Dvostruki integrali

PREDAVANJA 5

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, oktobar 2024

Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

- Funkcija d, definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa
$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$
je rastojanje (metrika) u $\mathbb{R}^2$.
- Okolina tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A,M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je otvoren ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D. Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je oblast.
- Glatka kriva u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ $(L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n)$.
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je zatvorena i ograničena oblast.

Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

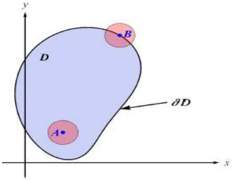
- Funkcija d, definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa
$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$
je rastojanje (metrika) u $\mathbb{R}^2$.
- Okolina tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(A, M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je otvoren ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D. Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je oblast.
- Glatka kriva u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$).
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je zatvorena i ograničena oblast.

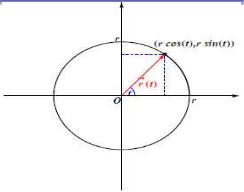
Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

- Funkcija d, definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa
$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$
je rastojanje (metrika) u $\mathbb{R}^2$.
- Okolina tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je otvoren ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D. Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je oblast.
- Glatka kriva u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ $(L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n)$.
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je zatvorena i ograničena oblast.

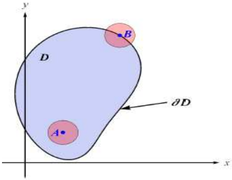
Krive i oblasti u $\mathbb{R}^2$

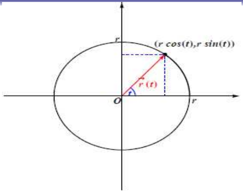
- Funkcija d, definisana za sve $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sa
$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$
je rastojanje (metrika) u $\mathbb{R}^2$.
- Okolina tačke $A \in \mathbb{R}^2$, za neko $r > 0$, sadrži loptu $L(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$. Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je otvoren ako za svaku tačku iz D postoji okolina koja je cela sadržana u D. Otvoren i povezan skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je oblast.
- Glatka kriva u ravni je definisana neprekidnom funkcijom čiji je prvi izvod takođe neprekidna funkcija. Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ $(L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n)$.
- Svaka zatvorena kriva L deli ravan na dve otvorene oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Unija ograničene oblasti i krive je zatvorena i ograničena oblast.



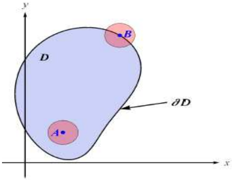


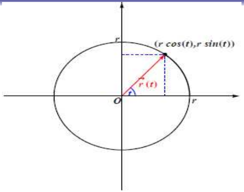
- Zatvorena oblast je $D \cup \partial D$, gde je ∂D rub oblasti D.
- $D \subset \mathbb{R}^2$ je ograničen skup ako postoji $A \in D$ i $r > 0$ tako da je $D \subset O(A, r)$.
- Kriva može imati više parametrizacija, npr. ako je zatvorena i ograničena oblast $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le r^2\}$, a kriva L je njen rub, tj. $L: \; x^2 + y^2 = r^2$,
$L = L_1 \cup L_2$, $L_1: \; x = t, \; y = \sqrt{r^2 - t^2}$, $t \in [-r, r]$,
$L_2: x = t, \; y = -\sqrt{r^2 - t^2}$, $t \in [-r, r]$,
$L: \; x = r\cos t, \; y = r\sin t, \; t \in [0, 2\pi]$.





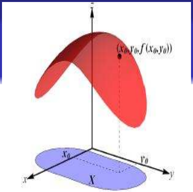
- Zatvorena oblast je $D \cup \partial D$, gde je ∂D rub oblasti D.
- $D \subset \mathbb{R}^2$ je ograničen skup ako postoji $A \in D$ i $r > 0$ tako da je $D \subset O(A, r)$.
- Kriva može imati više parametrizacija, npr. ako je zatvorena i ograničena oblast $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$, a kriva L je njen rub, tj. $L : x^2 + y^2 = r^2$,
  $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 : x = t, \; y = \sqrt{r^2 - t^2}, \; t \in [-r, r]$,
  $L_2 : x = t, \; y = -\sqrt{r^2 - t^2}, \; t \in [-r, r]$,
  $L : \; x = r \cos t, \; y = r \sin t, \; t \in [0, 2\pi]$.





