

Krivolinijski integrali

PREDAVANJA 6 i 7

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, novembar 2024

Krivolinijski integral

Neka su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, $t \in [a, b]$ neprekidne funkcije.

- **Vektorska jednačina** prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

gde je $\vec{r}(t)$ vektor položaja tačke.

- **Skalarna jednačina** prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

za $t = a$ početna tačka je $A(x(a), y(a), z(a))$, a za $t = b$ krajnja tačka je $B(x(b), y(b), z(b))$.

- **Skalarna jednačina** ravne krive $L \subset \mathbb{R}^2$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Krivolinijski integral

Neka su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, $t \in [a, b]$ neprekidne funkcije.

- **Vektorska jednačina** prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

gde je $\vec{r}(t)$ vektor položaja tačke.

- **Skalarna jednačina** prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

za $t = a$ početna tačka je $A(x(a), y(a), z(a))$, a za $t = b$ krajnja tačka je $B(x(b), y(b), z(b))$.

- **Skalarna jednačina** ravne krive $L \subset \mathbb{R}^2$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Krivolinijski integral

Neka su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$, $t \in [a, b]$ neprekidne funkcije.

- **Vektorska jednačina** prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

gde je $\vec{r}(t)$ vektor položaja tačke.

- **Skalarna jednačina** prostorne krive $L \subset \mathbb{R}^3$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

za $t = a$ početna tačka je $A(x(a), y(a), z(a))$, a za $t = b$ krajnja tačka je $B(x(b), y(b), z(b))$.

- **Skalarna jednačina** ravne krive $L \subset \mathbb{R}^2$ je

$$L : x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Krivolinijski integral

- L je **glatka kriva** ako su $x'_t(t)$ i $y'_t(t)$ neprekidne funkcije i $x'^2_t(t) + y'^2_t(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Kriva L je **Žordanova (prosta)** ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- **Putanja** je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

Krivolinijski integral

- L je **glatka kriva** ako su $x'_t(t)$ i $y'_t(t)$ neprekidne funkcije i $x'^2_t(t) + y'^2_t(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Kriva L je **Žordanova (prosta)** ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- **Putanja** je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

Krivolinijski integral

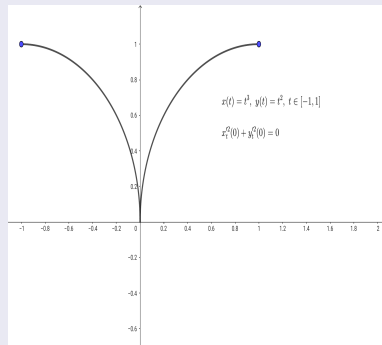
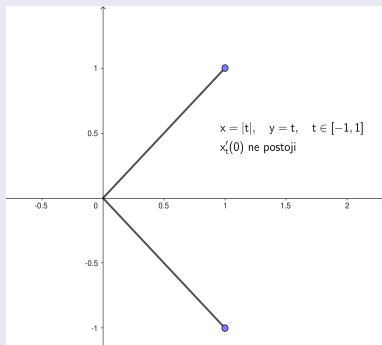
- L je **glatka kriva** ako su $x'_t(t)$ i $y'_t(t)$ neprekidne funkcije i $x'^2_t(t) + y'^2_t(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Kriva L je **Žordanova (prosta)** ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- **Putanja** je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

Krivolinijski integral

- L je **glatka kriva** ako su $x'_t(t)$ i $y'_t(t)$ neprekidne funkcije i $x'^2_t(t) + y'^2_t(t) > 0$ za sve $t \in [a, b]$.
- Kriva L je **glatka po delovima** (deo po deo glatka) ako je unija konačno mnogo glatkih krivih L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ($L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$).
- Kriva L je **Žordanova (prosta)** ako je preslikavanje $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ obostrano jednoznačno.
- **Putanja** je prosta po delovima glatka kriva, sem što se, eventualno, početna tačka $A(x(a), y(a))$ i krajnja tačka $B(x(b), y(b))$ mogu poklapati. Ako je $A = B$ kriva je zatvorena.

Primer

Sledeće krive nisu glatke, ali jesu po delovima glatke krive.



Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u xOy ravni i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L .

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to **podela** T putanje L . Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, označimo sa Δl_i .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$.

Između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u xOy ravni i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L .

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to **podela** T putanje L . Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, označimo sa Δl_i .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$.

Između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u xOy ravni i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L .

