_{k+p} - s_k| &= \left|\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+p}\right| \\ &= \left|\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}\right| \\ &> \frac{1}{k+k} + \frac{1}{k+k} + \cdots + \frac{1}{k+k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

te na osnovu Košijevog kriterijuma konvergencije, uzimajući npr. $\epsilon = \frac{1}{4}$, *sledi da red divergira.*

Redovi sa pozitivnim članovima

Brojni red $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ je red sa pozitivnim članovima ako je $a_n \geq 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergira akko je niz $\{s_n\}$ njegovih parcijalnih suma ograničen sa gornje strane.

Dokaz: Kako je $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \geq 0$, jer je $a_n \geq 0$, i $s_{k+1} \geq s_k + a_{k+1} \geq 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$, tj. $s_{k+1} \geq s_k \geq 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$, niz $\{s_n\}$ je monotono neopadajući, te je on konvergentan akko je ograničen sa gornje strane. $\square$

Redovi sa pozitivnim članovima

Brojni red $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ je red sa pozitivnim članovima ako je $a_n \geq 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergira akko je niz $\{s_n\}$ njegovih parcijalnih suma ograničen sa gornje strane.

Dokaz: Kako je $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geq 0$, jer je $a_n \geq 0$, i $s_{k+1} \geq s_k + a_{k+1} \geq 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$, tj. $s_{k+1} \geq s_k \geq 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$, niz $\{s_n\}$ je monotono neopadajući, te je on konvergentan akko je ograničen sa gornje strane. $\square$

Redovi sa pozitivnim članovima

Brojni red $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ je red sa pozitivnim članovima ako je $a_n \geq 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Red $\sum a_n$ sa pozitivnim članovima konvergira akko je niz $\{s_n\}$ njegovih parcijalnih suma ograničen sa gornje strane.

Dokaz: Kako je $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \geq 0$, jer je $a_n \geq 0$, i $s_{k+1} \geq s_k + a_{k+1} \geq 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$, tj. $s_{k+1} \geq s_k \geq 0$, za sve $k \in \mathbb{N}$, niz $\{s_n\}$ je monotono neopadajući, te je on konvergentan akko je ograničen sa gornje strane. $\square$

Redovi sa pozitivnim članovima

I Uporedni kriterijum

1) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \leq b_n$ za sve $n \geq n_0$. Tada iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.

2) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$ ($a_n \sim \lambda b_n$, $n \to \infty$), tada redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju (ekvikonvergentni su).

Primer

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ *divergira na osnovu UK 2) jer* $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}} \sim \frac{1}{n} = b_n$, $n \to \infty$, *a harmonijski red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *je divergentan.*

Redovi sa pozitivnim članovima

I Uporedni kriterijum

1) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \leq b_n$ za sve $n \geq n_0$. Tada iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.

2) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$ ($a_n \sim \lambda b_n$, $n \to \infty$), tada redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju (ekvikonvergentni su).

Primer

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ *divergira na osnovu UK 2) jer* $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}} \sim \frac{1}{n} = b_n$, $n \to \infty$, *a harmonijski red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *je divergentan.*

Redovi sa pozitivnim članovima

I Uporedni kriterijum

1) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \leq b_n$ za sve $n \geq n_0$. Tada iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.

2) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi sa pozitivnim članovima i neka je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \infty$ ($a_n \sim \lambda b_n$, $n \to \infty$), tada redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju (ekvikonvergentni su).

Primer

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ *divergira na osnovu UK 2) jer* $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}} \sim \frac{1}{n} = b_n$, $n \to \infty$, *a harmonijski red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *je divergentan.*

Redovi sa pozitivnim članovima

II Korenski (Košijev) kriterijum

- Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_1$ važi $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

  1) Ako je $l < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $l > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor.
- Prethodno tvrđenje važi ako je umesto granične vrednosti niza $l = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Redovi sa pozitivnim članovima

II Korenski (Košijev) kriterijum

- Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_1$ važi $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.
  1) Ako je $l < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $l > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor.
- Prethodno tvrđenje važi ako je umesto granične vrednosti niza $l = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Redovi sa pozitivnim članovima

II Korenski (Košijev) kriterijum

- Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_1$ važi $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.
  1) Ako je $l < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $l > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor.
- Prethodno tvrđenje važi ako je umesto granične vrednosti niza $l = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Primer