- Zatvorena oblast je $D \cup \partial D$, gde je ∂D rub oblasti D.
- $D \subset \mathbb{R}^2$ je ograničen skup ako postoji $A \in D$ i $r > 0$ tako da je $D \subset O(A, r)$.
- Kriva može imati više parametrizacija, npr. ako je zatvorena i ograničena oblast $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$, a kriva L je njen rub, tj. $L: \ x^2 + y^2 = r^2$,
  $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 : \ x = t, \ \ y = \sqrt{r^2 - t^2}$, $t \in [-r, r]$,
  $L_2 : x = t, \ \ y = -\sqrt{r^2 - t^2}$, $t \in [-r, r]$,
  $L : \ x = r \cos t, \ \ y = r \sin t, \ t \in [0, 2\pi]$.

Površi



- Geometrijski, površ u $\mathbb{R}^3$ je grafik funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$,

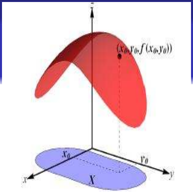
$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in X, z = f(x, y)\}.$$

- $V \subset \mathbb{R}^3$, V je zatvorena i ograničena oblast u $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in X \cup \partial X,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

- Opšta jednačina površi drugog reda je: $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$, gde su $A_1, A_2, \ldots, D \in \mathbb{R}$ i bar jedan od brojeva $A_1, A_2, \ldots, C_3$ je različit od nule.

Površi



- Geometrijski, površ u $\mathbb{R}^3$ je grafik funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$,

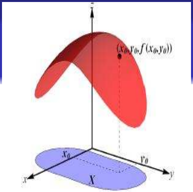
$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in X, z = f(x, y)\}.$$

- $V \subset \mathbb{R}^3$, V je zatvorena i ograničena oblast u $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in X \cup \partial X,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

- Opšta jednačina površi drugog reda je: $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$, gde su $A_1, A_2, \ldots, D \in \mathbb{R}$ i bar jedan od brojeva $A_1, A_2, \ldots, C_3$ je različit od nule.

Površi



- Geometrijski, površ u $\mathbb{R}^3$ je grafik funkcije $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$,

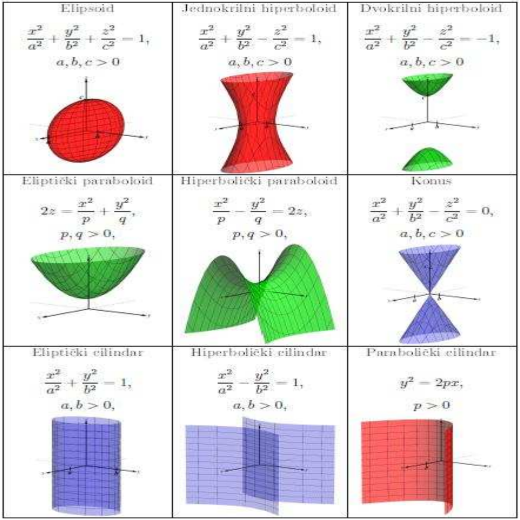
$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in X, z = f(x,y)\}.$$

- $V \subset \mathbb{R}^3$, V je zatvorena i ograničena oblast u $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in X \cup \partial X,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

- Opšta jednačina površi drugog reda je: $A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$, gde su $A_1, A_2, \ldots, D \in \mathbb{R}$ i bar jedan od brojeva $A_1, A_2, \ldots, C_3$ je različit od nule.

Površi drugog reda



Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ.

Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Svaka od njih ima dijametar $d(\sigma_i) = \max\limits_{A,B\in\sigma_i} d(A, B)$ i površinu $\triangle\sigma_i$.

Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ nazivamo podelom T oblasti σ.
Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(\sigma_i)$.

U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle\sigma_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ.
Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Svaka od njih ima dijametar $d(\sigma_i) = \max\limits_{A,B\in\sigma_i} d(A, B)$ i površinu $\triangle\sigma_i$.
Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ nazivamo podelom T oblasti σ.
Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(\sigma_i)$.
U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle\sigma_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ.
Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Svaka od njih ima dijametar $d(\sigma_i) = \max\limits_{A,B\in\sigma_i} d(A, B)$ i površinu $\triangle\sigma_i$.
Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ nazivamo podelom T oblasti σ.
Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1\le i\le n} d(\sigma_i)$.
U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle\sigma_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dvostruki integral

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena po delovima glatkim krivama i neka je $f : \sigma \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena nad σ.
Pravimo particiju σ pomoću mreže glatkih krivih na konačan broj elementarnih oblasti σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Svaka od njih ima dijametar $d(\sigma_i) = \max\limits_{A,B\in\sigma_i} d(A, B)$ i površinu $\triangle\sigma_i$.
Skup $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ nazivamo podelom T oblasti σ.
Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1\le i\le n} d(\sigma_i)$.
U svakoj od oblasti σ_i odaberemo tačku $M_i \in \sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle\sigma_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i, \tag{1}$$

za svaku podelu oblasti σ, nezavisno od izbora podoblasti σ_i i nezavisno od izbora tačaka M_i u podoblastima σ_i, tada tu graničnu vrednost nazivamo dvostruki integral funkcije f nad oblašću σ i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma = \iint_{\sigma} f(x,y)\,dxdy.$$

U tom slučaju, za funkciju f kažemo da je integrabilna nad σ.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i, \tag{1}$$

za svaku podelu oblasti σ, nezavisno od izbora podoblasti σ_i i nezavisno od izbora tačaka M_i u podoblastima σ_i, tada tu graničnu vrednost nazivamo dvostruki integral funkcije f nad oblašću σ i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma = \iint_{\sigma} f(x,y)\,dxdy.$$

U tom slučaju, za funkciju f kažemo da je integrabilna nad σ.

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \to \mathbb{R}$, $g : \sigma \to \mathbb{R}$, važi

$$\iint\limits_{\sigma} \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)\, dxdy = \alpha \iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_{\sigma} g(x,y)dxdy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint\limits_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} f(x,y)\, dxdy.$$

3) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, dxdy \leq \iint\limits_{\sigma} g(x,y)\, dxdy.$$

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \to \mathbb{R}$, $g : \sigma \to \mathbb{R}$, važi

$$\iint\limits_{\sigma} \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) dxdy = \alpha \iint\limits_{\sigma} f(x,y) dxdy + \beta \iint\limits_{\sigma} g(x,y) dxdy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint\limits_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} f(x,y)\, dxdy.$$

3) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, dxdy \leq \iint\limits_{\sigma} g(x,y)\, dxdy.$$

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \to \mathbb{R}$, $g : \sigma \to \mathbb{R}$, važi

$$\iint_{\sigma} \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)\, dxdy = \alpha \iint_{\sigma} f(x,y) dxdy + \beta \iint_{\sigma} g(x,y) dxdy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x,y)\, dxdy = \iint_{\sigma_1} f(x,y)\, dxdy + \iint_{\sigma_2} f(x,y)\, dxdy.$$

3) Ako je $f(x,y) \le g(x,y)$, za sve $(x,y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint_{\sigma} f(x,y)\, dxdy \le \iint_{\sigma} g(x,y)\, dxdy.$$

