Krivolinijski integrali

PREDAVANJA 6 i 7

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, novembar 2024

Krivolinijski integral

Neka su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, $t \in [a, b]$ neprekidne funkcije.

- Vektorska jednačina prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

  gde je $\vec{r}(t)$ vektor položaja tačke.

- Skalarna jednačina prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

  za $t = a$ početna tačka je $A(x(a), y(a), z(a))$, a za $t = b$ krajnja tačka je $B(x(b), y(b), z(b))$.

- Skalarna jednačina ravne krive $L \subset \mathbb{R}^2$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Krivolinijski integral

Neka su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, $t \in [a, b]$ neprekidne funkcije.

- Vektorska jednačina prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

gde je $\vec{r}(t)$ vektor položaja tačke.

- Skalarna jednačina prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

za $t = a$ početna tačka je $A(x(a), y(a), z(a))$, a za $t = b$ krajnja tačka je $B(x(b), y(b), z(b))$.

- Skalarna jednačina ravne krive $L \subset \mathbb{R}^2$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Krivolinijski integral

Neka su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, $t \in [a, b]$ neprekidne funkcije.

- Vektorska jednačina prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

gde je $\vec{r}(t)$ vektor položaja tačke.

- Skalarna jednačina prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

za $t = a$ početna tačka je $A(x(a), y(a), z(a))$, a za $t = b$ krajnja tačka je $B(x(b), y(b), z(b))$.

- Skalarna jednačina ravne krive $L \subset \mathbb{R}^2$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Krivolinijski integral

- L je glatka kriva ako su $x_t'(t)$ i $y_t'(t)$ neprekidne funkcije i $x_t'^2(t) + y_t'^2(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ $(L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n)$.
- Kriva L je Žordanova (prosta) ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- Putanja je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

Krivolinijski integral

- L je glatka kriva ako su $x_t'(t)$ i $y_t'(t)$ neprekidne funkcije i $x_t'^2(t) + y_t'^2(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ $(L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n)$.
- Kriva L je Žordanova (prosta) ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- Putanja je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

Krivolinijski integral

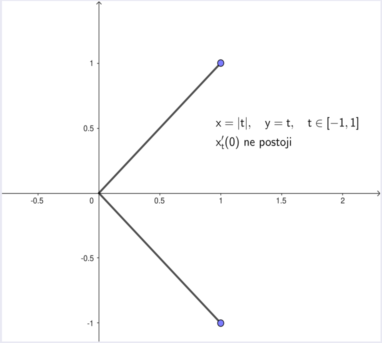
- L je glatka kriva ako su $x_t'(t)$ i $y_t'(t)$ neprekidne funkcije i $x_t'^2(t) + y_t'^2(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ $(L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n)$.
- Kriva L je Žordanova (prosta) ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- Putanja je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

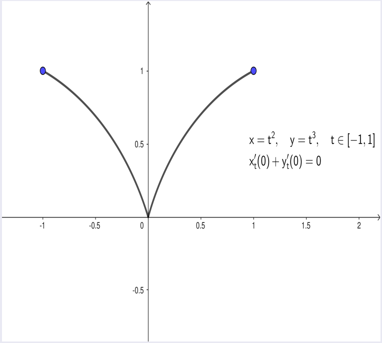
Krivolinijski integral

- L je glatka kriva ako su $x_t'(t)$ i $y_t'(t)$ neprekidne funkcije i $x_t'^2(t) + y_t'^2(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je glatka po delovima (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i, $i = 1, 2 \dots, n$ $(L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n)$.
- Kriva L je Žordanova (prosta) ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- Putanja je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

Primer

Sledeće krive nisu glatke, ali jesu po delovima glatke krive.





Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u $x0y$ ravni i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L.

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to podela T putanje L. Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \dots, n$, redom, označimo sa $\triangle l_i$.

Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1 \le i \le n} \triangle l_i$.