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to **podela** T putanje L . Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, označimo sa Δl_i .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$.

Između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Krivolinijski integral po dužini krive (I vrste)

Neka je L putanja u xOy ravni i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L .

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$ koje dele putanju L na n delova i neka je to **podela** T putanje L . Dužine delova krive između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, označimo sa Δl_i .

Parametar podele T je $\mu(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$.

Između tačaka T_{i-1} i T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, redom, odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Broj

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i, \quad (1)$$

za svaku podelu putanje L , nezavisno od izbora podlukova $\widehat{T_{i-1} T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i na podlukovima $\widehat{T_{i-1} T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo **krivolinijski integral po dužini krive** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \int_L f(x, y) dl = \int_{L(A, B)} f(x, y) dl.$$

Ukoliko je putanja zatvorena, koristimo oznaku $\oint_L f(x, y) dl$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i, \quad (1)$$

za svaku podelu putanje L , nezavisno od izbora podlukova $\widehat{T_{i-1} T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i na podlukovima $\widehat{T_{i-1} T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo **krivolinijski integral po dužini krive** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \int_L f(x, y) dl = \int_{L(A, B)} f(x, y) dl.$$

Ukoliko je putanja zatvorena, koristimo oznaku $\oint_L f(x, y) dl$.

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dl = \alpha \int_L f(x, y) dl + \beta \int_L g(x, y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in L$, tada važi

$$\int_L f(x, y) dl \leq \int_L g(x, y) dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dl = \alpha \int_L f(x, y) dl + \beta \int_L g(x, y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in L$, tada važi

$$\int_L f(x, y) dl \leq \int_L g(x, y) dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dl = \alpha \int_L f(x, y) dl + \beta \int_L g(x, y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in L$, tada važi

$$\int_L f(x, y) dl \leq \int_L g(x, y) dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali I vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dl = \alpha \int_L f(x, y) dl + \beta \int_L g(x, y) dl.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

3) Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in L$, tada važi

$$\int_L f(x, y) dl \leq \int_L g(x, y) dl.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

$$4) \left| \int_L f(x, y) dl \right| \leq \int_L |f(x, y)| dl, \text{ za sve } f : D \rightarrow \mathbb{R}, L \subset D.$$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x, y) > 0$, za sve $(x, y) \in L$, tada $\int_L f(x, y) dl$ postoji i jednak je površini cilindrične površi S

obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z -osi, ograničenoj sa xOy ravni i površi $z = f(x, y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, tada je $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt$ i važi

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

$$4) \left| \int_L f(x, y) dl \right| \leq \int_L |f(x, y)| dl, \text{ za sve } f : D \rightarrow \mathbb{R}, L \subset D.$$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x, y) > 0$, za sve $(x, y) \in L$, tada $\int_L f(x, y) dl$ postoji i jednak je površini cilindrične površi S

obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z -osi, ograničenoj sa xOy ravni i površi $z = f(x, y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, tada je $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt$ i važi

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

$$4) \left| \int_L f(x, y) dl \right| \leq \int_L |f(x, y)| dl, \text{ za sve } f : D \rightarrow \mathbb{R}, L \subset D.$$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x, y) > 0$, za sve $(x, y) \in L$, tada $\int_L f(x, y) dl$ postoji i jednak je površini cilindrične površi S

obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z -osi, ograničenoj sa xOy ravni i površi $z = f(x, y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, tada je $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt$ i važi

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksPLICITNOM obliku $L: y = y(x), x \in [a, b]$, tada je

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

8) Dužina luka krive L od tačke A do tačke B je

$$\Delta l = \int_{L(A,B)} dl = \int_a^b \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt.$$

Osobine krivolinijskog integrala I vrste

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksPLICITNOM obliku $L: y = y(x), x \in [a, b]$, tada je

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

8) Dužina luka krive L od tačke A do tačke B je

$$\Delta l = \int_{L(A,B)} dl = \int_a^b \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt.$$

Primer

Izračunati integral $\int_L (2 - x - y) dl$, gde je L deo jedinične kružnice sa centrom u koordinatnom početku koji se nalazi u prvom i četvrtom kvadrantu.

Rešenje: Parametrizacija putanje je

$$L : x = \cos t, y = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

dakle, $dl = \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = dt$, a traženi integral je

$$\begin{aligned} \int_L (2 - x - y) dl &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos t - \sin t) dt = \\ &= 2\pi - 2 = 2(\pi - 1). \end{aligned}$$

Krivolinijski integral po koordinatama (II vrste)

Neka je $L \subset \mathbb{R}^2$ putanja sa početnom tačkom A i krajnjom B i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L .