Osobine dvostrukog integrala

Neka su realne funkcije dve promenljive f i g integrabilne nad odgovarajućim oblastima.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : \sigma \to \mathbb{R}$, $g : \sigma \to \mathbb{R}$, važi

$$\iint\limits_{\sigma} \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)\, dxdy = \alpha \iint\limits_{\sigma} f(x,y) dxdy + \beta \iint\limits_{\sigma} g(x,y) dxdy.$$

2) Ako su σ_1 i σ_2 dve oblasti bez zajedničkih unutrašnjih tačaka, tada važi

$$\iint\limits_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} f(x,y)\, dxdy.$$

3) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in \sigma$, tada važi

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\, dxdy \leq \iint\limits_{\sigma} g(x,y)\, dxdy.$$

Osobine dvostrukog integrala

4) $\left|\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_{\sigma} |f(x,y)|\,dxdy,$ za sve $f:\sigma \to \mathbb{R}$.

5) Ako je $g = \inf\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$, $G = \sup\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$ i $\triangle\sigma$ je površina oblasti σ, tada važi

$$g\triangle\sigma \leq \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \leq G\triangle\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha,\beta)\in\sigma$ takva da je

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = f(\alpha,\beta)\triangle\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ.

Osobine dvostrukog integrala

4) $\left|\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{\sigma} |f(x,y)|\,dxdy, \text{ za sve } f:\sigma\to\mathbb{R}.$

5) Ako je $g = \inf\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$, $G = \sup\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$ i $\triangle\sigma$ je površina oblasti σ, tada važi

$$g\triangle\sigma \le \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \le G\triangle\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha,\beta)\in\sigma$ takva da je

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = f(\alpha,\beta)\triangle\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ.

Osobine dvostrukog integrala

4) $\left|\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_{\sigma} |f(x,y)|\,dxdy, \text{ za sve } f:\sigma\to\mathbb{R}.$

5) Ako je $g = \inf\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$, $G = \sup\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$ i $\triangle\sigma$ je površina oblasti σ, tada važi

$$g\triangle\sigma \leq \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \leq G\triangle\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha,\beta)\in\sigma$ takva da je

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = f(\alpha,\beta)\triangle\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ.

Osobine dvostrukog integrala

4) $\left|\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{\sigma} |f(x,y)|\,dxdy,\ \text{za sve } f:\sigma \to \mathbb{R}.$

5) Ako je $g = \inf\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$, $G = \sup\limits_{(x,y)\in\sigma} f(x,y)$ i $\triangle\sigma$ je površina oblasti σ, tada važi

$$g\triangle\sigma \le \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy \le G\triangle\sigma.$$

6) Ako je f neprekidna nad σ tada postoji bar jedna tačka $(\alpha,\beta)\in\sigma$ takva da je

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = f(\alpha,\beta)\triangle\sigma.$$

7) Ako je f neprekidna nad zatvorenom oblašću σ tada je f integrabilna nad σ.

Osobine dvostrukog integrala

8) Ako je f ograničena nad σ i neprekidna u svim tačkama oblasti σ, osim u tačkama koje leže na konačno mnogo glatkih krivih, tada je f integrabilna nad σ.

9) Ako je $f(x,y) \geq 0$, za sve $(x,y) \in \sigma$, tada je

$$\boxed{\triangle V = \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy,}$$

gde je $\triangle V$ zapremina cilindričnog tela V čija je donja osnova površ σ, omotač dobijen kretanjem izvodnice paralelne z-osi duž ruba oblasti σ, a gornja osnova je površ koju izvodnica iseca na površi $z = f(x,y)$.

10) Ako je $f(x,y) = 1$, za sve $(x,y) \in \sigma$, površina oblasti σ je

$$\boxed{\triangle \sigma = \iint\limits_{\sigma} dxdy.}$$

Osobine dvostrukog integrala

8) Ako je f ograničena nad σ i neprekidna u svim tačkama oblasti σ, osim u tačkama koje leže na konačno mnogo glatkih krivih, tada je f integrabilna nad σ.

