Stepeni redovi

PREDAVANJA 4

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, oktobar 2024

Stepeni redovi

- Stepeni red je funkcionalni red čiji su članovi

$$f_n(y) = a_n(y-\alpha)^n, \quad n = 0, 1 \ldots, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tj.}$$

$$\sum_{n=0} a_n(y-\alpha)^n = a_0 + a_1(y-\alpha) + \cdots + a_n(y-\alpha)^n + \ldots$$

- Realni brojevi $a_n, n = 0, 1, \ldots$ su koeficijenti, a realni broj α je centar stepenog reda.
- Smenom $y - \alpha = x$ dobijamo red sa centrom u 0:

$$\sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

- Po korenskom kriterijumu, red $\sum_{n=0} a_n x^n$ konvergira za sve $x \in (-r, r)$, gde je $r = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Stepeni redovi

- Stepeni red je funkcionalni red čiji su članovi
$$f_n(y) = a_n(y-\alpha)^n, \quad n = 0, 1 \ldots, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tj.}$$
$$\sum_{n=0} a_n(y-\alpha)^n = a_0 + a_1(y-\alpha) + \cdots + a_n(y-\alpha)^n + \ldots$$
- Realni brojevi $a_n, n = 0, 1, \ldots$ su koeficijenti, a realni broj α je centar stepenog reda.
- Smenom $y - \alpha = x$ dobijamo red sa centrom u 0:
$$\sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$
- Po korenskom kriterijumu, red $\sum_{n=0} a_n x^n$ konvergira za sve $x \in (-r, r)$, gde je $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Stepeni redovi

- Stepeni red je funkcionalni red čiji su članovi

$$f_n(y) = a_n(y-\alpha)^n, \quad n = 0, 1 \ldots, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tj.}$$

$$\sum_{n=0} a_n(y-\alpha)^n = a_0 + a_1(y-\alpha) + \cdots + a_n(y-\alpha)^n + \ldots$$

- Realni brojevi $a_n, n = 0, 1, \ldots$ su koeficijenti, a realni broj α je centar stepenog reda.
- Smenom $y - \alpha = x$ dobijamo red sa centrom u 0:

$$\sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

- Po korenskom kriterijumu, red $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$ konvergira za sve $x \in (-r, r)$, gde je $r = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Stepeni redovi

- Stepeni red je funkcionalni red čiji su članovi

$$f_n(y) = a_n(y-\alpha)^n, \quad n = 0, 1 \dots, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tj.}$$

$$\sum_{n=0} a_n(y-\alpha)^n = a_0 + a_1(y-\alpha) + \dots + a_n(y-\alpha)^n + \dots$$

- Realni brojevi $a_n, n = 0, 1, \dots$ su koeficijenti, a realni broj α je centar stepenog reda.
- Smenom $y - \alpha = x$ dobijamo red sa centrom u 0:

$$\sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

- Po korenskom kriterijumu, red $\sum_{n=0} a_n x^n$ konvergira za sve $x \in (-r, r)$, gde je $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Stepeni redovi

- Stepeni red je funkcionalni red čiji su članovi

$$f_n(y) = a_n(y-\alpha)^n, \quad n = 0, 1 \ldots, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ tj.}$$

$$\sum_{n=0} a_n(y-\alpha)^n = a_0 + a_1(y-\alpha) + \cdots + a_n(y-\alpha)^n + \ldots$$

- Realni brojevi $a_n, n = 0, 1, \ldots$ su koeficijenti, a realni broj α je centar stepenog reda.
- Smenom $y - \alpha = x$ dobijamo red sa centrom u 0:

$$\sum_{n=0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

- Po korenskom kriterijumu, red $\sum_{n=0} a_n x^n$ konvergira za sve $x \in (-r, r)$, gde je $r = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Broj r nazivamo polupręčnikom konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$, a interval $(-r, r)$ intervalom konvergencije:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \right).$$

Primer

Ispitati konvergenciju redova: a) $\sum \frac{1}{n} x^n$, *b)* $\sum n^n x^n$, *c)* $\sum \frac{1}{n!} x^n$.

a) Po korenskom kriterijumu, kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} < 1$, *za* $x \in (-1, 1)$ *red konvergira. Poluprečnik konvergencije je* $r = 1$.

b) Red konvergira samo za $x = 0$, *a kako je* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n |x|^n} = \infty$, *red divergira za* $x \neq 0$. *Poluprečnik konvergencije je* $r = 0$.

c) Po količničkom kriterijumu, kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n!} x^n\right|} =$ $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$, *red konvergira za svako za* $x \in \mathbb{R}$, $r = +\infty$.

