Funkcionalni nizovi i redovi

PREDAVANJA 3

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, oktobar 2024

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$, $\{s_k\}$ niz realnih funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$ i $s : I \to \mathbb{R}$ realna funkcija.

- Niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira u tački $x_0 \in I$ ka funkciji s ako niz $\{s_k(x_0)\}$ konvergira ka broju $s(x_0)$. Ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira ka funkciji s u svakoj tački $x_0 \in I$, onda kažemo da niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira po tačkama (obično) ka funkciji s na skupu I, tj. $s_k \to s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi i od x_0 i od ϵ) tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi implikacija $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- Niz funkcija $\{s_k\}$ uniformno (ravnomerno) konvergira ka funkciji s na skupu I, što označavamo sa $s_k \rightrightarrows s$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi samo od ϵ) tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$, $\{s_k\}$ niz realnih funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$ i $s : I \to \mathbb{R}$ realna funkcija.

- Niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira u tački $x_0 \in I$ ka funkciji s ako niz $\{s_k(x_0)\}$ konvergira ka broju $s(x_0)$. Ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira ka funkciji s u svakoj tački $x_0 \in I$, onda kažemo da niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira po tačkama (obično) ka funkciji s na skupu I, tj. $s_k \to s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi i od x_0 i od ϵ) tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi implikacija $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- Niz funkcija $\{s_k\}$ uniformno (ravnomerno) konvergira ka funkciji s na skupu I, što označavamo sa $s_k \rightrightarrows s$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi samo od ϵ) tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$, $\{s_k\}$ niz realnih funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$ i $s : I \to \mathbb{R}$ realna funkcija.

- Niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira u tački $x_0 \in I$ ka funkciji s ako niz $\{s_k(x_0)\}$ konvergira ka broju $s(x_0)$. Ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira ka funkciji s u svakoj tački $x_0 \in I$, onda kažemo da niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira po tačkama (obično) ka funkciji s na skupu I, tj. $s_k \to s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi i od x_0 i od ϵ) tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi implikacija $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- Niz funkcija $\{s_k\}$ uniformno (ravnomerno) konvergira ka funkciji s na skupu I, što označavamo sa $s_k \rightrightarrows s$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi samo od ϵ) tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

- Niz $\{s_k\}$ konvergira uniformno ka funkciji s na skupu I ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \sup\limits_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$, tj.

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| = 0.}$$

- $s_k \to s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+p}(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- $s_k \rightrightarrows s$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+p}(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

- Niz $\{s_k\}$ konvergira uniformno ka funkciji s na skupu I ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \sup\limits_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$, tj.

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| = 0.}$$

- $s_k \to s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+p}(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- $s_k \rightrightarrows s$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+p}(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

- Niz $\{s_k\}$ konvergira uniformno ka funkciji s na skupu I ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \sup\limits_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$, tj.