9) Ako je $f(x,y) \geq 0$, za sve $(x,y) \in \sigma$, tada je

$$\boxed{\triangle V = \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy,}$$

gde je $\triangle V$ zapremina cilindričnog tela V čija je donja osnova revrš σ, omotač dobijen kretanjem izvodnice paralelne z-osi duž ruba oblasti σ, a gornja osnova je površ koju izvodnica iseca na površi $z = f(x,y)$.

10) Ako je $f(x,y) = 1$, za sve $(x,y) \in \sigma$, površina oblasti σ je

$$\boxed{\triangle \sigma = \iint\limits_{\sigma} dxdy.}$$

Osobine dvostrukog integrala

8) Ako je f ograničena nad σ i neprekidna u svim tačkama oblasti σ, osim u tačkama koje leže na konačno mnogo glatkih krivih, tada je f integrabilna nad σ.

9) Ako je $f(x,y) \geq 0$, za sve $(x,y) \in \sigma$, tada je

$$\boxed{\triangle V = \iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy,}$$

gde je $\triangle V$ zapremina cilindričnog tela V čija je donja osnova posrš σ, omotač dobijen kretanjem izvodnice paralelne z-osi duž ruba oblasti σ, a gornja osnova je površ koju izvodnica iseca na površi $z = f(x,y)$.

10) Ako je $f(x,y) = 1$, za sve $(x,y) \in \sigma$, površina oblasti σ je

$$\boxed{\triangle \sigma = \iint\limits_{\sigma} dxdy.}$$

Primer

Po definiciji izračunati $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} xy\,dxdy$.

Rešenje: *Funkcija* $f(x,y) = xy$ *je neprekidna nad oblašću* $\sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$. *Pravama* $x=\frac{i}{n}$, $y=\frac{k}{n}$, $i,k=1,2,\dots,n$ *delimo* σ *na podoblasti* σ_{ik}, *tj. kvadrate površine* $\triangle\sigma_{ik} = \frac{1}{n^2}$. *Dalje, uzimajući gornja desna temena* $M_{ik}\in\sigma_{ik}$ *svakog od kvadrata* σ_{ik}, *kako je* $f(\frac{i}{n},\frac{k}{n}) = \frac{ik}{n^2}$, *dobija se*

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma} xy\,dxdy &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{ik}{n^2}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{k=1}^{n} k\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Izračunavanje dvostrukog integrala

Neka je

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Teorema

Neka je $f : \sigma \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad zatvorenom oblašću $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, $a < b$, i neka su $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada je

$$\iint_\sigma f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Izračunavanje dvostrukog integrala

Neka je

$$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Teorema

Neka je $f : \sigma \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija nad zatvorenom oblašću* $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, $a < b$, *i neka su* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *i* $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidne funkcije. Tada je*

$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Izračunavanje dvostrukog integrala

Slično, ako je

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

f je neprekidna realna funkcija nad zatvorenom oblašću σ i funkcije $\gamma, \delta : [c, d] \to \mathbb{R}$ su neprekidne, tada je

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Primer

Izračunati $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} xy\,dxdy.$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma} xy\,dxdy &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 xy\,dy\right) dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 xy\,dy\\ &= \int\limits_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_0^1 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Primer

Izmeniti redosled integracije $I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\, dy,\ a > 0.$

<u>*Rešenje:*</u> *Kako je* $y = \sqrt{2ax} \Leftrightarrow (\frac{y^2}{2a} = x \wedge y \geq 0)$, *dok je* $y = \sqrt{2ax - x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2ax + y^2 = 0 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2 \wedge y \geq 0$, *a odatle je* $x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$, *te se dalje dobija*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \\ &+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx. \end{aligned}$$

Primer

Izračunati površinu oblasti ograničenu graficima funkcija $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}\triangle\sigma = \iint_\sigma dxdy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Primer

Koristeći dvostruki integral izračunati zapreminu tela $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le z \le 2 - x - y\}$.

