

Kompleksni brojevi

Predavanje 2

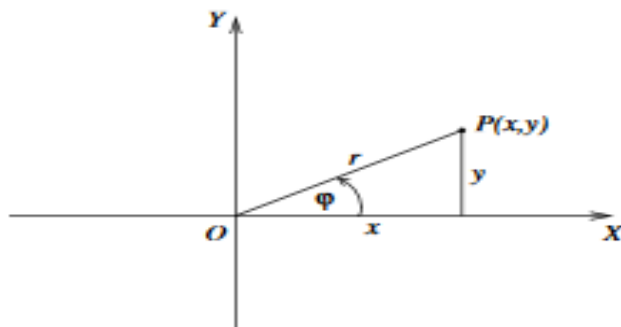
Predavanje 3

Geometrijska interpretacija kompleksnog broja

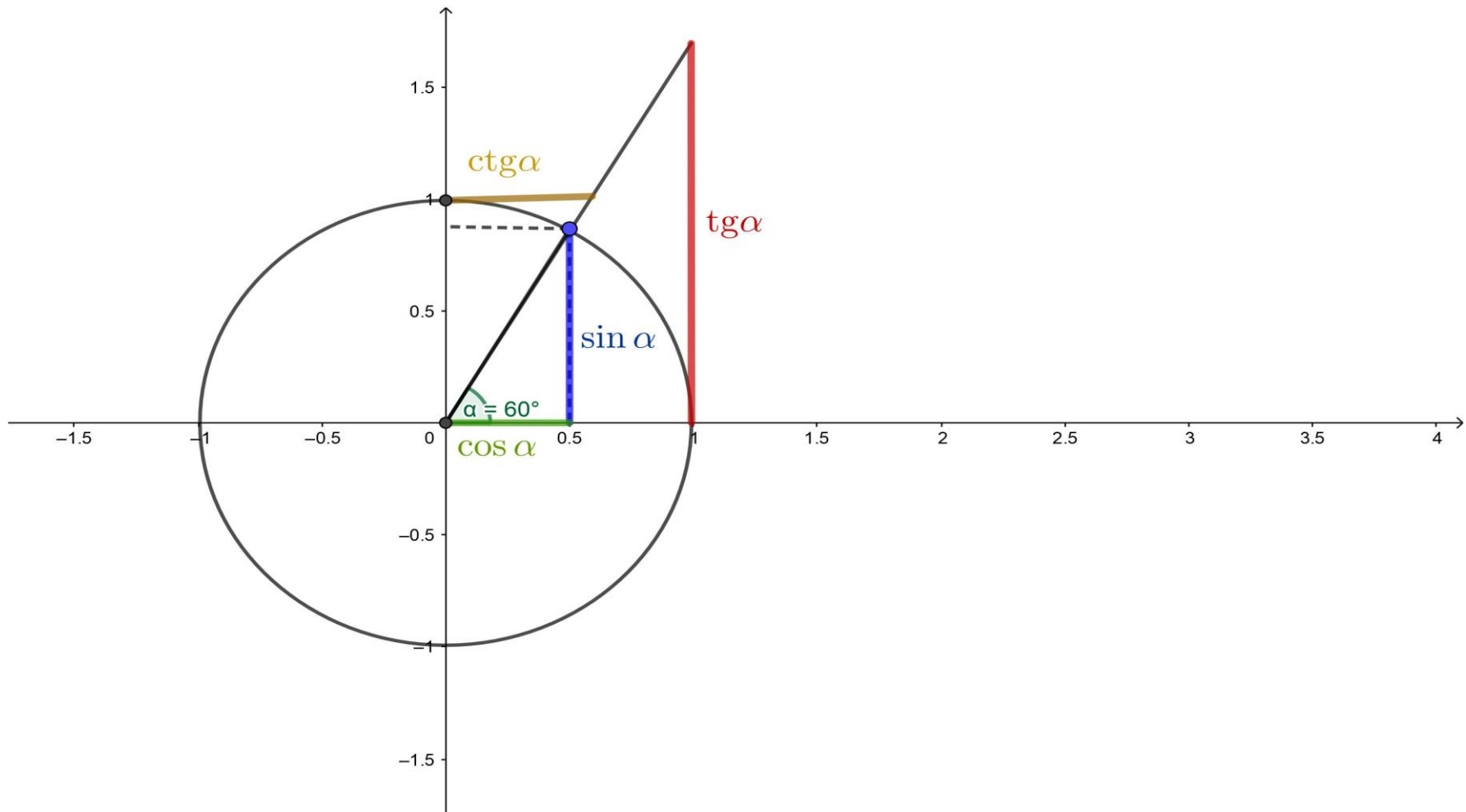
Ako je $P(x, y)$ tačka kompleksne ravni koja odgovara kompleksnom broju $x + yi$, onda se intenzitet radijus vektora tačke $P(x, y)$ naziva **moduo kompleksnog broja z** (u oznaci $|z|$), a ugao koji OP zaklapa sa pozitivnim smerom x -ose se naziva **argument kompleksnog broja z** (u oznaci $\arg(z) = \varphi$).