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| = 0.}$$

- $s_k \to s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+p}(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- $s_k \rightrightarrows s$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; |s_{k+p}(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ uniformno konvergira na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k neprekidne na $[a, b]$, onda je i s neprekidna funkcija i za sve $x_0 \in [a, b]$ važi
$$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to \infty} s_k(x_0) = \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0} s_k(x_0) = s(x_0).$$
- Ako su sve funkcije s_k integrabilne na $[a, b]$, onda je i s integrabilna funkcija i za sve $\alpha, \beta \in [a, b]$ važi
$$\lim_{k \to \infty} \int_\alpha^\beta s_k(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\lim_{k \to \infty} s_k(x) \right) dx = \int_\alpha^\beta s(x)dx.$$
- Ako su sve funkcije s_k diferencijabilne na $[a, b]$ i $s_k' \rightrightarrows g$, onda $s_k \rightrightarrows s$, s je diferencijabilna funkcija i važi $s'(x) = g(x)$ za sve $x \in [a, b]$, tj. $\left(\lim_{k \to \infty} s_k(x) \right)' = \lim_{k \to \infty} s_k'(x) = s'(x), \; x \in [a, b]$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ uniformno konvergira na $[a,b]$ ka funkciji $s : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k neprekidne na $[a,b]$, onda je i s neprekidna funkcija i za sve $x_0 \in [a,b]$ važi $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{k\to\infty} s_k(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} s_k(x_0) = s(x_0)$.
- Ako su sve funkcije s_k integrabilne na $[a,b]$, onda je i s integrabilna funkcija i za sve $\alpha, \beta \in [a,b]$ važi
$$\lim_{k\to\infty} \int_\alpha^\beta s_k(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\lim_{k\to\infty} s_k(x) \right) dx = \int_\alpha^\beta s(x)dx.$$
- Ako su sve funkcije s_k diferencijabilne na $[a,b]$ i $s_k' \rightrightarrows g$, onda $s_k \rightrightarrows s$, s je diferencijabilna funkcija i važi $s'(x) = g(x)$ za sve $x \in [a,b]$, tj. $\left(\lim\limits_{k\to\infty} s_k(x) \right)' = \lim\limits_{k\to\infty} s_k'(x) = s'(x), \ x \in [a,b]$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ uniformno konvergira na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k neprekidne na $[a, b]$, onda je i s neprekidna funkcija i za sve $x_0 \in [a, b]$ važi
  $$\lim_{x \to x_0} \lim_{k \to \infty} s_k(x_0) = \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0} s_k(x_0) = s(x_0).$$
- Ako su sve funkcije s_k integrabilne na $[a, b]$, onda je i s integrabilna funkcija i za sve $\alpha, \beta \in [a, b]$ važi
  $$\lim_{k \to \infty} \int_\alpha^\beta s_k(x) dx = \int_\alpha^\beta \left(\lim_{k \to \infty} s_k(x) \right) dx = \int_\alpha^\beta s(x) dx.$$
- Ako su sve funkcije s_k diferencijabilne na $[a, b]$ i $s_k' \rightrightarrows g$, onda $s_k \rightrightarrows s$, s je diferencijabilna funkcija i važi $s'(x) = g(x)$ za sve $x \in [a, b]$, tj. $\left(\lim_{k \to \infty} s_k(x) \right)' = \lim_{k \to \infty} s_k'(x) = s'(x), \; x \in [a, b]$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ uniformno konvergira na $[a,b]$ ka funkciji $s:[a,b]\to\mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k neprekidne na $[a,b]$, onda je i s neprekidna funkcija i za sve $x_0\in[a,b]$ važi
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{k\to\infty} s_k(x_0)=\lim_{k\to\infty}\lim_{x\to x_0} s_k(x_0)=s(x_0).$$
- Ako su sve funkcije s_k integrabilne na $[a,b]$, onda je i s integrabilna funkcija i za sve $\alpha,\beta\in[a,b]$ važi
$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta s_k(x)dx=\int_\alpha^\beta\left(\lim_{k\to\infty} s_k(x)\right)dx=\int_\alpha^\beta s(x)dx.$$
- Ako su sve funkcije s_k diferencijabilne na $[a,b]$ i $s_k' \rightrightarrows g$, onda $s_k\rightrightarrows s$, s je diferencijabilna funkcija i važi $s'(x)=g(x)$ za sve $x\in[a,b]$, tj. $\left(\lim_{k\to\infty} s_k(x)\right)'=\lim_{k\to\infty} s_k'(x)=s'(x),\ x\in[a,b]$.

Funkcionalni nizovi (primeri)

Primer

Neka je $s_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *tada je* $s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = 0$, *i* $s'(x) = 0$, *za sve* $x \in \mathbb{R}$. *S druge strane* $s_k'(x) = \sqrt{k}\cos kx$, *a* $\lim_{k\to\infty} s_k'(x) = \infty \neq \left(\lim_{k\to\infty} s_k(x)\right)' = s'(x) = 0$.

Primer

Neka je $s_k(x) = k^2x(1-x^2)^k$, $x \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, *tada je* $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = 0$, *za sve* $x \in [0,1]$. *S druge strane*

$\int_0^1 s_k(x)dx = k^2 \int_0^1 x(1-x^2)^k dx = \frac{k^2}{2k+2}$, *te je*

$\int_0^1 \left(\lim_{k\to\infty} s_k(x)\right) dx = 0 \neq \lim_{k\to\infty} \int_0^1 s_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2k+2} = \infty.$

Funkcionalni nizovi (primeri)

Primer

Neka je $s_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *tada je* $s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = 0$, *i* $s'(x) = 0$, *za sve* $x \in \mathbb{R}$. *S druge strane* $s_k'(x) = \sqrt{k}\cos kx$, *a* $\lim_{k\to\infty} s_k'(x) = \infty \neq \left(\lim_{k\to\infty} s_k(x)\right)' = s'(x) = 0$.