Rešenje: Kako je projekcija tela V *u* $x0y$ *koordinatnu ravan oblast* $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2 - x\}$, *dobijamo*

$$
\begin{aligned}
\triangle V &= \iint\limits_{\sigma} (2 - x - y)\, dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2 - x - y)\, dy \\
&= \int_0^2 \left(2y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-x} dx \\
&= \int_0^2 \left(2(2-x) - x(2-x) - \frac{(2-x)^2}{2}\right) dx = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Izračunavanje površine površi

Neka je S dvostrana, glatka površ,
$S : z = f(x, y)$, $(x, y) \in \sigma$,
z'_x, z'_y neprekidni prvi izvodi nad zatvorenom oblasti $\sigma = proj_{x0y} S$,
i $\cos\gamma = \frac{\vec{n_0}\cdot\vec{k}}{|\vec{n_0}||\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$, gde je ugao $\gamma = \sphericalangle(\vec{n_0}, \vec{k})$.
Vektor normale na površ S u tački je vektor normale na tangentnu ravan u toj tački, tj.
$\vec{n_0} = \left(-\frac{z'^2_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, -\frac{z'^2_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}\right)$. Kako je $\triangle S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\triangle S_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\triangle\sigma_i}{\cos\gamma} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\triangle\sigma_i$, jer je
$\triangle\sigma_i = a\cdot b = a\cdot c\cdot\cos\gamma = \triangle S_i\cdot\cos\gamma$, dobijamo

$$\boxed{\triangle S = \iint\limits_{\sigma=proj_{x0y} S} \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\, dxdy.}$$

Izračunavanje površine površi

Ako je S dvostrana, glatka površ
$S : x = x(t,u),\ y = y(t,u),\ z = z(t,u),\ (t,u) \in D,$
gde je $D \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena glatkom krivom L, (površ je glatka ako je preslikavanje D u S obostrano jednoznačno, svi parcijalni izvodi funkcija $x = x(t,u)$, $y = y(t,u)$, $z = z(t,u)$ su neprekidni i rang matrice $\begin{bmatrix} x'_t & y'_t & z'_t \\ x'_u & y'_u & z'_u \end{bmatrix}$ je 2 a sve $(t,u) \in D$),
tada je

$$\boxed{\triangle S = \iint\limits_D \sqrt{AB - C^2}\, dtdu,}$$

gde je $A = x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t$, $B = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$,
$C = x'_t x'_u + y'_t y'_u + z'_t z'_u$.

Smena promenljivih u dvostrukom integralu

- Preslikavanje $T : x = x(u, v),\ \ y = y(u, v)$ uzajamno jednoznačno preslikava otvorenu oblast θ ravni $u0v$ u otvorenu oblast θ' ravni $x0y$.
- Funkcije $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$ su neprekidne kao i svi njihovi prvi parcijalni izvodi nad θ.
- Jakobijan je različit od 0, tj. $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$, $u, v \in \theta$.

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{\omega} f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|\, dudv.}$$

Smena polarnim koordinatama

Smena je $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, a Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Primer

Naći $\iint\limits_{\sigma} e^{x^2+y^2}\,dxdy$ *gde je* σ *deo prstena* $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ *u prvom kvadrantu.*

Rešenje: Uvodimo smenu: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $1 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $|J| = r$.

$$\iint\limits_{\sigma} e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{\omega} e^{r^2} r\,drd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 re^{r^2}\,dr = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}(e^4 - e).$$

Primer

Izračunati površinu površi
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 2 - x^2 - y^2,\, z > 0\}$.
Rešenje: *Projekcija površi* S *u* $x0y$ *ravan je* $\sigma : x^2 + y^2 \leq 2$, *i* $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, *te uvodimo smenu:* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|J| = r$.

$$\begin{aligned}\triangle S &= \iint\limits_{\sigma = proj_{x0y} S} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= 2\pi \frac{1}{8}\frac{2}{3}\sqrt{(1 + 4r^2)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.\end{aligned}$$