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Svakom kompleksnom broju $z \neq 0$ odgovara samo jedna vrednost φ iz intervala $(-\pi, \pi]$ i tu vrednost nazivamo **glavna vrednost argumenta**.



Trigonometrijska kružnica poluprečnika $r=1$



Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Napomenimo da za argument kompleksnog broja $z = x + yi$ važi i jednačina

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

pri čemu ona ima dva rešenja na intervalu $(-\pi, \pi]$. Argument $\arg(z) = \varphi$ biramo u zavisnosti od znaka x i y , odnosno od toga u kom kvadrantu se nalazi tačka $P(x, y)$ koja odgovara kompleksnom broju z .

Ako je $z = x + yi$, $r = |z|$ i $\arg(z) = \varphi$, onda očigledno važi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

pa kompleksan broj z možemo zapisati

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

što zovemo **trigonometrijskim oblikom kompleksnog broja** z .

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Na osnovu Ojlerove (Euler) formule $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{\varphi i}$, dobijamo eksponencijalni oblik kompleksnog broja

$$z = re^{\varphi i}.$$

Eksponencijalni oblik konjugovano kompleksnog broja je $\bar{z} = re^{-\varphi i}$.

Na osnovu Ojlerove formule važi

$$\cos \varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}.$$

Množenje, deljenje i stepenovanje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku

Neka su dati kompleksni brojevi

$$z = x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

$$z_k = x_k + y_k i = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k) = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2.$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i},$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i},$$

