

Funkcionalni nizovi i redovi

PREDAVANJA 3

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, oktobar 2024

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$, $\{s_k\}$ niz realnih funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ i $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija.

- Niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira u tački $x_0 \in I$ ka funkciji s ako niz $\{s_k(x_0)\}$ konvergira ka broju $s(x_0)$. Ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira ka funkciji s u svakoj tački $x_0 \in I$, onda kažemo da niz funkcija $\{s_k\}$ **konvergira po tačkama (obično)** ka funkciji s na skupu I , tj. $s_k \rightarrow s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi i od x_0 i od ϵ) tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi implikacija $k \geq k_0 \Rightarrow |s(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- Niz funkcija $\{s_k\}$ **uniformno (ravnomerno) konvergira** ka funkciji s na skupu I , što označavamo sa $s_k \rightrightarrows s$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi samo od ϵ) tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$, $\{s_k\}$ niz realnih funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ i $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija.

- Niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira u tački $x_0 \in I$ ka funkciji s ako niz $\{s_k(x_0)\}$ konvergira ka broju $s(x_0)$. Ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira ka funkciji s u svakoj tački $x_0 \in I$, onda kažemo da niz funkcija $\{s_k\}$ **konvergira po tačkama (obično)** ka funkciji s na skupu I , tj. $s_k \rightarrow s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi i od x_0 i od ϵ) tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi implikacija $k \geq k_0 \Rightarrow |s(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- Niz funkcija $\{s_k\}$ **uniformno (ravnomerno) konvergira** ka funkciji s na skupu I , što označavamo sa $s_k \rightrightarrows s$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi samo od ϵ) tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$, $\{s_k\}$ niz realnih funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ i $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ realna funkcija.

- Niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira u tački $x_0 \in I$ ka funkciji s ako niz $\{s_k(x_0)\}$ konvergira ka broju $s(x_0)$. Ako niz funkcija $\{s_k\}$ konvergira ka funkciji s u svakoj tački $x_0 \in I$, onda kažemo da niz funkcija $\{s_k\}$ **konvergira po tačkama (obično)** ka funkciji s na skupu I , tj. $s_k \rightarrow s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi i od x_0 i od ϵ) tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi implikacija $k \geq k_0 \Rightarrow |s(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- Niz funkcija $\{s_k\}$ **uniformno (ravnomerno) konvergira** ka funkciji s na skupu I , što označavamo sa $s_k \rightrightarrows s$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ (k_0 zavisi samo od ϵ) tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

- Niz $\{s_k\}$ konvergira uniformno ka funkciji s na skupu I ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi
 $k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| = 0.$$

- $s_k \rightarrow s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi
 $k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p}(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- $s_k \rightrightarrows s$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi
 $k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p}(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

- Niz $\{s_k\}$ konvergira uniformno ka funkciji s na skupu I ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| = 0.$$

- $s_k \rightarrow s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p}(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- $s_k \rightrightarrows s$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p}(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

- Niz $\{s_k\}$ konvergira uniformno ka funkciji s na skupu I ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ važi
 $k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| < \epsilon$, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |s(x) - s_k(x)| = 0.$$

- $s_k \rightarrow s$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi
 $k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p}(x_0) - s_k(x_0)| < \epsilon$.
- $s_k \rightrightarrows s$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi
 $k \geq k_0 \Rightarrow |s_{k+p}(x) - s_k(x)| < \epsilon$.

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ **uniformno konvergira** na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k **neprekidne** na $[a, b]$, onda je i s **neprekidna funkcija** i za sve $x_0 \in [a, b]$ važi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} s_k(x) = s(x_0).$$
- Ako su sve funkcije s_k **integrabilne** na $[a, b]$, onda je i s **integrabilna funkcija** i za sve $\alpha, \beta \in [a, b]$ važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} s_k(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx.$$
- Ako su sve funkcije s_k **diferencijabilne** na $[a, b]$ i $s'_k \rightrightarrows g$, onda $s_k \rightrightarrows s$, s je **diferencijabilna funkcija** i važi $s'(x) = g(x)$ za sve $x \in [a, b]$, tj.
$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x) = s'(x), \quad x \in [a, b].$$

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ **uniformno konvergira** na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k **neprekidne** na $[a, b]$, onda je i s **neprekidna funkcija** i za sve $x_0 \in [a, b]$ važi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} s_k(x) = s(x_0).$$

- Ako su sve funkcije s_k **integrabilne** na $[a, b]$, onda je i s **integrabilna funkcija** i za sve $\alpha, \beta \in [a, b]$ važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} s_k(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx.$$

- Ako su sve funkcije s_k **diferencijabilne** na $[a, b]$ i $s'_k \rightrightarrows g$, onda $s_k \rightrightarrows s$, s je **diferencijabilna funkcija** i važi $s'(x) = g(x)$ za sve

$$x \in [a, b], \text{ tj. } \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x) = s'(x), \quad x \in [a, b].$$