Ispitati konvergenciju redova koristeći korenski kriterijum:
a) $\sum \frac{1}{n}$, *b)* $\sum \frac{1}{n^2}$, *c)* $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

Rešenje:

a) Kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, *korenski kriterijum ne daje odgovor. Ranije je dokazano da harmonijski red divergira.*

b) Kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, *korenski kriterijum ne daje odgovor.*

c) Kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = \frac{1}{2} < 1$, *posledнji red konvergira.*

Primer

Ispitati konvergenciju redova koristeći korenski kriterijum:
a) $\sum \frac{1}{n}$, *b)* $\sum \frac{1}{n^2}$, *c)* $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

Rešenje:

a) Kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, *korenski kriterijum ne daje odgovor. Ranije je dokazano da harmonijski red divergira.*

b) Kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, *korenski kriterijum ne daje odgovor.*

c) Kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = \frac{1}{2} < 1$, *poslednji red konvergira.*

Redovi sa pozitivnim članovima

III Količnički (Dalamberov) kriterijum

- Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima i $a_n \cdot a_{n+1} \neq 0$, za sve $n \geq n_0$. Ako postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_1$ važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ i $Q > 1$, tako da za sve $n \geq n_2$ važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

  1) Ako je $l < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $l > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor.
- Neka je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i $M = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

  1) Ako je $M < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $m > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $m \leq 1 \leq M$, kriterijum ne daje odgovor.

Redovi sa pozitivnim članovima

III Količnički (Dalamberov) kriterijum

- Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima i $a_n \cdot a_{n+1} \neq 0$, za sve $n \geq n_0$. Ako postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_1$ važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ i $Q > 1$, tako da za sve $n \geq n_2$ važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

  1) Ako je $l < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $l > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor.
- Neka je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i $M = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

  1) Ako je $M < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $m > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $m \leq 1 \leq M$, kriterijum ne daje odgovor.

Redovi sa pozitivnim članovima

III Količnički (Dalamberov) kriterijum

- Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima i $a_n \cdot a_{n+1} \neq 0$, za sve $n \geq n_0$. Ako postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_1$ važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira, a ako postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ i $Q > 1$, tako da za sve $n \geq n_2$ važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
- Neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.
  1) Ako je $l < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $l > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor.
- Neka je $m = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i $M = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
  1) Ako je $M < 1$, tada red $\sum a_n$ konvergira.
  2) Ako je $m > 1$, tada red $\sum a_n$ divergira.
  3) Ako je $m \leq 1 \leq M$, kriterijum ne daje odgovor.

Primer

Ispitati konvergenciju reda $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ *koristeći količnički kriterijum.*

Rešenje: U prethodnom primeru je pokazano da na osnovu korenskog kriterijuma dati red konvergira. Kako je

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \frac{1}{6},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \frac{3}{2}$$

tj. $\frac{1}{6} = m < 1 < M = \frac{3}{2}$, *količnički kriterijum ne daje odgovor.*

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.}$$

Primer

Ispitati konvergenciju reda $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ *koristeći količnički kriterijum.*
Rešenje: U prethodnom primeru je pokazano da na osnovu korenskog kriterijuma dati red konvergira. Kako je

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \frac{1}{6},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \frac{3}{2}$$

tj. $\frac{1}{6} = m < 1 < M = \frac{3}{2}$, *količnički kriterijum ne daje odgovor.*

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.}$$

Primer

Ispitati konvergenciju reda $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ *koristeći količnički kriterijum.*
Rešenje: U prethodnom primeru je pokazano da na osnovu korenskog kriterijuma dati red konvergira. Kako je

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \frac{1}{6},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \frac{3}{2}$$

tj. $\frac{1}{6} = m < 1 < M = \frac{3}{2}$, *količnički kriterijum ne daje odgovor.*

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.}$$

Redovi sa pozitivnim članovima

IV Košijev integralni kriterijum

Neka je $\sum a_n = \sum f(n)$ red sa pozitivnim članovima takav da funkcija f zadovoljava sledeće uslove

- postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je f definisano za sve $x \in \mathbb{R}$, $x \geq n_0$,
- f je nenegativna, neprekidna i monotono opadajuća nad $[n_0, \infty)$.

Tada red $\sum\limits_{n=n_0} a_n$ konvergira akko nesvojstveni integral $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ konvergira.