Između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \dots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \triangle l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \triangle l_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u $x0y$ ravni i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L.
Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to podela T putanje L. Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, redom, označimo sa $\triangle l_i$.
Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1 \le i \le n} \triangle l_i$.
Između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle l_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u $x0y$ ravni i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L.
Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to podela T putanje L. Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, redom, označimo sa $\triangle l_i$.
Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \triangle l_i$.
Između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle l_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u $x0y$ ravni i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L.

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to podela T putanje L. Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, redom, označimo sa $\triangle l_i$.

Parametar podele T je $\mu(T) = \max\limits_{1 \le i \le n} \triangle l_i$.

Između tačaka T_{i-1} i T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle l_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle l_i, \tag{1}$$

za svaku podelu putanje L, nezavisno od izbora podlukova $\widehat{T_{i-1}T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i na podlukovima $\widehat{T_{i-1}T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo krivolinijski integral po dužini krive funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle l_i = \int_L f(x,y)\,dl = \int_{L(A,B)} f(x,y)\,dl.$$

Ukoliko je putanja zatvorena, koristimo oznaku $\oint_L f(x,y)\,dl$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle l_i, \tag{1}$$

za svaku podelu putanje L, nezavisno od izbora podlukova $\widehat{T_{i-1}T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i na podlukovima $\widehat{T_{i-1}T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo krivolinijski integral po dužini krive funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle l_i = \int_L f(x,y)\,dl = \int_{L(A,B)} f(x,y)\,dl.$$

Ukoliko je putanja zatvorena, koristimo oznaku $\oint_L f(x,y)\,dl$.

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int\limits_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)\, dl = \alpha \int\limits_L f(x,y) dl + \beta \int\limits_L g(x,y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\, dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)\, dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)\, dl.$$

3) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in L$, tada važi

$$\int\limits_L f(x,y)\, dl \leq \int\limits_L g(x,y)\, dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) dl = \alpha \int_L f(x,y) dl + \beta \int_L g(x,y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\, dl = \int_{L_1} f(x,y)\, dl + \int_{L_2} f(x,y)\, dl.$$

3) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in L$, tada važi

$$\int_L f(x,y)\, dl \leq \int_L g(x,y)\, dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int\limits_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) dl = \alpha \int\limits_L f(x,y) dl + \beta \int\limits_L g(x,y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\, dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)\, dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)\, dl.$$

3) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in L$, tada važi

$$\int\limits_L f(x,y)\, dl \leq \int\limits_L g(x,y)\, dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) dl = \alpha \int_L f(x,y) dl + \beta \int_L g(x,y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\, dl = \int_{L_1} f(x,y)\, dl + \int_{L_2} f(x,y)\, dl.$$

3) Ako je $f(x,y) \leq g(x,y)$, za sve $(x,y) \in L$, tada važi

$$\int_L f(x,y)\, dl \leq \int_L g(x,y)\, dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

4) $\left|\int\limits_L f(x,y)\,dl\right| \leq \int\limits_L |f(x,y)|\,dl, \text{ za sve } f : D \to \mathbb{R},\ L \subset D.$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x,y) > 0$, za sve $(x,y) \in L$, tada $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ postoji i jednak je površini cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z-osi, ograničenoj sa $x0y$ ravni i površi $z = f(x,y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L: \ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$, tada je $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\,dt$ i važi

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\,dt.}$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

4) $\left|\int\limits_L f(x,y)\,dl\right| \leq \int\limits_L |f(x,y)|\,dl,\ \text{za sve } f: D \to \mathbb{R},\ L \subset D.$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x,y) > 0$, za sve $(x,y) \in L$, tada $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ postoji i jednak je površini cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z-osi, ograničenoj sa $x0y$ ravni i površi $z = f(x,y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L:\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$, tada je $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\,dt$ i važi

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\,dt.}$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

4) $\left|\int\limits_L f(x,y)\,dl\right| \le \int\limits_L |f(x,y)|\,dl,$ za sve $f : D \to \mathbb{R},\ L \subset D.$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x,y) > 0$, za sve $(x,y) \in L$, tada $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ postoji i jednak je površini cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z-osi, ograničenoj sa $x0y$ ravni i površi $z = f(x,y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L:\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$, tada je $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\,dt$ i važi