Primer

Neka je $s_k(x) = k^2 x(1-x^2)^k$, $x \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, *tada je* $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = 0$, *za sve* $x \in [0,1]$. *S druge strane*
$\int_0^1 s_k(x)dx = k^2 \int_0^1 x(1-x^2)^k dx = \frac{k^2}{2k+2}$, *te je*
$\int_0^1 \left(\lim_{k\to\infty} s_k(x)\right) dx = 0 \neq \lim_{k\to\infty} \int_0^1 s_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2k+2} = \infty$.

Funkcionalni nizovi (primeri)

Primer

Neka je $s_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *tada je* $s(x) = \lim\limits_{k\to\infty} s_k(x) = 0$, *i* $s'(x) = 0$, *za sve* $x \in \mathbb{R}$. *S druge strane* $s_k'(x) = \sqrt{k}\cos kx$, *a* $\lim\limits_{k\to\infty} s_k'(x) = \infty \neq \left(\lim\limits_{k\to\infty} s_k(x)\right)' = s'(x) = 0$.

Primer

Neka je $s_k(x) = k^2 x(1-x^2)^k$, $x \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, *tada je* $\lim\limits_{k\to\infty} s_k(x) = 0$, *za sve* $x \in [0,1]$. *S druge strane* $\int_0^1 s_k(x)dx = k^2 \int_0^1 x(1-x^2)^k dx = \frac{k^2}{2k+2}$, *te je* $\int_0^1 \left(\lim\limits_{k\to\infty} s_k(x)\right) dx = 0 \neq \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^1 s_k(x)dx = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{2k+2} = \infty$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je funkcionalni red.
- Funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in I,$$

  je k-ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je niz parcijalna suma reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je funkcionalni red.
- Funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in I,$$

  je k-ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je niz parcijalna suma reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je funkcionalni red.
- Funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in I,$$

  je k-ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je niz parcijalna suma reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je funkcionalni red.
- Funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in I,$$

  je k-ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je niz parcijalna suma reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je funkcionalni red.
- Funkcija $s_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in I,$$

  je k-ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je niz parcijalna suma reda $\sum f_n$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x_0)\right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0)\right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0) \right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0) \right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x) \right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ apsolutno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ brojni red $\sum f_n(x_0)$ apsolutno konvergira.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)\right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x)\right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ apsolutno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ brojni red $\sum f_n(x_0)$ apsolutno konvergira.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)\right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \;\Rightarrow\; \left|\sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x)\right| < \epsilon.$
- Funkcionalni red $\sum f_n$ apsolutno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ brojni red $\sum f_n(x_0)$ apsolutno konvergira.

Primer

Ispitati konvergenciju po tačkama i uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda $\sum\limits_{n=0} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ *na intervalu* $[-1,1]$.

<u>*Rešenje:*</u> *Za* $x=0$ *red konvergira ka* 0, *a inače ka* $1+x^2$, *te je*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1+x^2, & x \in [-1,0) \cup (0,1]. \end{cases}$$

Funkcionalni niz $\{s_k\}$ *konvergira po tačkama ka* s, *ali:*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |s(x) - s_{k+1}(x)| = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right| =$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \begin{cases} 0, & x=0, \\ (1+x^2)^{-k}, & x \in [-1,0) \cup (0,1] \end{cases} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Dakle, funkcionalni red nije uniformno konvergentan, ali konvergira po tačkama.

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Teorema

(Vajerštrasov kriterijum za uniformnu konvergenciju) Neka je $\sum a_n$, $a_n \geq 0$ *konvergentan red sa pozitivnim članovima i neka je* $\{f_n\}$ *niz funkcija* $f_n : I \to \mathbb{R}$, *takav da je* $|f_n(x)| \leq a_n$, *za sve* $x \in I$ *i sve* $n \in \mathbb{N}$. *Tada* $\sum f_n$ *konvergira uniformno i apsolutno na skupu* I.