Tvrđenje se dokazuje na osnovu sledeće činjenice

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n+1) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Redovi sa pozitivnim članovima

IV Košijev integralni kriterijum

Neka je $\sum a_n = \sum f(n)$ red sa pozitivnim članovima takav da funkcija f zadovoljava sledeće uslove

- postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je f definisano za sve $x \in \mathbb{R}$, $x \geq n_0$,
- f je nenegativna, neprekidna i monotono opadajuća nad $[n_0, \infty)$.

Tada red $\sum\limits_{n=n_0} a_n$ konvergira akko nesvojstveni integral $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ konvergira.

Tvrđenje se dokazuje na osnovu sledeće činjenice

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n+1) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Primer

Ispitati konvergenciju hiperharmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rešenje:

Za $\alpha \leq 0$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$, $n \to \infty$, *te red divergira.*
Za $\alpha > 0$ *i* $\alpha \neq 1$ *je*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_1^T = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right),$$

dok je $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{dx}{x} = \lim_{T\to\infty} \ln|x|\bigg|_1^T = \lim_{T\to\infty} \left(\ln T - \ln 1 \right).$

Dakle, nesvojstveni integral konvergira za $\alpha > 1$, *a divergira za* $\alpha \leq 1$, *te na osnovu integralnog kriterijuma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *konvergira za* $\alpha > 1$, *a divergira za* $\alpha \leq 1$.

Primer

Ispitati konvergenciju hiperharmonijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rešenje:

Za $\alpha \leq 0$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$, $n \to \infty$, *te red divergira.*

Za $\alpha > 0$ *i* $\alpha \neq 1$ *je*

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_1^T \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^T = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right),$$

dok je $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_1^T \frac{dx}{x} = \lim\limits_{T\to\infty} \ln|x|\Big|_1^T = \lim\limits_{T\to\infty} \Big(\ln T - \ln 1 \Big)$.

Dakle, nesvojstveni integral konvergira za $\alpha > 1$, *a divergira za* $\alpha \leq 1$, *te na osnovu integralnog kriterijuma* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *konvergira za* $\alpha > 1$, *a divergira za* $\alpha \leq 1$.

Alternativni redovi

Brojni red $\sum a_n$ u prostoru realnih brojeva je alternativan (naizmeničan) red ako za svako $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$, i pri tome ima beskonačno mnogo negativnih članova i beskonačno mnogo pozitivnih članova, tj. $\sum a_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$, gde je $b_n = |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$. Koristimo oznake

$$\sum (-1)^{n+1} b_n, \quad \sum (-1)^{n-1} b_n.$$

Teorema

(Lajbnicov kriterijum konvergencije alternativnih redova) Neka je $\sum a_n$ alternativni red u $\mathbb{R}$. Ako je niz $\{b_n\} = \{|a_n|\}$ monotono nerastući i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, tada red $\sum a_n$ konvergira.

Alternativni redovi

Brojni red $\sum a_n$ u prostoru realnih brojeva je alternativan (naizmeničan) red ako za svako $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$, i pri tome ima beskonačno mnogo negativnih članova i beskonačno mnogo pozitivnih članova, tj. $\sum a_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$, gde je $b_n = |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$. Koristimo oznake

$$\sum (-1)^{n+1} b_n, \quad \sum (-1)^{n-1} b_n.$$

Teorema

(Lajbnicov kriterijum konvergencije alternativnih redova) Neka je $\sum a_n$ alternativni red u $\mathbb{R}$. Ako je niz $\{b_n\} = \{|a_n|\}$ monotono nerastući i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, tada red $\sum a_n$ konvergira.

Alternativni redovi

Dokaz: Niz $\{s_{2k}\}$ je podniz niza parcijalnih suma reda $\sum a_n$ koji je monotono neopadajući i ograničen odgore jer
$s_{2k} = b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - (b_{2k-2} - b_{2k-1}) - b_{2k} \leq b_1$, i
$s_{2k+2} = s_{2k} + (b_{2k+1} - b_{2k+2}) \geq s_{2k} \geq 0$.
Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2k} = s$.
Dalje je $s_{2k+1} = s_{2k} + b_{2k+1}$, te dobijamo
$\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (s_{2k} + b_{2k+1}) = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} + \lim\limits_{k\to\infty} b_{2k+1} = s$.
Kako su oba podniza $\{s_{2k}\}$ i $\{s_{2k+1}\}$ konvergentni i konvergiraju ka s, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} s_k = s$, tj. red je $\sum(-1)^{n+1} b_n$ konvergentan
(Slično se dokazuje tvđenje za $\sum(-1)^n b_n = -\sum(-1)^{n+1} b_n$). $\square$