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$, $T_{i-1} \in L$, $i = 1, \dots, n$, i neka je to **podela** T putanje L .

Odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, \dots, n$. Neka su $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ i $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Broj

$$S_x(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Krivolinijski integral po koordinatama (II vrste)

Neka je $L \subset \mathbb{R}^2$ putanja sa početnom tačkom A i krajnjom B i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L .

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$, $T_{i-1} \in L$, $i = 1, \dots, n$, i neka je to **podela** T putanje L .

Odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, \dots, n$. Neka su $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ i $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Broj

$$S_x(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Krivolinijski integral po koordinatama (II vrste)

Neka je $L \subset \mathbb{R}^2$ putanja sa početnom tačkom A i krajnjom B i neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana nad oblašću $D \subset \mathbb{R}^2$ koja sadrži L .

Na L izaberimo proizvoljne tačke $A = T_0, T_1, \dots, T_n = B$, $T_{i-1} \in L$, $i = 1, \dots, n$, i neka je to **podela** T putanje L .

Odaberemo proizvoljnu tačku $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, \dots, n$. Neka su $T_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ i $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Broj

$$S_x(T) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

naziva se **integralna suma** funkcije $f(x, y)$ za podelu T i izbor tačaka $M_i \in \widehat{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I_x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

za svaku podelu putanje L , nezavisno od izbora podlukova $\widehat{T_{i-1} T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i sa podlukova $\widehat{T_{i-1} T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo **krivolinijski integral po apscisi** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i = \int_L f(x, y) dx.$$

Ako postoji jedinstvena granična vrednost

$$I_x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

za svaku podelu putanje L , nezavisno od izbora podlukova $\widehat{T_{i-1} T_i}$ i nezavisno od izbora tačaka M_i sa podlukova $\widehat{T_{i-1} T_i}$, tada tu graničnu vrednost nazivamo **krivolinijski integral po apscisi** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i = \int_L f(x, y) dx.$$

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dx = \alpha \int_L f(x, y) dx + \beta \int_L g(x, y) dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dx = \int_{L_1} f(x, y) dx + \int_{L_2} f(x, y) dx.$$

3) $\int_L f(x, y) dx = - \int_{-L} f(x, y) dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L , ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dx = \alpha \int_L f(x, y) dx + \beta \int_L g(x, y) dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dx = \int_{L_1} f(x, y) dx + \int_{L_2} f(x, y) dx.$$

3) $\int_L f(x, y) dx = - \int_{-L} f(x, y) dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L , ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dx = \alpha \int_L f(x, y) dx + \beta \int_L g(x, y) dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dx = \int_{L_1} f(x, y) dx + \int_{L_2} f(x, y) dx.$$

3) $\int_L f(x, y) dx = - \int_{-L} f(x, y) dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L , ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

Neka za realne funkcije dve promenljive f i g postoje krivolinijski integrali II vrste duž odgovarajućih putanja.

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \subset D$, važi

$$\int_L \left(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \right) dx = \alpha \int_L f(x, y) dx + \beta \int_L g(x, y) dx.$$

2) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(x, y) dx = \int_{L_1} f(x, y) dx + \int_{L_2} f(x, y) dx.$$

3) $\int_L f(x, y) dx = - \int_{-L} f(x, y) dx$, gde je putanja $-L$ određena istim skupom tačaka kao i putanja L , ali je suprotno orijentisana.

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

4) $\left| \int_L f(x, y) dx \right| \leq M \Delta l$, gde je $M = \sup_{(x,y) \in L} |f(x, y)|$.