Dokaz: Brojni red $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentan red, tj. za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi

$$k \geq k_0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon.$$ Kako za sve $x \in I$ i sve $n \in \mathbb{N}$ važi

$$|f_n(x)| \leq a_n, \text{ dobijamo } k \geq k_0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=k+1}^{k+p} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon.$$

Dakle, funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira uniformno na skupu I, takođe i apsolutno. $\square$

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Teorema

(Vajerštrasov kriterijum za uniformnu konvergenciju) Neka je $\sum a_n$, $a_n \geq 0$ *konvergentan red sa pozitivnim članovima i neka je* $\{f_n\}$ *niz funkcija* $f_n : I \to \mathbb{R}$, *takav da je* $|f_n(x)| \leq a_n$, *za sve* $x \in I$ *i sve* $n \in \mathbb{N}$. *Tada* $\sum f_n$ *konvergira uniformno i apsolutno na skupu* I.

Dokaz: Brojni red $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentan red, tj. za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi

$$k \geq k_0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon.$$ Kako za sve $x \in I$ i sve $n \in \mathbb{N}$ važi

$|f_n(x)| \leq a_n$, dobijamo $$k \geq k_0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=k+1}^{k+p} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon.$$

Dakle, funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira uniformno na skupu I, takođe i apsolutno. $\square$

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Primer

Ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ *nad* $[-\pi, \pi]$.

Rešenje: Neka je $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$ *definisano sa* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n(n+1)}$. *Za sve* $x \in [-\pi, \pi]$ *i sve* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $|f_n(x)| = |\frac{\sin nx}{n(n+1)}| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. *Brojni red sa pozitivnim članovima* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *konvergira na osnovu UK2) jer* $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \to \infty$, *a hiperharmonijski red* $\sum \frac{1}{n^2}$ *je konvergentan* $(\alpha = 2 > 1)$. *Dakle, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma funkcionalni red* $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ *uniformno konvergira nad intervalom* $[-\pi, \pi]$.

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Primer

Ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ *nad* $[-\pi, \pi]$.

Rešenje: *Neka je* $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$ *definisano sa* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n(n+1)}$. *Za sve* $x \in [-\pi, \pi]$ *i sve* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $|f_n(x)| = |\frac{\sin nx}{n(n+1)}| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. *Brojni red sa pozitivnim članovima* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *konvergira na osnovu UK2) jer* $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \to \infty$, *a hiperharmonijski red* $\sum \frac{1}{n^2}$ *je konvergentan* ($\alpha = 2 > 1$). *Dakle, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma funkcionalni red* $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ *uniformno konvergira nad intervalom* $[-\pi, \pi]$.

Uniformna konvergencija i neprekidnost

Teorema

Neka je $\{f_n\}$ *niz neprekidnih funkcija na intervalu* $[a, b]$ *i neka funkcionalni red* $\sum f_n$ *uniformno konvergira na* $[a, b]$ *ka funkciji* $s : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Tada je funkcija* s *neprekidna na* $[a, b]$ *i za svako* $x_0 \in [a, b]$ *važi:*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = s(x_0).$$

Uniformna konvergencija i integrabilnost

Teorema

Neka je $\{f_n\}$ *niz integrabilnih funkcija na intervalu* $[a, b]$ *i neka funkcionalni red* $\sum f_n$ *uniformno konvergira na* $[a, b]$ *ka funkciji* $s : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Tada je funkcija* s *integrabilna na* $[a, b]$ *i za sve* $\alpha, \beta \in [a, b]$ *važi:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx.$$

Uniformna konvergencija i diferencijabilnost

Teorema

Neka je $\{f_n\}$ *niz diferencijabilnih funkcija na intervalu* $[a, b]$*, takvih da za neko* $x_0 \in [a, b]$ *brojni red* $\sum f_n(x_0)$ *konvergira i neka funkcionalni red* $\sum f_n'$ *uniformno konvergira na* $[a, b]$ *ka funkciji* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Tada i* $\sum f_n$ *uniformno konvergira i važi:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = g(x), \quad x \in [a, b].$$