Primer

Pomoću Lajbnicovog kriterijuma ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. *Koliko članova treba sabrati da bi greška bila manja od* 0.01*?*

Rešenje: *Red* $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma jer je niz* $\{b_n\}$, $b_n = |a_n| = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *monotono opadajući i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Kako je* $|s - s_k| =$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n - \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}b_n\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n\right| \le b_{k+1} =$$

$= \frac{1}{k+1} < 10^{-2}$, *dobijamo da je* $k+1 > 100 \leftrightarrow k > 99$, *tj. sabiranjem prvih 100 članova greška će biti manja od* 10^{-2}.

$(R_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \le b_{k+1}$, $R_k \ge 0$, *za* $k = 2m$ *i*

$R_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \ge -b_{k+1}$, $R_k \le 0$, *za* $k = 2m-1$.)

Primer

Pomoću Lajbnicovog kriterijuma ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. *Koliko članova treba sabrati da bi greška bila manja od* 0.01*?*

Rešenje: *Red* $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma jer je niz* $\{b_n\}$, $b_n = |a_n| = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *monotono opadajući i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Kako je* $|s - s_k| =$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n - \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}b_n\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n\right| \leq b_{k+1} =$$

$= \frac{1}{k+1} < 10^{-2}$, *dobijamo da je* $k + 1 > 100 \leftrightarrow k > 99$, *tj. sabiranjem prvih 100 članova greška će biti manja od* 10^{-2}.

$(R_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \leq b_{k+1}$, $R_k \geq 0$, *za* $k = 2m$ *i*

$R_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \geq -b_{k+1}$, $R_k \leq 0$, *za* $k = 2m - 1$.*)*

Apsolutno konvergentni redovi

Neka je $\sum a_n$ brojni red sa mešovitim članovima.

- Red $\sum a_n$ je apsolutno konvergentan ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan.
- Ako red $\sum a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, tada kažemo da je red $\sum a_n$ je uslovno konvergentan (semikonvergentan).

Primer

Na osnovu prethodnog primera, red $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, dok je ranije pokazano da je harmonijski red $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ divergentan. Dakle, polazni red je uslovno konvergentan.

Apsolutno konvergentni redovi

Neka je $\sum a_n$ brojni red sa mešovitim članovima.

- Red $\sum a_n$ je apsolutno konvergentan ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan.
- Ako red $\sum a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, tada kažemo da je red $\sum a_n$ je uslovno konvergentan (semikonvergentan).

Primer

Na osnovu prethodnog primera, red $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, dok je ranije pokazano da je harmonijski red $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ divergentan. Dakle, polazni red je uslovno konvergentan.

Apsolutno konvergentni redovi

Neka je $\sum a_n$ brojni red sa mešovitim članovima.

- Red $\sum a_n$ je apsolutno konvergentan ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan.
- Ako red $\sum a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, tada kažemo da je red $\sum a_n$ je uslovno konvergentan (semikonvergentan).

Primer

Na osnovu prethodnog primera, red $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, dok je ranije pokazano da je harmonijski red* $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ *divergentan. Dakle, polazni red je uslovno konvergentan.*

Teorema

Ako je red $\sum a_n$ *apsolutno konvergentan tada je on konvergentan i važi* $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Dokaz: Kako je $\sum a_n$ je apsolutno konvergentan, red $\sum |a_n|$ je konvergentan u $\mathbb{R}$, te je niz njegovih parcijalnih suma Košijev, odnosno za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \ge k_0 \Rightarrow \left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n|\right| = \sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \epsilon$, a kako je $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| \le \left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} |a_n|\right| < \epsilon$, na osnovu Košijevog kriterijuma konvergencije sledi da je $\sum a_n$ konvergentan. Nejednakost $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ se dobija na osnovu $\left|\sum\limits_{n=1}^{k} a_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{k} |a_n|$, $k \to \infty$.