Broj r nazivamo polupręčnikom konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$, a interval $(-r, r)$ intervalom konvergencije:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \right).$$

Primer

Ispitati konvergenciju redova: a) $\sum \frac{1}{n} x^n$, *b)* $\sum n^n x^n$, *c)* $\sum \frac{1}{n!} x^n$.

a) Po korenskom kriterijumu, kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} < 1$, *za* $x \in (-1, 1)$ *red konvergira. Poluprečnik konvergencije je* $r = 1$.

b) Red konvergira samo za $x = 0$, *a kako je* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n |x|^n} = \infty$, *red divergira za* $x \neq 0$. *Poluprečnik konvergencije je* $r = 0$.

c) Po količničkom kriterijumu, kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n!} x^n\right|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$, *red konvergira za svako za* $x \in \mathbb{R}$, $r = +\infty$.

Teorema

Ako je $\sum a_n x^n$ stepeni red čiji je poluprečnik konvergencije $r > 0$, tada red $\sum a_n x^n$ konvergira uniformno (i apsolutno) za sve x za koje važi $|x| \leq \rho$, gde je $0 \leq \rho < r$.

Dokaz: Kako je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\rho^n} = \rho \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < r \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, na osnovu korenskog kriterijuma brojni red $\sum |a_n|\rho^n$ konvergira. Dalje, $|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n$, za svako $n \in \mathbb{N}$ i sve $x \in [-\rho, \rho]$, te na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma stepeni red $\sum a_n x^n$ konvergira uniformno (i apsolutno) na $[-\rho, \rho]$. $\square$

Teorema

Ako je $\sum a_n x^n$ stepeni red čiji je poluprečnik konvergencije $r > 0$, tada red $\sum a_n x^n$ konvergira uniformno (i apsolutno) za sve x za koje važi $|x| \leq \rho$, gde je $0 \leq \rho < r$.

Dokaz: Kako je
$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\rho^n} = \rho \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < r \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, na osnovu korenskog kriterijuma brojni red $\sum |a_n|\rho^n$ konvergira. Dalje, $|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n$, za svako $n \in \mathbb{N}$ i sve $x \in [-\rho, \rho]$, te na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma stepeni red $\sum a_n x^n$ konvergira uniformno (i apsolutno) na $[-\rho, \rho]$. $\square$

Teorema

Ako za svako $x \in (-r, r)$, $r > 0$, stepeni redovi $\sum a_n x^n$ i $\sum b_n x^n$ konvergiraju istoj sumi $f(x)$, tada su oni identični, tj. odgovarajući koeficijenti su im jednaki.

Dokaz: Kako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = f(x) - f(x) = 0$, za svako $x \in (-r, r)$, $r > 0$,
sledi da je $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n \equiv 0$, a odatle, za $x = 0$, je $a_0 = b_0$.
Zbog uniformne konvergencije
$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - b_n) x^{n-1} \equiv 0$, a odatle, za $x = 0$
je $a_1 = b_1$, itd. Nastavljanjem procedure dobijamo tvrđenje. □

Teorema

Ako za svako $x \in (-r, r)$, $r > 0$, stepeni redovi $\sum a_n x^n$ i $\sum b_n x^n$ konvergiraju istoj sumi $f(x)$, tada su oni identični, tj. odgovarajući koeficijenti su im jednaki.