Moavrova formula:
$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}.$$

Korenovanje kompleksnih brojeva

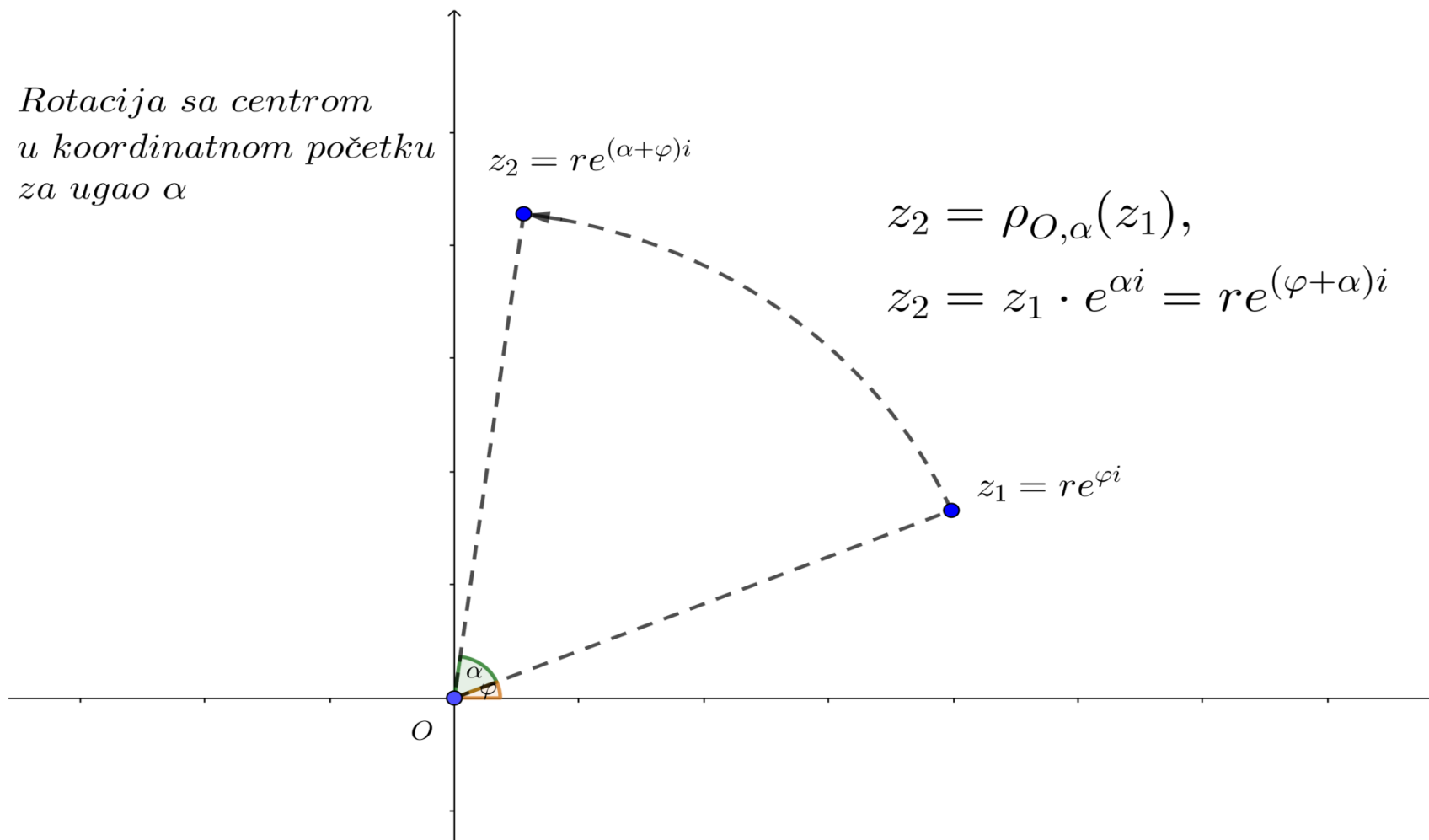
- Neka je $n \in \mathbf{N}$. Broj w je n -ti koren kompleksnog broja z ako je $w^n = z$. Tada je $w = \sqrt[n]{z}$. Na osnovu Moavrove formule važi

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n} i},$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1,$$

što znači da n -ti koren kompleksnog broja z ($z \neq 0$) ima n različitih vrednosti. Geometrijski, predstavljeni u kompleksnoj ravni, n vrednosti n -tog korena kompleksnog broja z , obrazuju temena pravilnog n -tougla koji je upisan u kružnicu sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt[n]{r}$.