$\square$

Teorema

Ako je red $\sum a_n$ *apsolutno konvergentan tada je on konvergentan i važi* $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Dokaz: Kako je $\sum a_n$ je apsolutno konvergentan, red $\sum |a_n|$ je konvergentan u $\mathbb{R}$, te je niz njegovih parcijalnih suma Košijev, odnosno za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|\right| = \sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n| < \epsilon$, a kako je $\left|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} |a_n|\right| < \epsilon$, na osnovu Košijevog kriterijuma konvergencije sledi da je $\sum a_n$ konvergentan. Nejednakost $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ se dobija na osnovu $\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |a_n|$, $k \to \infty$.
$\square$

Teorema

Neka je red $\sum \alpha_n$ brojni red i neka je $\sum a_n$ red u $\mathbb{R}$ sa pozitivnim članovima tako da važi $|\alpha_n| \leq a_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako je red $\sum a_n$ konvergentan, tada je red $\sum \alpha_n$ apsolutno konvergentan i važi

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dokaz: Iz $\left|\sum_{n=k+1}^{k+p} |\alpha_n|\right| = \sum_{n=k+1}^{k+p} |\alpha_n| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n$, primenom Košijevog kriterijuma konvergencije dobijamo da je $\sum |\alpha_n|$ konvergentan, tj. red $\sum \alpha_n$ je apsolutno konvergentan. Nejednakost se dobija na isti način kao i nejednakost iz prethodnog dokaza. □

Teorema

Neka je red $\sum \alpha_n$ *brojni red i neka je* $\sum a_n$ *red u* $\mathbb{R}$ *sa pozitivnim članovima tako da važi* $|\alpha_n| \leq a_n$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$. *Ako je red* $\sum a_n$ *konvergentan, tada je red* $\sum \alpha_n$ *apsolutno konvergentan i važi* $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dokaz: Iz $\left|\sum_{n=k+1}^{k+p} |\alpha_n|\right| = \sum_{n=k+1}^{k+p} |\alpha_n| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n$, primenom Košijevog kriterijuma konvergencije dobijamo da je $\sum |\alpha_n|$ konvergentan, tj. red $\sum \alpha_n$ je apsolutno konvergentan.
Nejednakost se dobija na isti način kao i nejednakost iz prethodnog dokaza. $\square$

Kriterijumi za apsolutnu konvergenciju

1) Korenski (Košijev) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2) Količnički (Dalamberov) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

Kriterijumi za apsolutnu konvergenciju

1) Korenski (Košijev) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2) Količnički (Dalamberov) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

Kriterijumi za apsolutnu konvergenciju

1) Korenski (Košijev) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2) Količnički (Dalamberov) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

Kriterijumi za apsolutnu konvergenciju

1) Korenski (Košijev) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

2) Količnički (Dalamberov) kriterijum

- Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
- Ako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

Primer

Ispitati apsolutnu konvergenciju reda a) $\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!}$ *b)* $\sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Rešenje: a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$
na osnovu količničkog kriterijuma red apsolutno konvergira.
b) Analogno se dobija $\limsup_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$ *te red* $\sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}$ *apsolutno konvergira za svako* $z \in \mathbb{C}$.

Komutativni i asocijativni zakoni za redove

Teorema

(Dirihleova teorema) Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima čija je suma a. Tada je red $\sum a_{\pi(n)}$ dobijen proizvoljnom promenom redosleda njegovih članova konvergentan i njegova suma je a.

Teorema

Neka je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan brojni red. Tada je red $\sum a_{\pi(n)}$ apsolutno konvergentan, gde je $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutacija skupa indeksa i važi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Rimanov stav Neka je $\sum a_n$ uslovno konvergentan red u $\mathbb{R}$. Tada za svako $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ postoji permutacija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = s$.

Komutativni i asocijativni zakoni za redove

Teorema

(Dirihleova teorema) Neka je $\sum a_n$ red sa pozitivnim članovima čija je suma a. Tada je red $\sum a_{\pi(n)}$ dobijen proizvoljnom promenom redosleda njegovih članova konvergentan i njegova suma je a.

Teorema

Neka je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan brojni red. Tada je red $\sum a_{\pi(n)}$ apsolutno konvergentan, gde je $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutacija skupa indeksa i važi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Rimanov stav Neka je $\sum a_n$ uslovno konvergentan red u $\mathbb{R}$. Tada za svako $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ postoji permutacija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = s$.