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x, y) > 0$, za sve $(x, y) \in L$,
 $y = y(x)$, $x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je $\left| \int_L f(x, y) dx \right|$ jednaka površini

projekcije S' na xOz ravan cilindrične površi S obrazovane
 izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z -osi, ograničenoj
 sa xOy ravani i površi $z = f(x, y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski
 $L: x = x(t), y = y(t), t \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada $\int_L f(x, y) dx$ postoji i važi

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'_t(t) dt.$$

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

$$4) \left| \int_L f(x, y) dx \right| \leq M \Delta l, \text{ gde je } M = \sup_{(x,y) \in L} |f(x, y)|.$$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x, y) > 0$, za sve $(x, y) \in L$, $y = y(x)$, $x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je $\left| \int_L f(x, y) dx \right|$ jednaka površini

projekcije S' na xOz ravan cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z -osi, ograničenoj sa xOy ravani i površi $z = f(x, y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L: x = x(t), y = y(t), t \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada $\int_L f(x, y) dx$ postoji i važi

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'_t(t) dt.$$

Osobine krivolinijskog integrala II vrste

$$4) \left| \int_L f(x, y) dx \right| \leq M \Delta l, \text{ gde je } M = \sup_{(x,y) \in L} |f(x, y)|.$$

5) Ako je funkcija f neprekidna i $f(x, y) > 0$, za sve $(x, y) \in L$, $y = y(x)$, $x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je $\left| \int_L f(x, y) dx \right|$ jednaka površini

projekcije S' na xOz ravan cilindrične površi S obrazovane izvodnicom koja se kreće duž putanje L paralelno z -osi, ograničenoj sa xOy ravani i površi $z = f(x, y)$.

6) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata parametarski $L: x = x(t), y = y(t), t \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada $\int_L f(x, y) dx$ postoji i važi

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'_t(t) dt.$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplcitnom obliku $L : y = y(x), x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo **krivolinijski integral po ordinati** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta y_i = \int_L f(x, y) dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy := \int_L P(x, y) dx + \int Q(x, y) dy.$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L : y = y(x), x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo **krivolinijski integral po ordinati** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta y_i = \int_L f(x, y) dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy := \int_L P(x, y) dx + \int Q(x, y) dy.$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplcitnom obliku $L : y = y(x), x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo **krivolinijski integral po ordinati** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta y_i = \int_L f(x, y) dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy := \int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy.$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplcitnom obliku $L : y = y(x), x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo **krivolinijski integral po ordinati** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta y_i = \int_L f(x, y) dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy := \int_L P(x, y) dx + \int Q(x, y) dy.$$

7) Ako je f neprekidna nad putanjom L koja je zadata u eksplicitnom obliku $L : y = y(x), x \in \overrightarrow{[a, b]}$, tada je

$$\int_L f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx.$$

8) Ako je L zatvorena putanja tada integral ne zavisi od izbora početne tačke.

Analogno definišemo **krivolinijski integral po ordinati** funkcije f duž putanje L i obeležavamo

$$I_y = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu(T) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta y_i = \int_L f(x, y) dy.$$

Opšti krivolinijski integral II vrste

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy := \int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy.$$

Primer

Izračunati integral $\int_L (2 - x - y) dx$, gde je $L = AM \cup MB$, $A(1, 0)$, $M(1, 1)$ i $B(0, 1)$.

Rešenje: AM : $x = 1$, $y = t$, $t \in \overrightarrow{[0, 1]}$, dakle, $dx = 0dt$ i $dy = dt$, dok je MB : $x = t$, $y = 1$, $t \in \overleftarrow{[0, 1]}$, dakle, $dx = dt$, $dy = 0dt$, a traženi integral je

$$\begin{aligned} \int_{L(A,B)} (2 - x - y) dx &= \int_0^1 (2 - 1 - t) \cdot 0 + \int_1^0 (2 - t - 1) dt = \\ &= \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^0 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nezavisnost opšteg krivolinijskog integrala od putanje integracije

Neka su $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ ograničene funkcije nad jednostruko povezanom oblašću D . Krivolinijski integral $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ **ne zavisi od putanje integracije** nad oblašću D ako za bilo koje dve tačke $A, B \in D$ i bilo koje dve putanje L_1 i L_2 iz D koje povezuju tačke A i B važi

$$\int_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{L_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Teorema

Integral $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ ne zavisi od putanje integracije nad D ako i samo ako za svaku zatvorenu putanju $L \subset D$ važi

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Dokaz: Neka je $L \subset D$ zatvorena putanja, $A, B \in L$. Označimo $AmB = L_1$ i $AnB = L_2$, $L = L_1 \cup (-L_2)$.

$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy &= \int_{AmB} Pdx + Qdy + \int_{BnA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{AmB} Pdx + Qdy - \int_{AnB} Pdx + Qdy = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\oint_L Pdx + Qdy = 0 \Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$. $\square$

Teorema

Integral $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ ne zavisi od putanje integracije nad D ako i samo ako za svaku zatvorenu putanju $L \subset D$ važi

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Dokaz: Neka je $L \subset D$ zatvorena putanja, $A, B \in L$. Označimo $AmB = L_1$ i $AnB = L_2$, $L = L_1 \cup (-L_2)$.