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\,dt.}$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L: \; y = y(x), \; x \in [a, b]$, tada je

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

8) Dužina luka krive L od tačke A do tačke B je

$$\boxed{\triangle l = \int\limits_{L(A,B)} dl = \int\limits_a^b \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\, dt.}$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L: \ y = y(x), \ x \in [a, b]$, tada je

$$\int_L f(x, y)\, dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

8) Dužina luka krive L od tačke A do tačke B je

$$\boxed{\triangle l = \int_{L(A,B)} dl = \int_a^b \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}\, dt.}$$

Primer

Izračunati integral $\int\limits_L (2-x-y)\,dl$, *gde je L deo jedinične kružnice sa centrom u koordinatnom početku koji se nalazi u prvom i četvrtom kvadrantu.*

Rešenje: *Parametrizacija putanje je*

$$L: \;\; x = \cos t, \;\; y = sint, \;\; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

dakle, $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)}dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}dt = dt$, *a traženi integral je*

$$\begin{aligned} \int\limits_L (2-x-y)\,dl &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos t - \sin t)\,dt = \\ &= 2\pi - 2 = 2(\pi - 1). \end{aligned}$$

Krivolinijski integral po koordinatama (II vrste)

Neka je $L \subset \mathbb{R}^2$ putanja sa početnom tačkom A i krajnjom B i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L.

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B$, $T_{i-1} \in L$, $i = 1, \ldots, n$, i neka je to podela T putanje L.

Odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Neka su $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1 \ldots, n$ i $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$.

Broj

$$S_x(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle x_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Krivolinijski integral po koordinatama (II vrste)

Neka je $L \subset \mathbb{R}^2$ putanja sa početnom tačkom A i krajnjom B i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L.
Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B$, $T_{i-1} \in L$, $i = 1, \ldots, n$, i neka je to podela T putanje L.
Odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, \ldots, n$.
Neka su $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1 \ldots, n$ i $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$.
Broj

$$S_x(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle x_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Krivolinijski integral po koordinatama (II vrste)

Neka je $L \subset \mathbb{R}^2$ putanja sa početnom tačkom A i krajnjom B i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L.
Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B$, $T_{i-1} \in L$, $i = 1, \ldots, n$, i neka je to podela T putanje L.
Odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, \ldots, n$.
Neka su $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1 \ldots, n$ i $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$.
Broj

$$S_x(T) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle x_i$$

naziva se integralna suma funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I_x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle x_i, \tag{2}$$

za svaku podelu putanje L, nezavisno od izbora podlukova $\overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i sa podlukova $\overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo krivolinijski integral po apscisi funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle x_i = \int_L f(x,y)\,dx.$$

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I_x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle x_i, \tag{2}$$

za svaku podelu putanje L, nezavisno od izbora podlukova $\widehat{T_{i-1}T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i sa podlukova $\widehat{T_{i-1}T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo krivolinijski integral po apscisi funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle x_i = \int_L f(x,y)\,dx.$$

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) dx = \alpha \int_L f(x,y)dx + \beta \int_L g(x,y)dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\,dx = \int_{L_1} f(x,y)\,dx + \int_{L_2} f(x,y)\,dx.$$

3) $\int\limits_L f(x,y)\,dx = -\int\limits_{-L} f(x,y)\,dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L, ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)dx = \alpha \int_L f(x,y)dx + \beta \int_L g(x,y)dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\,dx = \int_{L_1} f(x,y)\,dx + \int_{L_2} f(x,y)\,dx.$$

3) $\int_L f(x,y)\,dx = -\int_{-L} f(x,y)\,dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L, ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int\limits_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) dx = \alpha \int\limits_L f(x,y)dx + \beta \int\limits_L g(x,y)dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\,dx = \int\limits_{L_1} f(x,y)\,dx + \int\limits_{L_2} f(x,y)\,dx.$$