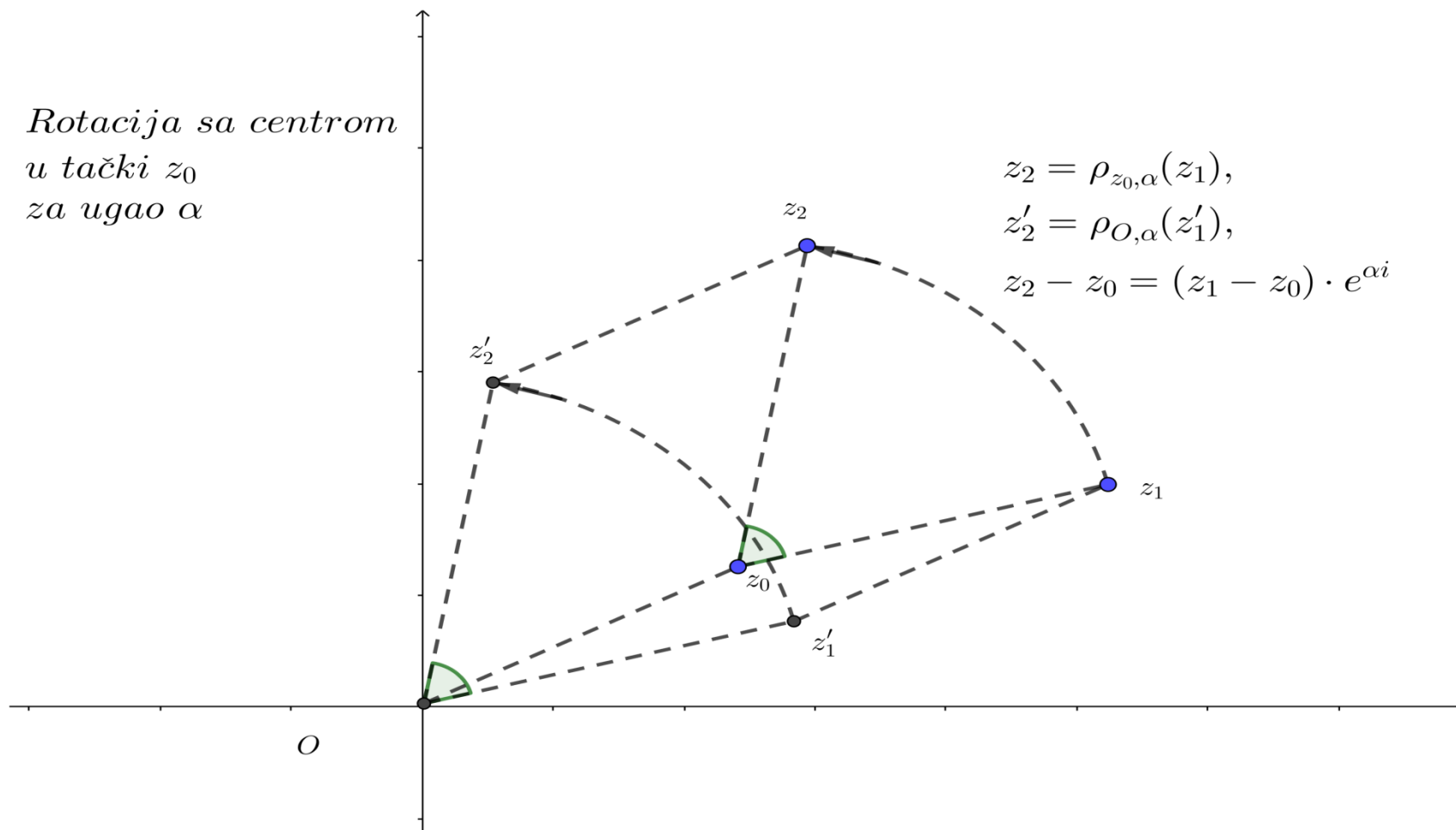
Rotacija kompleksnih brojeva

*Rotacija sa centrom
u koordinatnom početku
za ugao α*



Rotacija kompleksnih brojeva

*Rotacija sa centrom
u tački z_0
za ugao α*



Primeri

Primer 1

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$|z_1| = r_1 = \sqrt{1^2 + (-1)^2}, \quad \arg(z_1) = \varphi_1 = -\frac{\pi}{4},$$