$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy &= \int_{AmB} Pdx + Qdy + \int_{BnA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{AmB} Pdx + Qdy - \int_{AnB} Pdx + Qdy = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $\oint_L Pdx + Qdy = 0 \Leftrightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$. $\square$

Teorema

Integral $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ ne zavisi od putanje integracije nad konveksnim skupom D akko postoji funkcija $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy$ i tada važi

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} dV = V(B) - V(A).$$

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C, \quad (x_0, y_0), (x, y) \in D.$$

Teorema

Integral $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ ne zavisi od putanje integracije nad konveksnim skupom D akko postoji funkcija $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy$ i tada važi

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} dV = V(B) - V(A).$$

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C, \quad (x_0, y_0), (x, y) \in D.$$

Teorema

Neka su P, Q, P_x, Q_y neprekidne funkcije na jednostruko povezanoj oblasti D . Integral $\int_L Pdx + Qdy$ ne zavisi od putanje integracije nad D akko $P_y = Q_x$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(A,B)} (x+y)dx + (x-y)dy$, gde je $A(0,0)$, $B(1,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = x-y$, važi $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje, $V(x,y) = \int_{x_0}^x (t+y_0)dt + \int_{y_0}^y (x-t)dt + C = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C_1$ ($\frac{\partial V}{\partial x} = P$, $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$, $dV = Pdx + Qdy$), te dobijamo $I = V(B) - V(A) = 1 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Teorema

Neka su P, Q, P_x, Q_y neprekidne funkcije na jednostruko povezanoj oblasti D . Integral $\int_L Pdx + Qdy$ ne zavisi od putanje integracije nad D akko $P_y = Q_x$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(A,B)} (x+y)dx + (x-y)dy$, gde je $A(0,0)$, $B(1,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = x-y$, važi $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje, $V(x,y) = \int_{x_0}^x (t+y_0)dt + \int_{y_0}^y (x-t)dt + C = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C_1$ ($\frac{\partial V}{\partial x} = P$, $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$, $dV = Pdx + Qdy$), te dobijamo $I = V(B) - V(A) = 1 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Teorema

Neka su P, Q, P_x, Q_y neprekidne funkcije na jednostruko povezanoj oblasti D . Integral $\int_L Pdx + Qdy$ ne zavisi od putanje integracije nad D akko $P_y = Q_x$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(A,B)} (x+y)dx + (x-y)dy$, gde je $A(0,0)$, $B(1,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = x-y$, važi $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje, $V(x,y) = \int_{x_0}^x (t+y_0)dt + \int_{y_0}^y (x-t)dt + C = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C_1$ ($\frac{\partial V}{\partial x} = P$, $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$, $dV = Pdx + Qdy$), te dobijamo $I = V(B) - V(A) = 1 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Integral $\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblasti D akko važi jedan od uslova

- $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.
- postoji funkcija $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} dV = V(B) - V(A)$.
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C,$$

$$(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D.$$

Integral $\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblašću D akko važi jedan od uslova

- $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.

- postoji funkcija $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} dV = V(B) - V(A).$$

- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C,$$

$$(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D.$$

Integral $\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblašću D akko važi jedan od uslova

- $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.
- postoji funkcija $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi
$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} dV = V(B) - V(A).$$
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C,$$

$$(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D.$$

Integral $\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ ne zavisi od putanje integracije nad jednostruko povezanoj oblašću D akko važi jedan od uslova

- $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$, duž svake zatvorene putanje $L \subset D$.
- postoji funkcija $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ i tada važi $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} dV = V(B) - V(A)$.
- $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, gde su P, Q, R neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode.

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C,$$

$$(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D.$$

Primer

Izračunati $I = \int_{L(A,B)} (2xy^3 - 2z)dx + (3x^2y^2 + 1)dy + (3 - 2x)dz$,

gde je $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y,z) = 2xy^3 - 2z$, $Q(x,y,z) = 3x^2y^2 + 1$ i $R(x,y,z) = 3 - 2x$, važi $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -2 = \frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$, dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje,

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^x (2ty_0^3 - 2z_0)dt + \int_{y_0}^y (3x^2t^2 + 1)dt + \int_{z_0}^z (3 - 2x)dt + C = x^2y^3 - 2xz + y + 3z + C_1$$

($\frac{\partial V}{\partial x} = P$, $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial V}{\partial z} = R$, $dV = Pdx + Qdy + Rdz$), te dobijamo $I = V(B) - V(A) = -2 + 3 + C_1 - (0 + C_1) = 1$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(A,B)} (2xy^3 - 2z)dx + (3x^2y^2 + 1)dy + (3 - 2x)dz$,

gde je $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$.