3) $\int\limits_L f(x,y)\,dx = -\int\limits_{-L} f(x,y)\,dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L, ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int\limits_L \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) dx = \alpha \int\limits_L f(x,y) dx + \beta \int\limits_L g(x,y) dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(x,y)\, dx = \int\limits_{L_1} f(x,y)\, dx + \int\limits_{L_2} f(x,y)\, dx.$$

3) $\int\limits_L f(x,y)\, dx = -\int\limits_{-L} f(x,y)\, dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L, ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

4) $\left|\int\limits_L f(x,y)\,dx\right| \le M\triangle l$, gde je $M = \sup\limits_{(x,y)\in L} |f(x,y)|$.

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x,y) > 0$, za sve $(x,y) \in L$, $y = y(x)$, $x \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada je $|\int\limits_L f(x,y)\,dx|$ jednaka površini projekcije S' na $x0z$ ravan cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z-osi, ograničenoj sa $x0y$ ravani i površi $z = f(x,y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L: \; x = x(t), \; y = y(t), \; t \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada $\int\limits_L f(x,y)\,dx$ postoji i važi

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))x_t'(t)\,dt.}$$

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

4) $\left|\int\limits_L f(x,y)\,dx\right| \leq M\triangle l$, gde je $M = \sup\limits_{(x,y)\in L} |f(x,y)|$.

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x,y) > 0$, za sve $(x,y) \in L$, $y = y(x)$, $x \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada je $|\int\limits_L f(x,y)\,dx|$ jednaka površini projekcije S' na $x0z$ ravan cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z-osi, ograničenoj sa $x0y$ ravani i površi $z = f(x,y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L: \ x = x(t), \ y = y(t), \ t \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada $\int\limits_L f(x,y)\,dx$ postoji i važi

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))x_t'(t)\,dt.}$$

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

4) $\left|\int\limits_L f(x,y)\,dx\right| \leq M\triangle l,$ gde je $M = \sup\limits_{(x,y)\in L} |f(x,y)|.$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x,y) > 0$, za sve $(x,y) \in L$, $y = y(x),\ x \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada je $|\int\limits_L f(x,y)\,dx|$ jednaka površini projekcije S' na $x0z$ ravan cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z-osi, ograničenoj sa $x0y$ ravani i površi $z = f(x,y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L:\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada $\int\limits_L f(x,y)\,dx$ postoji i važi

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))x_t'(t)\,dt.}$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L: \; y = y(x), \; x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je

$$\int\limits_L f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b f(x, y(x))\, dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo krivolinijski integral po ordinati funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \mu(T) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \triangle y_i = \int\limits_L f(x, y)\, dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy := \int\limits_L P(x, y)\, dx + \int\limits_L Q(x, y)\, dy.$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L: \ y = y(x), \ x \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada je

$$\int\limits_L f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y(x))\,dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo krivolinijski integral po ordinati funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle y_i = \int\limits_L f(x,y)\,dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy := \int\limits_L P(x,y)\,dx + \int\limits_L Q(x,y)\,dy.$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L: \; y = y(x), \; x \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada je

$$\int\limits_L f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y(x))\,dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo krivolinijski integral po ordinati funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle y_i = \int\limits_L f(x,y)\,dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy := \int\limits_L P(x,y)\,dx + \int\limits_L Q(x,y)\,dy.$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L: \ y = y(x), \ x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je

$$\int_L f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y(x))\, dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo krivolinijski integral po ordinati funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \mu(T) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \triangle y_i = \int_L f(x, y)\, dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy := \int_L P(x, y)\, dx + \int_L Q(x, y)\, dy.$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L: \; y = y(x), \; x \in \overrightarrow{[a,b]}$, tada je

$$\int\limits_L f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y(x))\,dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo krivolinijski integral po ordinati funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu(T)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle y_i = \int\limits_L f(x,y)\,dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy := \int\limits_L P(x,y)\,dx + \int\limits_L Q(x,y)\,dy.$$

Primer

Izračunati integral $\int\limits_L (2-x-y)\,dx$, *gde je* $L = AM \cup MB$, $A(1,0)$, $M(1,1)$ *i* $B(0,1)$.