$$z_3 = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = 4e^{\pi i},$$

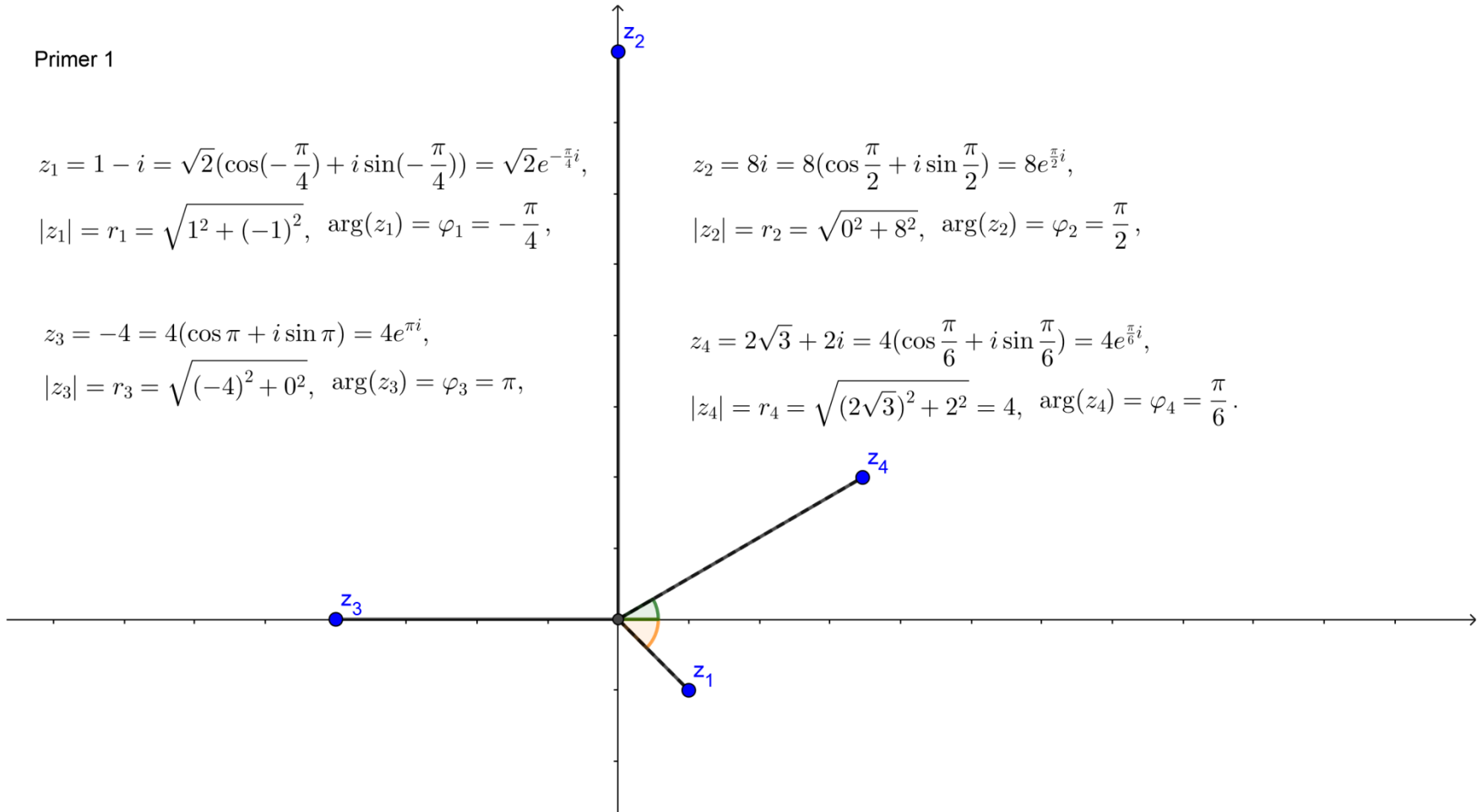
$$|z_3| = r_3 = \sqrt{(-4)^2 + 0^2}, \quad \arg(z_3) = \varphi_3 = \pi,$$

$$z_2 = 8i = 8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 8e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$|z_2| = r_2 = \sqrt{0^2 + 8^2}, \quad \arg(z_2) = \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$z_4 = 2\sqrt{3} + 2i = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 4e^{\frac{\pi}{6}i},$$

$$|z_4| = r_4 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, \quad \arg(z_4) = \varphi_4 = \frac{\pi}{6}.$$



Primeri

Primer 2. Za kompleksne brojeve date u Primeru 1 odrediti: $z_1 \cdot z_4$, $\frac{z_1}{z_4}$, z_1^{100} , $\sqrt[3]{z_2}$

u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku.

