

Dvostruki integrali

PREDAVANJA 5

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, oktobar 2024

Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

- Funkcija d , definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

je **rastojanje** (metrika) u $\mathbb{R}^2$.

- Okolina** tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **otvoren** ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D . Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **oblast**.
- Glatka kriva** u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je **zatvorena i ograničena oblast**.

Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

- Funkcija d , definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

je **rastojanje** (metrika) u $\mathbb{R}^2$.

- Okolina** tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **otvoren** ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D . Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **oblast**.
- Glatka kriva** u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je **zatvorena i ograničena oblast**.

Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

- Funkcija d , definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

je **rastojanje** (metrika) u $\mathbb{R}^2$.

- Okolina** tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **otvoren** ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D . Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **oblast**.
- Glatka kriva** u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je **zatvorena i ograničena oblast**.

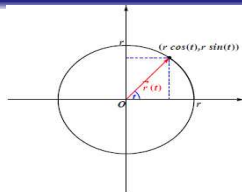
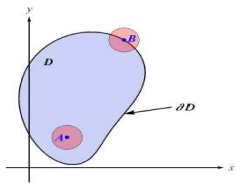
Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

- Funkcija d , definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa

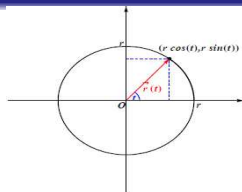
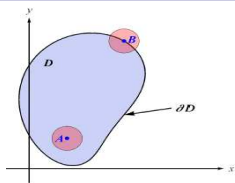
$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

je **rastojanje** (metrika) u $\mathbb{R}^2$.

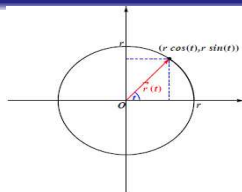
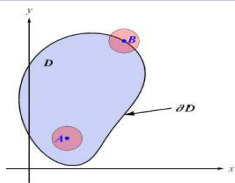
- Okolina** tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **otvoren** ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D . Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je **oblast**.
- Glatka kriva** u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je **zatvorena i ograničena oblast**.



- Zatvorena oblast je $D \cup \partial D$, gde je ∂D rub oblasti D .
- $D \subset \mathbb{R}^2$ je ograničen skup ako postoji $A \in D$ i $r > 0$ tako da je $D \subset O(A, r)$.
- Kriva može imati više parametrizacija, npr. ako je zatvorena i ograničena oblast $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, a kriva L je njen rub, tj. $L : x^2 + y^2 = r^2$,
 $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 : x = t, y = \sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]$,
 $L_2 : x = t, y = -\sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]$,
 $L : x = r \cos t, y = r \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

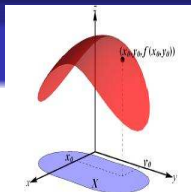


- Zatvorena oblast je $D \cup \partial D$, gde je ∂D rub oblasti D .
- $D \subset \mathbb{R}^2$ je ograničen skup ako postoji $A \in D$ i $r > 0$ tako da je $D \subset O(A, r)$.
- Kriva može imati više parametrizacija, npr. ako je zatvorena i ograničena oblast $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, a kriva L je njen rub, tj. $L : x^2 + y^2 = r^2$,
 $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 : x = t, y = \sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]$,
 $L_2 : x = t, y = -\sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]$,
 $L : x = r \cos t, y = r \sin t, t \in [0, 2\pi]$.



- Zatvorena oblast je $D \cup \partial D$, gde je ∂D rub oblasti D .
- $D \subset \mathbb{R}^2$ je ograničen skup ako postoji $A \in D$ i $r > 0$ tako da je $D \subset O(A, r)$.
- Kriva može imati više parametrizacija, npr. ako je zatvorena i ograničena oblast $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, a kriva L je njen rub, tj. $L : x^2 + y^2 = r^2$,
 $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 : x = t, y = \sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]$,
 $L_2 : x = t, y = -\sqrt{r^2 - t^2}, t \in [-r, r]$,
 $L : x = r \cos t, y = r \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

Površ



- Geometrijski, **površ** u $\mathbb{R}^3$ je grafik funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$,

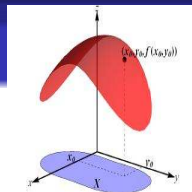
$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in X, z = f(x, y)\}.$$

- $V \subset \mathbb{R}^3$, V je zatvorena i ograničena oblast u $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in X \cup \partial X, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

- Opšta jednačina površi drugog reda je: $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$, gde su $A_1, A_2, \dots, D \in \mathbb{R}$ i bar jedan od brojeva $A_1, A_2, \dots, C_3$ je različit od nule.