<u>*Rešenje*</u>: $AM: \ x = 1, \ \ y = t, \ \ t \in \overrightarrow{[0,1]}$, *dakle,* $dx = 0dt$ *i* $dy = dt$, *dok je* $MB: \ x = t, \ \ y = 1, \ t \in \overleftarrow{[0,1]}$, *dakle,* $dx = dt$, $dy = 0dt$, *a traženi integral je*

$$\begin{aligned}\int\limits_{L(A,B)} (2-x-y)\,dx &= \int\limits_0^1 (2-1-t)\cdot 0 + \int\limits_1^0 (2-t-1)\,dt = \\ &= \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^0 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Nezavisnost opšteg krivolinijskog integrala od putanje integracije

Neka su $P : D \to \mathbb{R}$ i $Q : D \to \mathbb{R}$ ograničene funkcije nad jednostruko povezanom oblašću D. Krivolinijski integral $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ne zavisi od putanje integracije nad oblašću D ako za bilo koje dve tačke $A, B \in D$ i bilo koje dve putanje L_1 i L_2 iz D koje povezuju tačke A i B važi

$$\int\limits_{L_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{L_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Teorema

Integral $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *ne zavisi od putanje integracije nad* D *ako i samo ako za svaku zatvorenu putanju* $L \subset D$ *važi*

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Dokaz: Neka je $L \subset D$ zatvorena putanja, $A, B \in L$. Označimo $AmB = L_1$ i $AnB = L_2$, $L = L_1 \cup (-L_2)$.

$$\begin{aligned}\oint\limits_L Pdx + Qdy &= \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx + Qdy = \\ &= \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy - \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy = 0.\end{aligned}$$

Dakle, $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0 \leftrightarrow \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy$. □

Teorema

Integral $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *ne zavisi od putanje integracije nad* D *ako i samo ako za svaku zatvorenu putanju* $L \subset D$ *važi*

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Dokaz: Neka je $L \subset D$ zatvorena putanja, $A, B \in L$. Označimo $AmB = L_1$ i $AnB = L_2$, $L = L_1 \cup (-L_2)$.

$$\begin{aligned}\oint\limits_L Pdx + Qdy &= \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx + Qdy = \\ &= \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy - \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy = 0.\end{aligned}$$

Dakle, $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0 \leftrightarrow \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy.$ $\square$

Teorema

Integral $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *ne zavisi od putanje integracije nad konveksnim skupom* D *akko postoji funkcija* $V : D \to \mathbb{R}$ *takva da je* $dV = Pdx + Qdy$ *i tada važi*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{AB} dV = V(B) - V(A).$$

$$V(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt + C, \quad (x_0,y_0),(x,y) \in D.$$

Teorema

Integral $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *ne zavisi od putanje integracije nad konveksnim skupom* D *akko postoji funkcija* $V : D \to \mathbb{R}$ *takva da je* $dV = Pdx + Qdy$ *i tada važi*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{AB} dV = V(B) - V(A).$$

$$\boxed{V(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt + C, \ \ (x_0,y_0),(x,y) \in D.}$$

Teorema

Neka su P, Q, P_x, Q_y *neprekidne funkcije na jednostruko povezanoj oblasti* D. *Integral* $\int\limits_L Pdx + Qdy$ *ne zavisi od putanje integracije nad* D *akko* $P_y = Q_x$.

Primer

Izračunati $I = \int\limits_{L(A,B)} (x+y)dx + (x-y)dy$, *gde je* $A(0,0)$, $B(1,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = x-y$, važi $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje, $V(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x}(t+y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y}(x-t)dt + C = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C_1$ $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = P, \ \frac{\partial V}{\partial y} = Q, \ dV = Pdx + Qdy\right)$, te dobijamo $I = V(B) - V(A) = 1 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Teorema

Neka su P, Q, P_x, Q_y *neprekidne funkcije na jednostruko povezanoj oblasti* D. *Integral* $\int\limits_L Pdx + Qdy$ *ne zavisi od putanje integracije nad* D *akko* $P_y = Q_x$.