Komutativni i asocijativni zakoni za redove

Teorema

(Dirihleova teorema) Neka je $\sum a_n$ *red sa pozitivnim članovima čija je suma* a. *Tada je red* $\sum a_{\pi(n)}$ *dobijen proizvoljnom promenom redosleda njegovih članova konvergentan i njegova suma je* a.

Teorema

Neka je $\sum a_n$ *apsolutno konvergentan brojni red. Tada je red* $\sum a_{\pi(n)}$ *apsolutno konvergentan, gde je* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *permutacija skupa indeksa i važi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.

Rimanov stav Neka je $\sum a_n$ uslovno konvergentan red u $\mathbb{R}$. Tada za svako $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ postoji permutacija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = s$.

Teorema

Neka je $\sum a_n$ *apsolutno konvergentan brojni red. Ako su* $\mathbb{N}_1$ *i* $\mathbb{N}_2$ *neprazni disjunktni podskupovi skupa* $\mathbb{N}$ *takvi da je* $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$*, tada su redovi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} a_n$ *i* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_2} a_n$ *apsolutno konvergentni i važi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} a_n + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_2} a_n$.

Primer

Eksponencijalna funkcija u $\mathbb{C}$ *definisana je apsolutno konvergentnim redom* $\sum\limits_{n=0} \frac{z^n}{n!} = e^z$*, te i sinusna* $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$ *i kosinusna funkcija* $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$*. Za* $y \in \mathbb{R}$ *je, na osnovu teoreme:*

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y.$$ *(Ojlerova formula)*

Teorema

Neka je $\sum a_n$ *apsolutno konvergentan brojni red. Ako su* $\mathbb{N}_1$ *i* $\mathbb{N}_2$ *neprazni disjunktni podskupovi skupa* $\mathbb{N}$ *takvi da je* $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, *tada su redovi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} a_n$ *i* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_2} a_n$ *apsolutno konvergentni i važi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_1} a_n + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_2} a_n$.

Primer

Eksponencijalna funkcija u $\mathbb{C}$ *definisana je apsolutno konvergentnim redom* $\sum\limits_{n=0} \frac{z^n}{n!} = e^z$, *te i sinusna* $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$ *i kosinusna funkcija* $\sum\limits_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$. *Za* $y \in \mathbb{R}$ *je, na osnovu teoreme:*

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y.$$ *(Ojlerova formula)*

Operacije sa redovima

- $\sum a_n + \sum b_n := \sum (a_n + b_n)$
- $c \sum a_n := \sum c a_n$

Teorema

Ako su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergentni brojni redovi i ako je c broj (realan ili kompleksan), tada redovi $\sum (a_n + b_n)$ i $\sum c a_n$ takođe konvergiraju i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right).$$

Operacije sa redovima

- $\sum a_n + \sum b_n := \sum (a_n + b_n)$
- $c \sum a_n := \sum c a_n$

Teorema

Ako su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergentni brojni redovi i ako je c broj (realan ili kompleksan), tada redovi $\sum (a_n + b_n)$ i $\sum c a_n$ takođe konvergiraju i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

Operacije sa redovima

- $\sum a_n + \sum b_n := \sum (a_n + b_n)$
- $c \sum a_n := \sum c a_n$

Teorema

Ako su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergentni brojni redovi i ako je c broj (realan ili kompleksan), tada redovi $\sum (a_n + b_n)$ i $\sum c a_n$ takođe konvergiraju i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \quad i \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right).$$

Primer

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Promenom redosleda sabiraka uslovno konvergentanog reda može se promeniti njegova suma.

Primer

Zbir dva divergentna reda može biti divergentan, ali i konvergentan red, npr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
Poslednji red je konvergentan na osnovu UK2) jer je hiperharmonijski red za $\alpha = 2$ *konvergentan i* $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} = b_n,\ n \to \infty$.

Proizvod redova $\sum\limits_{n=0} a_n$ i $\sum\limits_{n=0} b_n$ je red $\sum\limits_{n=0} \xi_n$ čiji su članovi definisani sa

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}, \quad \sum_{n=0} a_n \cdot \sum_{n=0} b_n = \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right).$$

Primer

Zbir dva divergentna reda može biti divergentan, ali i konvergentan red, npr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
Poslednji red je konvergentan na osnovu UK2) jer je hiperharmonijski red za $\alpha = 2$ *konvergentan i* $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} = b_n$, $n \to \infty$.