Rešenje: Za $P(x,y,z) = 2xy^3 - 2z$, $Q(x,y,z) = 3x^2y^2 + 1$ i $R(x,y,z) = 3 - 2x$, važi $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -2 = \frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$, dakle, integral ne zavisi od putanje integracije, već samo od početne i krajnje tačke. Dalje,

$$V(x,y,z) = \int_{x_0}^x (2ty_0^3 - 2z_0)dt + \int_{y_0}^y (3x^2t^2 + 1)dt + \int_{z_0}^z (3 - 2x)dt + C =$$

$$x^2y^3 - 2xz + y + 3z + C_1 \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x} = P, \frac{\partial V}{\partial y} = Q, \frac{\partial V}{\partial z} = R, \right.$$

$$dV = Pdx + Qdy + Rdz), \text{ te dobijamo } I = V(B) - V(A) =$$

$$-2 + 3 + C_1 - (0 + C_1) = 1.$$

Formula Grina

Formula Grina daje vezu između dvostrukog integrala i opšteg krivolinijskog integrala.

Teorema

(Formula Grina) Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena pozitivno orijentisanom zatvorenim putanjom L i neka su realne funkcije P , Q , P_y i Q_x neprekidne nad nekom otvorenom oblašću koja sadrži σ . Tada važi

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Dokaz: Neka je $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, h(x) \leq y \leq g(x)\}$, funkcije $h(x)$ i $g(x)$ su neprekidne nad $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $h(x) \leq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Kako su P i P_y neprekidne nad otvorenom oblašću koja sadrži σ , imamo $\oint_L P(x, y) dx = - \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$, jer

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{h(x)}^{g(x)} P_y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x, g(x)) - \\ &P(x, h(x))] dx = - \int_{\beta}^{\alpha} P(x, g(x)) dx - \int_{\alpha}^{\beta} P(x, h(x)) dx = \\ &- \int_{L_1(B_1, A_1)} P(x, y) dx - \int_{A_1 A} P(x, y) dx - \int_{L_2(A, B)} P(x, y) dx - \\ &\int_{BB_1} P(x, y) dx = - \oint_L P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Ako je σ unija k oblasti prethodnog oblika, tj. $\sigma = \cup_{i=1}^k \sigma_i$

$$\oint_{L_i} P(x, y) dx = - \iint_{\sigma_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, k, \text{ te sabiranjem}$$

dobijamo željenu jednakost.

Analogno se dokazuje $\oint_L Q(x, y) dy = \iint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$, za

$$\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, u(y) \leq x \leq v(y)\}, \text{ a zatim za}$$

$$\sigma = \cup_{i=1}^n \sigma_i. \quad \square$$

Formula Grina

Primer

Izračunati $I = \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$, gde je L pozitivno orijentisana kružnica $L : x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$

a) direktno, b) primenom formule Grina.

Rešenje:

a) $L : x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$, te je $dx = -a \sin t dt$ i $dy = a \cos t dt$.

$$\begin{aligned} I &= 2a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{a^4 \pi}{2}. \end{aligned}$$

b) $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$, te je $P_y = -x^2$, a $Q_x = y^2$.
Za $\sigma : x^2 + y^2 \leq a^2$, uvođenjem smene $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$,
 $r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $J = r$, imamo

$$I = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^a = \frac{a^4 \pi}{2}.$$

Formula Grina

Primer

Izračunati $I = \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$, gde je L pozitivno orijentisana kružnica $L : x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$

a) direktno, b) primenom formule Grina.

Rešenje:

a) $L : x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$, te je $dx = -a \sin t dt$ i $dy = a \cos t dt$.

$$I = 2a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{a^4 \pi}{2}.$$

b) $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$, te je $P_y = -x^2$, a $Q_x = y^2$.
Za $\sigma : x^2 + y^2 \leq a^2$, uvođenjem smene $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$,
 $r \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $J = r$, imamo

$$I = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{a^4 \pi}{2}.$$