Primer

Izračunati $I = \int\limits_{L(A,B)} (x+y)dx + (x-y)dy$, *gde je* $A(0,0)$, $B(1,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = x-y$, *važi* $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, *dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje,* $V(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x}(t+y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y}(x-t)dt + C = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C_1$ $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = P, \frac{\partial V}{\partial y} = Q, dV = Pdx + Qdy\right)$, *te dobijamo* $I = V(B) - V(A) = 1 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Teorema

Neka su P, Q, P_x, Q_y *neprekidne funkcije na jednostruko povezanoj oblasti* D. *Integral* $\int\limits_L Pdx + Qdy$ *ne zavisi od putanje integracije nad* D *akko* $P_y = Q_x$.

Primer

Izračunati $I = \int\limits_{L(A,B)} (x+y)dx + (x-y)dy$, *gde je* $A(0,0)$, $B(1,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = x-y$, *važi* $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, *dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje,* $V(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} (t+y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} (x-t)dt + C = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C_1$ $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = P, \frac{\partial V}{\partial y} = Q, dV = Pdx + Qdy\right)$, *te dobijamo* $I = V(B) - V(A) = 1 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Integral $\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblašću D akko važi jedan od uslova

- $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.
- postoji funkcija $V : D \to \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} dV = V(B) - V(A)$.
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$\boxed{V(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt + C,}$$

$(x_0,y_0,z_0), (x,y,z) \in D$.

Integral $\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblašću D akko važi jedan od uslova

- $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.
- postoji funkcija $V : D \to \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} dV = V(B) - V(A)$.
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$\boxed{V(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt + C,}$$

$(x_0,y_0,z_0),(x,y,z) \in D$.

Integral $\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblašću D akko važi jedan od uslova

- $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.
- postoji funkcija $V : D \to \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} dV = V(B) - V(A)$.
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt + C,$$

$(x_0,y_0,z_0),(x,y,z) \in D$.

Integral $\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblašću D akko važi jedan od uslova

- $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.
- postoji funkcija $V : D \to \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} dV = V(B) - V(A)$.
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$\boxed{V(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt + C,}$$

$(x_0,y_0,z_0),(x,y,z) \in D$.

Primer

Izračunati $I = \int\limits_{L(A,B)} (2xy^3 - 2z)dx + (3x^2y^2 + 1)dy + (3 - 2x)dz$*, gde je* $A(0,0,0)$*,* $B(1,0,1)$*.*

Rešenje: Za $P(x,y,z) = 2xy^3 - 2z$*,* $Q(x,y,z) = 3x^2y^2 + 1$ *i* $R(x,y,z) = 3 - 2x$*, važi* $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$*,* $\frac{\partial P}{\partial z} = -2 = \frac{\partial R}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$*, dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje,*
$V(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x}(2ty_0^3 - 2z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y}(3x^2t^2 + 1)dt + \int\limits_{z_0}^{z}(3 - 2x)dt + C = x^2y^3 - 2xz + y + 3z + C_1$ $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = P,\ \frac{\partial V}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial V}{\partial z} = R,\ dV = Pdx + Qdy + Rdz\right)$*, te dobijamo* $I = V(B) - V(A) = -2 + 3 + C_1 - (0 + C_1) = 1$*.*

Primer

Izračunati $I = \int\limits_{L(A,B)} (2xy^3 - 2z)dx + (3x^2y^2 + 1)dy + (3 - 2x)dz$, *gde je* $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$.