Proizvod redova $\sum\limits_{n=0} a_n$ i $\sum\limits_{n=0} b_n$ je red $\sum\limits_{n=0} \xi_n$ čiji su članovi definisani sa

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}, \quad \sum_{n=0} a_n \cdot \sum_{n=0} b_n = \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right).$$

Teorema

Ako su redovi $\sum\limits_{n=0} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *apsolutno konvergentni, tada je i* $\sum\limits_{n=0} \xi_n$ *a.k. i važi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n = A \cdot B, \quad A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n.$

Primer

Izračunati sumu reda a) $\sum\limits_{n=0} \frac{n+1}{2^n}$, *b)* $\sum\limits_{n=0} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = s.$

Rešenje: *a) Kako je* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ *(geometrijski red,* $q = \frac{1}{2}$*) dobijamo*

$$4 = 2 \cdot 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

b) $8 = 2 \cdot 4 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{n-k+1}{2^{n-k}} \right) =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (n + 1 + n + \cdots + 2 + 1) = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$, *te je* $s = 16.$

Teorema

Ako su redovi $\sum_{n=0} a_n$ *i* $\sum_{n=0} b_n$ *apsolutno konvergentni, tada je i* $\sum_{n=0} \xi_n$ *a.k. i važi* $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n = A \cdot B, \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$

Primer

Izračunati sumu reda a) $\sum_{n=0} \frac{n+1}{2^n}$, *b)* $\sum_{n=0} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = s.$

<u>*Rešenje:*</u> *a) Kako je* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ *(geometrijski red,* $q = \frac{1}{2}$*) dobijamo*

$$4 = 2 \cdot 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

b) $8 = 2 \cdot 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{n-k+1}{2^{n-k}} \right) =$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (n+1+n+\cdots+2+1) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$, *te je* $s = 16.$

Dvojni niz

Dvojni brojni niz $\{a_{nk}\}$ je preslikavanje $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ili $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.
Članove niza a_{nk}, $a_{nk} \in \mathbb{R}$ ili $a_{nk} \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$ predstavljamo

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \end{array}$$

Dvojni brojni niz je konvergentan akko

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} a_{nk}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{nk}\right) = a, \qquad a \in \mathbb{R}\ (a \in \mathbb{C}),$$

i pišemo $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} a_{nk} = a$.

Dvojni niz

Dvojni brojni niz $\{a_{nk}\}$ je preslikavanje $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ili $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$.
Članove niza a_{nk}, $a_{nk}\in\mathbb{R}$ ili $a_{nk}\in\mathbb{C}$, $n,k\in\mathbb{N}$ predstavljamo

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \end{matrix}$$

Dvojni brojni niz je konvergentan akko

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} a_{nk}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{nk}\right)=a,\qquad a\in\mathbb{R}\ (a\in\mathbb{C}),$$

i pišemo $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ k\to\infty}} a_{nk}=a$.

Dvojni niz

Dvojni brojni niz $\{a_{nk}\}$ je preslikavanje $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ili $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Članove niza a_{nk}, $a_{nk} \in \mathbb{R}$ ili $a_{nk} \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$ predstavljamo

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \end{array}$$

Dvojni brojni niz je konvergentan akko

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} a_{nk}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{nk}\right) = a, \qquad a \in \mathbb{R}\ (a \in \mathbb{C}),$$

i pišemo $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} a_{nk} = a$.

Dvojni niz

Primer

Ispitati konvergenciju dvojnih nizova a) $a_{nk} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k$, $n, k \in \mathbb{N}$,
b) $a_{nk} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^k$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Rešenje: a)

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{n+1}{n+2}\right)^k\right) = \lim_{k\to\infty} 1^k = 1 \neq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\tfrac{n+1}{n+2}\right)^k\right) = 0.$$

b) $\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^k\right)$.

Dakle, samo je drugi dvojni niz konvergentan i

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^k = 0.$$

Dvojni niz

Primer

Ispitati konvergenciju dvojnih nizova a) $a_{nk} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k$, $n, k \in \mathbb{N}$,

b) $a_{nk} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^k$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Rešenje: a)

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k\right) = \lim_{k\to\infty} 1^k = 1 \neq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k\right) = 0.$$

b) $\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^k\right)$.