Rešenje: $z_1 \cdot z_4 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \cdot 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 4\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i} = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12})),$

$$\frac{z_1}{z_4} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{4e^{\frac{\pi}{6}i}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{5\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos(-\frac{5\pi}{12}) + i \sin(-\frac{5\pi}{12})),$$

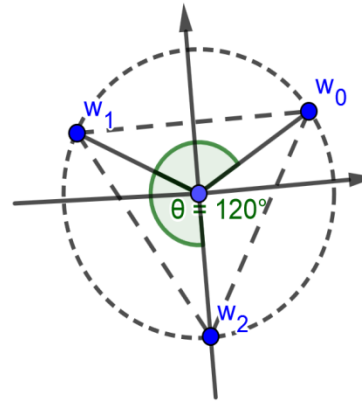
$$z_1^{100} = (\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^{100} = 2^{50}e^{-\frac{100\pi}{4}i} = 2^{50}e^{-25\pi i} = 2^{50}(\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{50},$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8e^{\frac{\pi}{2}i}} = 2e^{\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$k = 0 \quad w_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}),$$

$$k = 1 \quad w_1 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}),$$

$$k = 2 \quad w_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}).$$



Primeri

Primer 3. Ako su $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = -1$ susedna temena kvadrata, odrediti ostala njegova temena.

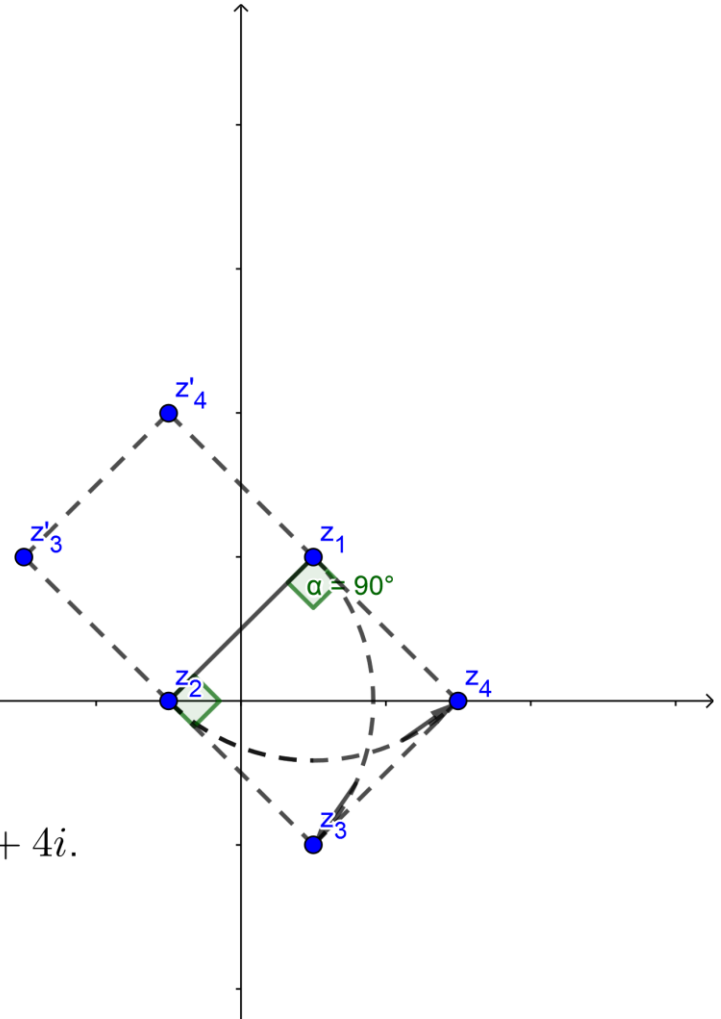
Rešenje:

$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)e^{-\frac{\pi}{2}i} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_3 &= -1 + (1 + 2i + 1)(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) \\ &= -1 + (2 + 2i)(-i) = -1 - 2i + 2 = 1 - 2i, \end{aligned}$$

$$z_4 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\frac{\pi}{2}i} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_4 &= 1 + 2i + (-1 - 1 - 2i)(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \\ &= 1 + 2i + (-2 - 2i)i = 1 + 2i - 2i + 2 = 3. \end{aligned}$$



Slično dobijamo i drugo rešenje zadatka, odnosno

ostala temena drugog kvadrata: $z'_3 = -3 + 2i$, $z'_4 = -1 + 4i$.