Rešenje: *Za* $P(x,y,z) = 2xy^3 - 2z$, $Q(x,y,z) = 3x^2y^2 + 1$ *i* $R(x,y,z) = 3 - 2x$, *važi* $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -2 = \frac{\partial R}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$, *dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje,*
$V(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x}(2ty_0^3 - 2z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y}(3x^2t^2 + 1)dt + \int\limits_{z_0}^{z}(3 - 2x)dt + C = x^2y^3 - 2xz + y + 3z + C_1$ $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = P, \frac{\partial V}{\partial y} = Q, \frac{\partial V}{\partial z} = R, dV = Pdx + Qdy + Rdz\right)$, *te dobijamo* $I = V(B) - V(A) = -2 + 3 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Formula Grina

Formula Grina daje vezu između dvostrukog integrala i opšteg krivolinijskog integrala.

Teorema

(Formula Grina) Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena pozitivno orijentisanom zatvorenom putanjom L i neka su realne funkcije P, Q, P_y i Q_x neprekidne nad nekom otvorenom oblašću koja sadrži σ. Tada važi

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Dokaz: Neka je $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \alpha \le x \le \beta,\ h(x) \le y \le g(x)\}$, funkcije $h(x)$ i $g(x)$ su neprekidne nad $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h(x) \le g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Kako su P i P_y neprekidne nad otvorenom oblašću koja sadrži σ, imamo $\oint\limits_L P(x, y)dx = -\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$, jer

$\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_\alpha^\beta dx \int_{h(x)}^{g(x)} P_y(x, y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x, g(x)) - P(x, h(x))]dx = -\int_\beta^\alpha P(x, g(x))dx - \int_\alpha^\beta P(x, h(x))dx = -\int_{L_1(B_1, A_1)} P(x, y)dx - \int_{A_1 A} P(x, y)dx - \int_{L_2(A,B)} P(x, y)dx - \int_{BB_1} P(x, y)dx = -\oint_L P(x, y)dx.$

Ako je σ unija k oblasti prethodnog oblika, tj. $\sigma = \cup_{i=1}^k \sigma_i$ $\oint\limits_{L_i} P(x, y)dx = -\iint\limits_{\sigma_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$, $i = 1, 2, \ldots k$, te sabiranjem dobijamo željenu jednakost.

Analogno se dokazuje $\oint\limits_L Q(x, y)dy = \iint\limits_\sigma \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$, za $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \le y \le b,\ u(y) \le x \le v(y)\}$, a zatim za $\sigma = \cup_{i=1}^n \sigma_i$. $\square$

Formula Grina

Primer

Izračunati $I = \oint_L xy^2dy - x^2ydx$, *gde je* L *pozitivno orijentisana kružnica* $L: x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$

a) direktno, b) primenom formule Grina.

Rešenje:

a) $L: \ x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$, te je $dx = -a\sin t dt$ i $dy = a\cos t dt$.

$I = 2a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt$

$= \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{a^4\pi}{2}$.

b) $P(x, y) = -x^2y, \ Q(x, y) = xy^2$, te je $P_y = -x^2$, a $Q_x = y^2$.

Za $\sigma: x^2 + y^2 \leq a^2$, uvođenjem smene $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $J = r$, imamo

$I = \iint_\sigma (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^a = \frac{a^4\pi}{2}$.

Formula Grina

Primer

Izračunati $I = \oint_L xy^2dy - x^2ydx$, *gde je* L *pozitivno orijentisana kružnica* $L: x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$
a) direktno, b) primenom formule Grina.

Rešenje:

a) $L: \ x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$, *te je* $dx = -a\sin tdt$ *i* $dy = a\cos tdt$.

$I = 2a^4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 tdt = \frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt$
$= \frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{a^4\pi}{2}$.

b) $P(x, y) = -x^2y$, $Q(x, y) = xy^2$, *te je* $P_y = -x^2$, *a* $Q_x = y^2$.
Za $\sigma: x^2 + y^2 \leq a^2$, *uvođenjem smene* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $J = r$, *imamo*

$I = \iint_\sigma (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr = 2\pi\frac{r^4}{4}\Big|_0^a = \frac{a^4\pi}{2}$.