Dakle, samo je drugi dvojni niz konvergentan i

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^k = 0.$$

Dvojni red

Dvojni brojni red je uređeni par dvojnih brojnih nizova $(\{a_{nk}\}, \{s_{ij}\})$, gde je

$$s_{ij} = \sum_{n=1,k=1}^{n=i,k=j} a_{nk}, \;\; i,j \in \mathbb{N}.$$

Brojevi a_{nk}, $n,k \in \mathbb{N}$ su članovi, a s_{ij}, $i,j \in \mathbb{N}$ su parcijalne sume dvojnog reda. Dvojni red obeležavamo $\sum a_{nk}$.
Kažemo da dvojni brojni red $\sum a_{nk}$ konvergira akko dvojni brojni niz parcijalnih suma $\{s_{ij}\}$ konvergira. Suma (zbir) dvojnog brojnog reda je $s = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ k\to\infty}} s_{ij}$ i pišemo $\sum\limits_{n=1,k=1}^{\infty} a_{nk} = s$.

Dvojni red

Dvojni brojni red je uređeni par dvojnih brojnih nizova $(\{a_{nk}\}, \{s_{ij}\})$, gde je

$$s_{ij} = \sum_{n=1,k=1}^{n=i,k=j} a_{nk}, \ \ i, j \in \mathbb{N}.$$

Brojevi a_{nk}, $n, k \in \mathbb{N}$ su članovi, a s_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$ su parcijalne sume dvojnog reda. Dvojni red obeležavamo $\sum a_{nk}$.

Kažemo da dvojni brojni red $\sum a_{nk}$ konvergira akko dvojni brojni niz parcijalnih suma $\{s_{ij}\}$ konvergira. Suma (zbir) dvojnog brojnog reda je $s = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} s_{ij}$ i pišemo $\sum\limits_{n=1,k=1}^{\infty} a_{nk} = s$.

Dvojni red

Dvojni brojni red je uređeni par dvojnih brojnih nizova $(\{a_{nk}\}, \{s_{ij}\})$, gde je

$$s_{ij} = \sum_{n=1,k=1}^{n=i,k=j} a_{nk}, \;\; i, j \in \mathbb{N}.$$

Brojevi a_{nk}, $n, k \in \mathbb{N}$ su članovi, a s_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$ su parcijalne sume dvojnog reda. Dvojni red obeležavamo $\sum a_{nk}$.
Kažemo da dvojni brojni red $\sum a_{nk}$ konvergira akko dvojni brojni niz parcijalnih suma $\{s_{ij}\}$ konvergira. Suma (zbir) dvojnog brojnog reda je $s = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} s_{ij}$ i pišemo $\sum\limits_{n=1,k=1}^{\infty} a_{nk} = s$.

Dvojni red

Ponovljeni red $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ konvergira ako za svako $n \in \mathbb{N}$ konvergira red $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A_n$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konvergira.

Teorema

Neka je $\{a_{nk}\}$ dvojni brojni niz takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ red $\sum_k a_{nk}$ apsolutno konvergira, neka je $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = A_n \in \mathbb{R}$ i neka red $\sum A_n$ konvergira. Tada red $\sum a_{nk}$ apsolutno konvergira i važi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1,k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Dvojni red

Ponovljeni red $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ konvergira ako za svako $n \in \mathbb{N}$ konvergira red $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A_n$ i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konvergira.

Teorema

Neka je $\{a_{nk}\}$ dvojni brojni niz takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ red $\sum_k a_{nk}$ apsolutno konvergira, neka je $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = A_n \in \mathbb{R}$ i neka red $\sum A_n$ konvergira. Tada red $\sum a_{nk}$ apsolutno konvergira i važi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1,k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Dvojni red

Primer

Pokazati da je $\sum\limits_{n=1,k=1} \frac{(-1)^n}{(k+n^2)(k+n^2-1)}$ *konvergentan dvojni red.*

Rešenje: Za svako $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(k+n^2)(k+n^2-1)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n^2)(k+n^2-1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n^2-1} - \frac{1}{k+n^2} \right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+1} - \cdots = \frac{1}{n^2},$$ *dakle,*

red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(k+n^2)(k+n^2-1)}$ *apsolutno konvergira, a red* $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}$ *konvergira, te na osnovu prethodne teoreme polazni dvojni red apsolutno konvergira.*