Dokaz: Kako je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = f(x) - f(x) = 0$, za svako $x \in (-r, r)$, $r > 0$,
sledi da je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n \equiv 0$, a odatle, za $x = 0$, je $a_0 = b_0$.
Zbog uniformne konvergencije
$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - b_n) x^{n-1} \equiv 0$, a odatle, za $x = 0$ je $a_1 = b_1$, itd. Nastavljanjem procedure dobijamo tvrđenje. $\square$

Teorema

Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ *za* $x \in (-r, r)$, *gde je* $r > 0$ *poluprečnik konvergencije stepenog reda* $\sum a_n x^n$. *Tada je funkcija* f *neprekidna i ima sve izvode za koje važi*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \; x \in (-r, r)$$

$$f^{(k)}(0) = k! a_k, \text{ za sve } k = 0, 1, 2 \dots$$

Dokaz: Na osnovu teorema o neprekidnosti funkcionalnih redova, f je neprekidna na $[-\rho, \rho]$, $\rho < r$, te je neprekidna na $(-r, r)$. Kako je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, imamo $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, te stepeni redovi $\sum a_n x^n$ i $\sum n a_n x^{n-1}$ imaju isti poluprečnik konvergencije. Dalje, na osnovu teoreme o diferencijabilnosti funkcionalnih redova dobijamo $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $x \in (-r, r)$ i $f'(0) = a_1$. Analogno se dokazuje tvrđenje za izvode višeg reda. $\square$

Razvoj funkcije u stepeni red

- Ako postoji stepeni red $\sum a_n x^n$ i $r > 0$, tako da za sve $x \in (-r, r)$ je $f(x) = \sum a_n x^n$ kažemo da je f analitička funkcija u tački 0 i da stepeni red $\sum a_n x^n$ predstavlja razvoj funkcije f u stepeni (Maklorenov) red u okolini tačke 0. Kažemo da funkcija ima razvoj u okolini tačke 0 ili da funkcija ima razvoj u Maklorenov red:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \; x \in (-r, r).$$

Razvoj funkcije u stepeni red

- Ako postoji stepeni red $\sum a_n x^n$ i $r > 0$, tako da za sve $x \in (-r, r)$ je $f(x) = \sum a_n x^n$ kažemo da je f analitička funkcija u tački 0 i da stepeni red $\sum a_n x^n$ predstavlja razvoj funkcije f u stepeni (Maklorenov) red u okolini tačke 0. Kažemo da funkcija ima razvoj u okolini tačke 0 ili da funkcija ima razvoj u Maklorenov red:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \; x \in (-r, r).$$

Teorema

Funkcija je analitička u tački 0 *akko postoji* $r > 0$ *takvo da za sve* $x \in (-r, r)$

- *f je beskonačno puta diferencijabilna*
- $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$, *gde je* $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\theta x)}{(k+1)!}x^{k+1}$, $\theta \in (0,1)$ *ostatak u Maklorenovoj formuli* $f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_k(x)$.

- Ako je $f(x) = \sum b_n(x-\alpha)^n$, $x \in (\alpha - r_1, \alpha + r_1)$, gde je r_1 poluprečnik konvergencije reda $\sum b_n(x-\alpha)^n$, kažemo da je f razvijena u stepeni (Tejlorov) red u okolini tačke α, odnosno da je ima razvoj u Tejlorov red u okolini tačke α:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n, \ x \in (\alpha - r_1, \alpha + r_1).$$

$$\left(r_1 = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}, \ b_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}, \ n = 0, 1 \ldots\right)$$

- Ako je $f(x)=\sum b_n(x-\alpha)^n$, $x\in(\alpha-r_1,\alpha+r_1)$, gde je r_1 poluprečnik konvergencije reda $\sum b_n(x-\alpha)^n$, kažemo da je f razvijena u stepeni (Tejlorov) red u okolini tačke α, odnosno da je ima razvoj u Tejlorov red u okolini tačke α:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n,\ x\in(\alpha-r_1,\alpha+r_1).$$

$$\left(r_1=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}},\ b_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!},\ n=0,1\dots\right)$$

- Ako je $f(x) = \sum b_n(x-\alpha)^n$, $x \in (\alpha - r_1, \alpha + r_1)$, gde je r_1 poluprečnik konvergencije reda $\sum b_n(x-\alpha)^n$, kažemo da je f razvijena u stepeni (Tejlorov) red u okolini tačke α, odnosno da je ima razvoj u Tejlorov red u okolini tačke α:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n,\ x \in (\alpha - r_1, \alpha + r_1).$$

$$\left(r_1 = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}},\ b_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!},\ n = 0, 1 \dots\right)$$