Površ



- Geometrijski, **površ** u $\mathbb{R}^3$ je grafik funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$,

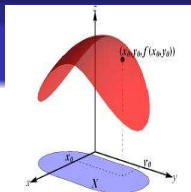
$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in X, z = f(x, y)\}.$$

- $V \subset \mathbb{R}^3$, V je zatvorena i ograničena oblast u $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in X \cup \partial X, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

- Opšta jednačina površi drugog reda je: $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$, gde su $A_1, A_2, \dots, D \in \mathbb{R}$ i bar jedan od brojeva $A_1, A_2, \dots, C_3$ je različit od nule.

Površ



- Geometrijski, **površ** u $\mathbb{R}^3$ je grafik funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$,

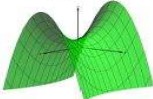
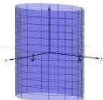
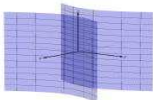
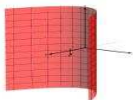
$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in X, z = f(x, y)\}.$$

- $V \subset \mathbb{R}^3$, V je zatvorena i ograničena oblast u $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in X \cup \partial X, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

- Opšta jednačina površi drugog reda je: $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$, gde su $A_1, A_2, \dots, D \in \mathbb{R}$ i bar jedan od brojeva $A_1, A_2, \dots, C_3$ je različit od nule.

Površii drugog reda

Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ $a, b, c > 0$ 	Jednokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$ $a, b, c > 0$ 	Dvokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$ $a, b, c > 0$ 
Eliptički paraboloid $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},$ $p, q > 0,$ 	Hiperbolički paraboloid $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$ $p, q > 0,$ 	Konus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ $a, b, c > 0$ 
Eliptički cilindar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $a, b > 0,$ 	Hiperbolički cilindar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $a, b > 0,$ 	Parabolički cilindar $y^2 = 2px,$ $p > 0$ 

Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ .

Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Svaka od njih ima **dijametar** $d(\sigma_i) = \max_{A, B \in \sigma_i} d(A, B)$ i **površinu** $\Delta\sigma_i$.

Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ nazivamo **podelom** T oblasti σ .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i)$.

U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ .

Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Svaka od njih ima

dijametar $d(\sigma_i) = \max_{A, B \in \sigma_i} d(A, B)$ i **površinu** $\Delta\sigma_i$.

Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ nazivamo **podelom** T oblasti σ .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i)$.

U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ .

Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Svaka od njih ima

dijametar $d(\sigma_i) = \max_{A, B \in \sigma_i} d(A, B)$ i **površinu** $\Delta\sigma_i$.

Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ nazivamo **podelom** T oblasti σ .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i)$.

U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ .

Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Svaka od njih ima

dijametar $d(\sigma_i) = \max_{A, B \in \sigma_i} d(A, B)$ i **površinu** $\Delta\sigma_i$.

Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ nazivamo **podelom** T oblasti σ .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i)$.

U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i, \quad (1)$$

za svaku podelu oblasti σ , nezavisno od izbora podoblasti σ_i i nezavisno od izbora tačaka M_i u podoblastima σ_i , tada tu graničnu vrednost nazivamo **dvostruki integral** funkcije f nad oblašću σ i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy.$$

U tom slučaju, za funkciju f kažemo da je **integrabilna** nad σ .

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i, \quad (1)$$

za svaku podelu oblasti σ , nezavisno od izbora podoblasti σ_i i nezavisno od izbora tačaka M_i u podoblastima σ_i , tada tu graničnu vrednost nazivamo **dvostruki integral** funkcije f nad oblašću σ i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy.$$

U tom slučaju, za funkciju f kažemo da je **integrabilna** nad σ .

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, važi

$$\iint_{\sigma} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\sigma_2} f(x, y) dx dy.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, važi

$$\iint_{\sigma} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\sigma_2} f(x, y) dx dy.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, važi

$$\iint_{\sigma} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\sigma_2} f(x, y) dx dy.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$, važi

$$\iint_{\sigma} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\sigma_2} f(x, y) dx dy.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\sigma} g(x, y) dx dy.$$

Osobine dvostrukog integrala

4) $\left| \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y)| \, dx dy$, za sve $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

5) Ako je $g = \inf_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$, $G = \sup_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$ i $\Delta\sigma$ je površina oblasti σ , tada važi

$$g\Delta\sigma \leq \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \leq G\Delta\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha, \beta) \in \sigma$ takva da je

$$\iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy = f(\alpha, \beta)\Delta\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ .

Osobine dvostrukog integrala

$$4) \left| \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y)| \, dx dy, \text{ za sve } f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}.$$

5) Ako je $g = \inf_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$, $G = \sup_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$ i $\Delta\sigma$ je površina oblasti σ , tada važi

$$g\Delta\sigma \leq \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \leq G\Delta\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha, \beta) \in \sigma$ takva da je

$$\iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy = f(\alpha, \beta)\Delta\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ .

Osobine dvostrukog integrala

$$4) \left| \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y)| \, dx dy, \text{ za sve } f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}.$$

5) Ako je $g = \inf_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$, $G = \sup_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$ i $\Delta\sigma$ je površina oblasti σ , tada važi

$$g\Delta\sigma \leq \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \leq G\Delta\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha, \beta) \in \sigma$ takva da je

$$\iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy = f(\alpha, \beta)\Delta\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ .

Osobine dvostrukog integrala

$$4) \left| \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y)| \, dx dy, \text{ za sve } f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}.$$

5) Ako je $g = \inf_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$, $G = \sup_{(x,y) \in \sigma} f(x, y)$ i $\Delta\sigma$ je površina oblasti σ , tada važi

$$g\Delta\sigma \leq \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy \leq G\Delta\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha, \beta) \in \sigma$ takva da je

$$\iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy = f(\alpha, \beta)\Delta\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ .

Osobine dvostrukog integrala

8) Ako je f ograničena nad σ i neprekidna u svim tačkama oblasti σ , osim u tačkama koje leže na konačno mnogo glatkih krivih, tada je f integrabilna nad σ .

9) Ako je $f(x, y) \geq 0$, za sve $(x, y) \in \sigma$, tada je

$$\Delta V = \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy,$$

gde je ΔV zapremina cilindričnog tela V čija je donja osnova površ σ , omotač dobijen kretanjem izvodnice paralelne z-osi duž ruba oblasti σ , a gornja osnova je površ koju izvodnica iseca na površi $z = f(x, y)$.

10) Ako je $f(x, y) = 1$, za sve $(x, y) \in \sigma$, površina oblasti σ je

$$\Delta \sigma = \iint_{\sigma} dx dy.$$

Osobine dvostrukog integrala

8) Ako je f ograničena nad σ i neprekidna u svim tačkama oblasti σ , osim u tačkama koje leže na konačno mnogo glatkih krivih, tada je f integrabilna nad σ .

9) Ako je $f(x, y) \geq 0$, za sve $(x, y) \in \sigma$, tada je

$$\Delta V = \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy,$$

gde je ΔV zapremina cilindričnog tela V čija je donja osnova površ σ , omotač dobijen kretanjem izvodnice paralelne z -osi duž ruba oblasti σ , a gornja osnova je površ koju izvodnica iseca na površi $z = f(x, y)$.

10) Ako je $f(x, y) = 1$, za sve $(x, y) \in \sigma$, površina oblasti σ je

$$\Delta \sigma = \iint_{\sigma} dx dy.$$

Osobine dvostrukog integrala

8) Ako je f ograničena nad σ i neprekidna u svim tačkama oblasti σ , osim u tačkama koje leže na konačno mnogo glatkih krivih, tada je f integrabilna nad σ .

9) Ako je $f(x, y) \geq 0$, za sve $(x, y) \in \sigma$, tada je

$$\Delta V = \iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy,$$

gde je ΔV zapremina cilindričnog tela V čija je donja osnova površ σ , omotač dobijen kretanjem izvodnice paralelne z -osi duž ruba oblasti σ , a gornja osnova je površ koju izvodnica iseca na površi $z = f(x, y)$.

10) Ako je $f(x, y) = 1$, za sve $(x, y) \in \sigma$, površina oblasti σ je

$$\Delta \sigma = \iint_{\sigma} dx dy.$$

Primer

Po definiciji izračunati $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx dy$.

Rešenje: Funkcija $f(x, y) = xy$ je neprekidna nad oblašću $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Pravama $x = \frac{i}{n}$, $y = \frac{k}{n}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ delimo σ na podoblasti σ_{ik} , tj. kvadrate površine $\Delta\sigma_{ik} = \frac{1}{n^2}$. Dalje, uzimajući gornja desna temena $M_{ik} \in \sigma_{ik}$ svakog od kvadrata σ_{ik} , kako je $f(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}) = \frac{ik}{n^2}$, dobija se

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} xy \, dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{ik}{n^2} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{k=1}^n k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Izračunavanje dvostrukog integrala

Neka je

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Teorema

Neka je $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad zatvorenim oblašću $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, $a < b$, i neka su $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada je

$$\iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Izračunavanje dvostrukog integrala

Neka je

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Teorema

Neka je $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad zatvorenom oblašću $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, $a < b$, i neka su $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada je

$$\iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Izračunavanje dvostrukog integrala

Slično, ako je

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

f je neprekidna realna funkcija nad zatvorenom oblašću σ i funkcije $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ su neprekidne, tada je

$$\iint_{\sigma} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Primer

Izračunati $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx dy$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} xy \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 xy \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big|_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Primer

Izmeniti redosled integracije $I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy$, $a > 0$.