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ **uniformno konvergira** na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k **neprekidne** na $[a, b]$, onda je i s **neprekidna funkcija** i za sve $x_0 \in [a, b]$ važi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} s_k(x) = s(x_0).$$

- Ako su sve funkcije s_k **integrabilne** na $[a, b]$, onda je i s **integrabilna funkcija** i za sve $\alpha, \beta \in [a, b]$ važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} s_k(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx.$$

- Ako su sve funkcije s_k **diferencijabilne** na $[a, b]$ i $s'_k \rightrightarrows g$, onda $s_k \rightrightarrows s$, s je **diferencijabilna funkcija** i važi $s'(x) = g(x)$ za sve

$$x \in [a, b], \text{ tj. } \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x) = s'(x), \quad x \in [a, b].$$

Funkcionalni nizovi (ponavljanje)

Neka niz funkcija $\{s_k\}$ **uniformno konvergira** na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada važi:

- Ako su sve funkcije s_k **neprekidne** na $[a, b]$, onda je i s **neprekidna funkcija** i za sve $x_0 \in [a, b]$ važi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} s_k(x) = s(x_0).$$

- Ako su sve funkcije s_k **integrabilne** na $[a, b]$, onda je i s **integrabilna funkcija** i za sve $\alpha, \beta \in [a, b]$ važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} s_k(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx.$$

- Ako su sve funkcije s_k **diferencijabilne** na $[a, b]$ i $s'_k \rightrightarrows g$, onda $s_k \rightrightarrows s$, s je **diferencijabilna funkcija** i važi $s'(x) = g(x)$ za sve

$$x \in [a, b], \text{ tj. } \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x) = s'(x), \quad x \in [a, b].$$

Funkcionalni nizovi (primeri)

Primer

Neka je $s_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tada je $s(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = 0$,
 i $s'(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$. S druge strane $s'_k(x) = \sqrt{k} \cos kx$,
 a $\lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x) = \infty \neq \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = s'(x) = 0$.

Primer

Neka je $s_k(x) = k^2 x(1 - x^2)^k$, $x \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, tada je
 $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = 0$, za sve $x \in [0, 1]$. S druge strane
 $\int_0^1 s_k(x) dx = k^2 \int_0^1 x(1 - x^2)^k dx = \frac{k^2}{2k+2}$, te je
 $\int_0^1 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right) dx = 0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 s_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{2k+2} = \infty$.

Funkcionalni nizovi (primeri)

Primer

Neka je $s_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tada je $s(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = 0$,
 i $s'(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$. S druge strane $s'_k(x) = \sqrt{k} \cos kx$,
 a $\lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x) = \infty \neq \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = s'(x) = 0$.

Primer

Neka je $s_k(x) = k^2 x(1 - x^2)^k$, $x \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, tada je
 $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = 0$, za sve $x \in [0, 1]$. S druge strane
 $\int_0^1 s_k(x) dx = k^2 \int_0^1 x(1 - x^2)^k dx = \frac{k^2}{2k+2}$, te je
 $\int_0^1 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right) dx = 0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 s_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{2k+2} = \infty$.

Funkcionalni nizovi (primeri)

Primer

Neka je $s_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tada je $s(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = 0$,
 i $s'(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$. S druge strane $s'_k(x) = \sqrt{k} \cos kx$,
 a $\lim_{k \rightarrow \infty} s'_k(x) = \infty \neq \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right)' = s'(x) = 0$.

Primer

Neka je $s_k(x) = k^2 x(1 - x^2)^k$, $x \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, tada je
 $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = 0$, za sve $x \in [0, 1]$. S druge strane
 $\int_0^1 s_k(x) dx = k^2 \int_0^1 x(1 - x^2)^k dx = \frac{k^2}{2k+2}$, te je
 $\int_0^1 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) \right) dx = 0 \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 s_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{2k+2} = \infty$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je **funkcionalni red**.
- Funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x), \quad x \in I,$$

je **k -ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$** .

- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je **niz parcijalna suma reda $\sum f_n$** .
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je **funkcionalni red**.
- Funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x), \quad x \in I,$$

je **k -ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$** .

- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je **niz parcijalna suma reda $\sum f_n$** .
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je **funkcionalni red**.
- Funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x), \quad x \in I,$$

je **k -ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$** .

- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je **niz parcijalna suma reda $\sum f_n$** .
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je **funkcionalni red**.
- Funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x), \quad x \in I,$$

je **k -ta parcijalna suma funkcionalnog reda** $\sum f_n$.

- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je **niz parcijalna suma reda** $\sum f_n$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $\{f_n\}$ niz realnih funkcija $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Red $\sum f_n$ čiji su članovi funkcije f_n je **funkcionalni red**.
- Funkcija $s_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ za koju važi

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x), \quad x \in I,$$

je **k -ta parcijalna suma funkcionalnog reda $\sum f_n$** .

- Funkcionalni niz $\{s_k\}$ je **niz parcijalna suma reda $\sum f_n$** .
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira po tačkama na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x_0) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **konvergira po tačkama** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ akko funkcionalni niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ uniformno konvergira na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **apsolutno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ brojni red $\sum f_n(x_0)$ apsolutno konvergira.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **apsolutno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ brojni red $\sum f_n(x_0)$ apsolutno konvergira.