Teorema

Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, razvoj funkcije* f *u Maklorenov red čiji je poluprečnik konvergencije* $r > 0$*. Tada za svako* $\alpha \in (-r, r)$ *funkcija* f *može biti razvijena u Tejlorov red u okolini tačke* α *sa poluprečnikom konvergencije* $r_1 \geq r - |\alpha|$ *i važi*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n, \ |x-\alpha| < r - |\alpha| \leq r_1.$$

Primer

Razviti u Maklorenov red a) $f(x) = e^x$, *b)* $f(x) = \ln(1+x)$.

a) $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 1, 2, \dots$, *te je* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ *jer je* $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$ *i* $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \dots$.

b) $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $|x| < 1$, *integraljenjem dobijamo* $\int\limits_0^x (\ln(1+t))'\,dt = \ln(1+x) - \ln 1 = \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^x t^n\,dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. *Dakle,* $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$, *jer za* $x = 1$ *red uslovno konvergira.*

Primer

Razviti u Maklorenov red a) $f(x) = e^x$, *b)* $f(x) = \ln(1+x)$.

a) $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 1, 2, \ldots$, *te je* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ *jer je*

$r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$ *i* $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$.

b) $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $|x| < 1$,

integraljenjem dobijamo $\int\limits_0^x (\ln(1+t))' \, dt = \ln(1+x) - \ln 1 =$

$\int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int\limits_0^x t^n \, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. *Dakle,*

$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$, *jer za* $x = 1$ *red uslovno konvergira.*

Primer

Razviti u Maklorenov red a) $f(x) = e^x$, *b)* $f(x) = \ln(1+x)$.

a) $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 1, 2, \dots,$ *te je* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ *jer je* $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$ *i* $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \dots$.

b) $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x| < 1$, *integraljenjem dobijamo* $\int\limits_0^x (\ln(1+t))'\,dt = \ln(1+x) - \ln 1 = \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^x t^n\,dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. *Dakle,* $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$, *jer za* $x = 1$ *red uslovno konvergira.*

Primer

Razviti u Maklorenov red funkciju $f(x) = \mathrm{arctg} x$.

$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \ |x| < 1,$

integraljenjem dobijamo $\int_0^x (\mathrm{arctg} t)' \, dt = \mathrm{arctg} x - \mathrm{arctg} 0 =$

$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x.$

Dakle, $\mathrm{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in (-1, 1).$

Primer

Razviti u Tejlorov red u okolini a) $\frac{1}{2}$, *b)* $-\frac{1}{2}$, *funkciju* $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Maklorenov red je $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$ *i* $r = 1$.

a) $f(x) = \frac{1}{1-(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{1-\frac{x-1/2}{1/2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-\frac{1}{2})^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(x-\frac{1}{2})^n$, *za* $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ *i* $r_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$.

Red konvergira za $x \in (0,1)$, $r_1 = 1 - |1/2| = \frac{1}{2}$.

b) $f(x) = \frac{1}{1-(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{x+1/2}{3/2}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x+\frac{1}{2})^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (x+\frac{1}{2})^n$, *za* $|x+\frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ *i* $r_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^{n+1}}} = \frac{3}{2}$.

Red konvergira za $x \in (-2,1)$, $r_2 > 1 - |-1/2| = \frac{1}{2}$.

Primer

Razviti u Tejlorov red u okolini a) $\frac{1}{2}$, *b)* $-\frac{1}{2}$, *funkciju* $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Maklorenov red je $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$ *i* $r = 1$.

a) $f(x) = \frac{1}{1-(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{1-\frac{x-1/2}{1/2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-\frac{1}{2})^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(x-\frac{1}{2})^n$, *za* $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ *i* $r_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$.

Red konvergira za $x \in (0,1)$, $r_1 = 1 - |1/2| = \frac{1}{2}$.

b) $f(x) = \frac{1}{1-(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{x+1/2}{3/2}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x+\frac{1}{2})^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (x+\frac{1}{2})^n$, *za* $|x+\frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ *i* $r_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^{n+1}}} = \frac{3}{2}$.