Rešenje: Kako je $y = \sqrt{2ax} \Leftrightarrow (\frac{y^2}{2a} = x \wedge y \geq 0)$, dok je $y = \sqrt{2ax-x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2 \wedge y \geq 0$, a odatle je $x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$, te se dalje dobija

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \\
 &+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx.
 \end{aligned}$$

Primer

Izračunati površinu oblasti ograničenu graficima funkcija $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \iint_{\sigma} dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Primer

Koristeći dvostruki integral izračunati zapreminu tela

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2 - x - y\}.$$

Rešenje: Kako je projekcija tela V u xOy koordinatnu ravan oblast $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$, dobijamo

$$\begin{aligned} \Delta V &= \iint_{\sigma} (2 - x - y) \, dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2 - x - y) \, dy \\ &= \int_0^2 \left(2y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 \left(2(2-x) - x(2-x) - \frac{(2-x)^2}{2} \right) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Izračunavanje površine površi

Neka je S dvostrana, glatka površ,

$S : z = f(x, y), (x, y) \in \sigma,$

z'_x, z'_y neprekidni prvi izvodi nad zatvorenom oblasti $\sigma = \text{proj}_{xOy} S,$

i $\cos \gamma = \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{k}}{|\vec{n}_0| |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},$ gde je ugao $\gamma = \angle(\vec{n}_0, \vec{k}).$

Vektor normale na površ S u tački je vektor normale na tangentnu ravan u toj tački, tj.

$\vec{n}_0 = \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}, -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \right).$ Kako je $\Delta S =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_i}{\cos \gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} \Delta \sigma_i,$ jer je $\Delta \sigma_i = a \cdot b = a \cdot c \cdot \cos \gamma = \Delta S_i \cdot \cos \gamma,$ dobijamo

$$\Delta S = \iint_{\sigma = \text{proj}_{xOy} S} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy.$$

Izračunavanje površine površi

Ako je S dvostrana, glatka površ

$S : x = x(t, u), y = y(t, u), z = z(t, u), (t, u) \in D,$

gde je $D \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena glatkom krivom L ,

(površ je glatka ako je preslikavanje D u S obostrano jednoznačno,

svi parcijalni izvodi funkcija $x = x(t, u), y = y(t, u), z = z(t, u)$ su

neprekidni i rang matrice $\begin{bmatrix} x'_t & y'_t & z'_t \\ x'_u & y'_u & z'_u \end{bmatrix}$ je 2 a sve $(t, u) \in D$),

tada je

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{AB - C^2} dt du,$$

gde je $A = x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2, B = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2,$

$C = x_t'x_u' + y_t'y_u' + z_t'z_u'.$

Smena promenljivih u dvostrukom integralu

- Preslikavanje $T : x = x(u, v), y = y(u, v)$ uzajamno jednoznačno preslikava otvorenu oblast θ ravni uOv u otvorenu oblast θ' ravni xOy .
- Funkcije $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$ su neprekidne kao i svi njihovi prvi parcijalni izvodi nad θ .
- Jakobijan je različit od 0, tj. $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$,
 $u, v \in \theta$.

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \iint_{\omega} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Smena polarnim koordinatama

Smena je $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, a Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Primer

Naći $\int\int_{\sigma} e^{x^2+y^2} dx dy$ gde je σ deo prstena $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ u prvom kvadrantu.

Rešenje: Uvodimo smenu: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $|J| = r$.

$$\int\int_{\sigma} e^{x^2+y^2} dx dy = \int\int_{\omega} e^{r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 r e^{r^2} dr = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} (e^4 - e).$$

Primer

Izračunati površinu površi

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - x^2 - y^2, z > 0\}.$$

Rešenje: Projekcija površi S u xOy ravan je $\sigma : x^2 + y^2 \leq 2$, i $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, te uvodimo smenu: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|J| = r$.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \iint_{\sigma = \text{proj}_{xOy} S} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \\ &= 2\pi \frac{1}{8} \frac{2}{3} \sqrt{(1 + 4r^2)^3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}. \end{aligned}$$