Funkcionalni redovi

- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **uniformno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da sve $x \in I$ i sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi $k \geq k_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x) \right| < \epsilon$.
- Funkcionalni red $\sum f_n$ **apsolutno konvergira** na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za svako $x_0 \in I$ brojni red $\sum f_n(x_0)$ apsolutno konvergira.

Primer

Ispitati konvergenciju po tačkama i uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ na intervalu $[-1, 1]$.

Rešenje: Za $x = 0$ red konvergira ka 0, a inače ka $1 + x^2$, te je

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{cases}$$

Funkcionalni niz $\{s_k\}$ konvergira po tačkama ka s , ali:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |s(x) - s_{k+1}(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right| =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (1+x^2)^{-k}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \end{cases} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Dakle, funkcionalni red nije uniformno konvergentan, ali konvergira po tačkama.

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Teorema

(Vajerštrasov kriterijum za uniformnu konvergenciju) Neka je $\sum a_n$, $a_n \geq 0$ konvergentan red sa pozitivnim članovima i neka je $\{f_n\}$ niz funkcija $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, takav da je $|f_n(x)| \leq a_n$, za sve $x \in I$ i sve $n \in \mathbb{N}$. Tada $\sum f_n$ konvergira uniformno i apsolutno na skupu I .

Dokaz: Brojni red $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentan red, tj. za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon. \text{ Kako za sve } x \in I \text{ i sve } n \in \mathbb{N} \text{ važi}$$

$$|f_n(x)| \leq a_n, \text{ dobijamo } k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{k+p} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon.$$

Dakle, funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira uniformno na skupu I , takođe i apsolutno. $\square$

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Teorema

(Vajerštrasov kriterijum za uniformnu konvergenciju) Neka je $\sum a_n$, $a_n \geq 0$ konvergentan red sa pozitivnim članovima i neka je $\{f_n\}$ niz funkcija $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, takav da je $|f_n(x)| \leq a_n$, za sve $x \in I$ i sve $n \in \mathbb{N}$. Tada $\sum f_n$ konvergira uniformno i apsolutno na skupu I .

Dokaz: Brojni red $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentan red, tj. za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $p \in \mathbb{N}$ važi

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon. \text{ Kako za sve } x \in I \text{ i sve } n \in \mathbb{N} \text{ važi}$$

$$|f_n(x)| \leq a_n, \text{ dobijamo } k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{k+p} |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n < \epsilon.$$

Dakle, funkcionalni red $\sum f_n$ konvergira uniformno na skupu I , takođe i apsolutno. $\square$

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Primer

Ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ nad $[-\pi, \pi]$.

Rešenje: Neka je $f_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, za sve $n \in \mathbb{N}$ definisano sa $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n(n+1)}$. Za sve $x \in [-\pi, \pi]$ i sve $n \in \mathbb{N}$ važi $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Brojni red sa pozitivnim članovima $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira na osnovu UK2) jer $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \rightarrow \infty$, a hiperharmonijski red $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentan ($\alpha = 2 > 1$). Dakle, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma funkcionalni red $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ uniformno konvergira nad intervalom $[-\pi, \pi]$.

Vajerštrasov kriterijum za funkcionalne redove

Primer

Ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ nad $[-\pi, \pi]$.

Rešenje: Neka je $f_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, za sve $n \in \mathbb{N}$ definisano sa $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n(n+1)}$. Za sve $x \in [-\pi, \pi]$ i sve $n \in \mathbb{N}$ važi $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Brojni red sa pozitivnim članovima $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira na osnovu UK2) jer $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \rightarrow \infty$, a hiperharmonijski red $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentan ($\alpha = 2 > 1$). Dakle, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma funkcionalni red $\sum \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ uniformno konvergira nad intervalom $[-\pi, \pi]$.

Uniformna konvergencija i neprekidnost

Teorema

Neka je $\{f_n\}$ niz neprekidnih funkcija na intervalu $[a, b]$ i neka funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je funkcija s neprekidna na $[a, b]$ i za svako $x_0 \in [a, b]$ važi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = s(x_0).$$

Uniformna konvergencija i integrabilnost

Teorema

Neka je $\{f_n\}$ niz integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$ i neka funkcionalni red $\sum f_n$ uniformno konvergira na $[a, b]$ ka funkciji $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je funkcija s integrabilna na $[a, b]$ i za sve $\alpha, \beta \in [a, b]$ važi:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx.$$

Uniformna konvergencija i diferencijabilnost

Teorema

Neka je $\{f_n\}$ niz diferencijabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$, takvih da za neko $x_0 \in [a, b]$ brojni red $\sum f_n(x_0)$ konvergira i neka funkcionalni red $\sum f'_n$ uniformno konvergira na $[a, b]$ ka funkciji $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada i $\sum f_n$ uniformno konvergira i važi:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = g(x), \quad x \in [a, b].$$