Red konvergira za $x \in (-2,1)$, $r_2 > 1 - |-1/2| = \frac{1}{2}$.

Primer

Razviti u Tejlorov red u okolini a) $\frac{1}{2}$, *b)* $-\frac{1}{2}$, *funkciju* $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Maklorenov red je $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$ *i* $r = 1$.

a) $f(x) = \frac{1}{1-(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{1-\frac{x-1/2}{1/2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-\frac{1}{2})^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(x-\frac{1}{2})^n$, *za* $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ *i* $r_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$.

Red konvergira za $x \in (0, 1)$, $r_1 = 1 - |1/2| = \frac{1}{2}$.

b) $f(x) = \frac{1}{1-(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{x+1/2}{3/2}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x+\frac{1}{2})^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (x+\frac{1}{2})^n$, *za* $|x+\frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ *i* $r_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^{n+1}}} = \frac{3}{2}$.

Red konvergira za $x \in (-2, 1)$, $r_2 > 1 - |-1/2| = \frac{1}{2}$.

Maklorenovi redovi

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1,1).$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},\ x \in (-1,1].$
- $(1+x)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,\ x \in (-1,1),\ a \in \mathbb{R}.$

Maklorenovi redovi

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ x \in (-1,1).$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}.$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \ x \in (-1,1].$
- $(1+x)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array} \right) x^n, \ x \in (-1,1), \ a \in \mathbb{R}.$

Maklorenovi redovi

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in (-1,1).$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},\ x \in (-1,1].$
- $(1+x)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,\ x \in (-1,1),\ a \in \mathbb{R}.$

Maklorenovi redovi

- $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$.
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$.
- $(1+x)^a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$, $x \in (-1, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Maklorenovi redovi

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$.
- $(1+x)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array} \right) x^n$, $x \in (-1, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Maklorenovi redovi

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$.
- $(1+x)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array} \right) x^n$, $x \in (-1, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x = x_0 \neq 0$, tada on apsolutno konvergira za svako x za koje važi $|x| < |x_0|$, a ako divergira za $x = x_0$, tada on divergira za svako x za koje važi $|x| > |x_0|$.
- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x_0 \neq 0$, a divergira za neko $x_1 \in \mathbb{R}$ tada postoji jedan i samo jedan broj $r > 0$ takav da red konvergira za $|x| < r$, a divergira za sve $|x| > r$, interval $(-r, r)$ je interval konvergencije stepenog reda, r je poluprečnik konvergencije i red konvergira apsolutno za sve $x \in (-r, r)$.
- Na $[a, b] \subset (-r, r)$ stepeni red $\sum a_n x^n$ uniformno konvergira.
- Ako $\sum a_n x^n$ i $\sum b_n x^n$ konvergiraju za $x \in (-r, r)$ i imaju iste sume tada su $a_n = b_n$ za sve $n = 0, 1 \ldots$.

- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x = x_0 \neq 0$, tada on apsolutno konvergira za svako x za koje važi $|x| < |x_0|$, a ako divergira za $x = x_0$, tada on divergira za svako x za koje važi $|x| > |x_0|$.
- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x_0 \neq 0$, a divergira za neko $x_1 \in \mathbb{R}$ tada postoji jedan i samo jedan broj $r > 0$ takav da red konvergira za $|x| < r$, a divergira za sve $|x| > r$, interval $(-r, r)$ je interval konvergencije stepenog reda, r je poluprečnik konvergencije i red konvergira apsolutno za sve $x \in (-r, r)$.
- Na $[a, b] \subset (-r, r)$ stepeni red $\sum a_n x^n$ uniformno konvergira.
- Ako $\sum a_n x^n$ i $\sum b_n x^n$ konvergiraju za $x \in (-r, r)$ i imaju iste sume tada su $a_n = b_n$ za sve $n = 0, 1 \ldots$.

- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x = x_0 \neq 0$, tada on apsolutno konvergira za svako x za koje važi $|x| < |x_0|$, a ako divergira za $x = x_0$, tada on divergira za svako x za koje važi $|x| > |x_0|$.
- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x_0 \neq 0$, a divergira za neko $x_1 \in \mathbb{R}$ tada postoji jedan i samo jedan broj $r > 0$ takav da red konvergira za $|x| < r$, a divergira za sve $|x| > r$, interval $(-r, r)$ je interval konvergencije stepenog reda, r je poluprečnik konvergencije i red konvergira apsolutno za sve $x \in (-r, r)$.
- Na $[a, b] \subset (-r, r)$ stepeni red $\sum a_n x^n$ uniformno konvergira.
- Ako $\sum a_n x^n$ i $\sum b_n x^n$ konvergiraju za $x \in (-r, r)$ i imaju iste sume tada su $a_n = b_n$ za sve $n = 0, 1 \ldots$.

- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x = x_0 \neq 0$, tada on apsolutno konvergira za svako x za koje važi $|x| < |x_0|$, a ako divergira za $x = x_0$, tada on divergira za svako x za koje važi $|x| > |x_0|$.
- Ako $\sum a_n x^n$ konvergira za neko $x_0 \neq 0$, a divergira za neko $x_1 \in \mathbb{R}$ tada postoji jedan i samo jedan broj $r > 0$ takav da red konvergira za $|x| < r$, a divergira za sve $|x| > r$, interval $(-r, r)$ je interval konvergencije stepenog reda, r je poluprečnik konvergencije i red konvergira apsolutno za sve $x \in (-r, r)$.
- Na $[a, b] \subset (-r, r)$ stepeni red $\sum a_n x^n$ uniformno konvergira.
- Ako $\sum a_n x^n$ i $\sum b_n x^n$ konvergiraju za $x \in (-r, r)$ i imaju iste sume tada su $a_n = b_n$ za sve $n = 0, 1 \ldots$.

- Ako je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$, tada za sve $x \in (-r, r)$, $r = \min\{r_1, r_2\}$, važi
$f(x) \pm g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$,
$f(x) g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.
- Za sve $x, y \in (-r, r)$ važi $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,
$\int\limits_0^y \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^{n+1}}{n+1}$.
- Kažemo da je f je analitička u tački α ako postoji $r > 0$ tako da za sve $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ važi $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - \alpha)^n$.
- Ako u Tejlorovoj formuli $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n + R_k(x)$, $R_k(x) \to 0$, $k \to \infty$, tada je f analitička funkcija u tački α.

- Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$, tada za sve $x \in (-r, r)$, $r = \min\{r_1, r_2\}$, važi
  $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$,
  $f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.
- Za sve $x, y \in (-r, r)$ važi $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,
  $\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^{n+1}}{n+1}$.
- Kažemo da je f je analitička u tački α ako postoji $r > 0$ tako da za sve $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ važi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - \alpha)^n$.
- Ako u Tejlorovoj formuli $f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n + R_k(x)$, $R_k(x) \to 0$, $k \to \infty$, tada je f analitička funkcija u tački α.

- Ako je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$, tada za sve $x \in (-r, r)$, $r = \min\{r_1, r_2\}$, važi
$f(x) \pm g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$,
$f(x)g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.
- Za sve $x, y \in (-r, r)$ važi $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,
$\int\limits_0^y \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^{n+1}}{n+1}$.
- Kažemo da je f je analitička u tački α ako postoji $r > 0$ tako da za sve $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ važi $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - \alpha)^n$.
- Ako u Tejlorovoj formuli $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n + R_k(x)$, $R_k(x) \to 0$, $k \to \infty$, tada je f analitička funkcija u tački α.

- Ako je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$, tada za sve $x \in (-r, r)$, $r = \min\{r_1, r_2\}$, važi
  $f(x) \pm g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$,
  $f(x) g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.
- Za sve $x, y \in (-r, r)$ važi $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,
  $\int\limits_0^y \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^{n+1}}{n+1}$.
- Kažemo da je f je analitička u tački α ako postoji $r > 0$ tako da za sve $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ važi $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - \alpha)^n$.
- Ako u Tejlorovoj formuli $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n + R_k(x)$, $R_k(x) \to 0$, $k \to \infty$, tada je f analitička funkcija u tački α.