Kompleksni brojevi, kompleksna funkcija i njen izvod

PREDAVANJA 8

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, novembar 2023

Kompleksni brojevi

- Algebarski oblik kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je imaginarna jedinica, $\mathrm{Re}\, z = x$ je realni deo kompleksnog broja z, a $\mathrm{Im}\, z = y$ je imaginarni deo kompleksnog broja z.
- Moduo (modul) kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je konjugovano kompleksni broj kompl. broja z.
- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \wedge \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- Algebarski oblik kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je imaginarna jedinica, $\mathrm{Re}\, z = x$ je realni deo kompleksnog broja z, a $\mathrm{Im}\, z = y$ je imaginarni deo kompleksnog broja z.
- Moduo (modul) kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je konjugovano kompleksni broj kompl. broja z.
- $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \;\wedge\; \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- Algebarski oblik kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je imaginarna jedinica, $\mathrm{Re}\, z = x$ je realni deo kompleksnog broja z, a $\mathrm{Im}\, z = y$ je imaginarni deo kompleksnog broja z.
- Moduo (modul) kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je konjugovano kompleksni broj kompl. broja z.
- $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \;\wedge\; \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- Algebarski oblik kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je imaginarna jedinica, $\mathrm{Re}\, z = x$ je realni deo kompleksnog broja z, a $\mathrm{Im}\, z = y$ je imaginarni deo kompleksnog broja z.
- Moduo (modul) kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je konjugovano kompleksni broj kompl. broja z.
- $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \;\wedge\; \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- Algebarski oblik kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je imaginarna jedinica, $\mathrm{Re}\, z = x$ je realni deo kompleksnog broja z, a $\mathrm{Im}\, z = y$ je imaginarni deo kompleksnog broja z.
- Moduo (modul) kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je konjugovano kompleksni broj kompl. broja z.
- $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \;\wedge\; \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

- Argument kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ glavna vrednost argumenta.
- Trigonometrijski oblik kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \mathrm{Arg}\, z + i \sin \mathrm{Arg}\, z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- Eksponencijalni oblik kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i \mathrm{Arg}\, z} = |z|e^{i\varphi}$.
- Otvorena ϵ-okolina kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se Rimanova sfera. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara beskonačnom kompleksnom broju u oznaci ∞. Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. Prošireni skup kompleksnih brojeva sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞. Otvorena ϵ-okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- Argument kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ glavna vrednost argumenta.
- Trigonometrijski oblik kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \mathrm{Arg}\, z + i \sin \mathrm{Arg}\, z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- Eksponencijalni oblik kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i \mathrm{Arg}\, z} = |z|e^{i\varphi}$.
- Otvorena ϵ-okolina kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se Rimanova sfera. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara beskonačnom kompleksnom broju u oznaci ∞. Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. Prošireni skup kompleksnih brojeva sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞. Otvorena ϵ-okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- Argument kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ glavna vrednost argumenta.
- Trigonometrijski oblik kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \mathrm{Arg}\, z + i \sin \mathrm{Arg}\, z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- Eksponencijalni oblik kompleksnog broja z je $z = |z| e^{i \mathrm{Arg}\, z} = |z| e^{i\varphi}$.
- Otvorena ϵ-okolina kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se Rimanova sfera. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara beskonačnom kompleksnom broju u oznaci ∞. Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. Prošireni skup kompleksnih brojeva sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞. Otvorena ϵ-okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- Argument kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ glavna vrednost argumenta.
- Trigonometrijski oblik kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \mathrm{Arg}\, z + i \sin \mathrm{Arg}\, z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- Eksponencijalni oblik kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i \mathrm{Arg}\, z} = |z|e^{i\varphi}$.
- Otvorena ϵ-okolina kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se Rimanova sfera. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara beskonačnom kompleksnom broju u oznaci ∞. Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. Prošireni skup kompleksnih brojeva sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞. Otvorena ϵ-okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- Argument kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ glavna vrednost argumenta.
- Trigonometrijski oblik kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \mathrm{Arg}\, z + i \sin \mathrm{Arg}\, z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- Eksponencijalni oblik kompleksnog broja z je $z = |z| e^{i \mathrm{Arg}\, z} = |z| e^{i\varphi}$.
- Otvorena ϵ-okolina kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se Rimanova sfera. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara beskonačnom kompleksnom broju u oznaci ∞. Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. Prošireni skup kompleksnih brojeva sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞. Otvorena ϵ-okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

Kompleksni brojevi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \text{ akko } \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty \ (\leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0).$$

Neka su $u \neq 0$, $u, v \neq \infty$. Ako $z_n \to \infty$, $v_n \to v$, tada $z_n + v_n \to \infty + v$.

- $\infty \pm v = v \pm \infty = \infty$, $\infty \cdot u = u \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$,
- $\frac{v}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{u} = \infty$, $\frac{u}{0} = \infty$.
- „$\infty \pm \infty$", „$0 \cdot \infty$", „$\frac{\infty}{\infty}$", „$\frac{0}{0}$" nisu definisani.

Kriva u $\mathbb{C}$ je $L: \ z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ako je preslikavanje $[a, b] \to L$ obostrano jednoznačno i L deo po deo glatka kriva, tada je L putanja. Putanja L za koju je $z(a) = z(b)$ je zatvorena putanja. Unutrašnjost (lat. interior) zatvorene putanje L označavamo sa $\mathrm{int}\, L$, a spoljašnjost (lat. exterior) sa $\mathrm{ext}\, L$.

Kompleksni brojevi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \text{ akko } \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty \ (\leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0).$$

Neka su $u \neq 0$, $u, v \neq \infty$. Ako $z_n \to \infty$, $v_n \to v$, tada $z_n + v_n \to \infty + v$.

- $\infty \pm v = v \pm \infty = \infty, \quad \infty \cdot u = u \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty,$
- $\frac{v}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{u} = \infty, \quad \frac{u}{0} = \infty.$
- „$\infty \pm \infty$", „$0 \cdot \infty$", „$\frac{\infty}{\infty}$", „$\frac{0}{0}$" nisu definisani.

Kriva u $\mathbb{C}$ je $L: \ z(t) = x(t) + iy(t), \ t \in [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ako je preslikavanje $[a, b] \to L$ obostrano jednoznačno i L deo po deo glatka kriva, tada je L putanja. Putanja L za koju je $z(a) = z(b)$ je zatvorena putanja. Unutrašnjost (lat. interior) zatvorene putanje L označavamo sa int L, a spoljašnjost (lat. exterior) sa ext L.

Kompleksni brojevi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \text{ akko } \lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty \ (\leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0).$$

Neka su $u \neq 0$, $u, v \neq \infty$. Ako $z_n \to \infty$, $v_n \to v$, tada $z_n + v_n \to \infty + v$.

- $\infty \pm v = v \pm \infty = \infty$, $\quad \infty \cdot u = u \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$,
- $\frac{v}{\infty} = 0$, $\quad \frac{\infty}{u} = \infty$, $\quad \frac{u}{0} = \infty$.
- „$\infty \pm \infty$", „$0 \cdot \infty$", „$\frac{\infty}{\infty}$", „$\frac{0}{0}$" nisu definisani.

Kriva u $\mathbb{C}$ je $L: \ z(t) = x(t) + iy(t), \ t \in [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ako je preslikavanje $[a, b] \to L$ obostrano jednoznačno i L deo po deo glatka kriva, tada je L putanja. Putanja L za koju je $z(a) = z(b)$ je zatvorena putanja. Unutrašnjost (lat. interior) zatvorene putanje L označavamo sa int L, a spoljašnjost (lat. exterior) sa ext L.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D, $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f kompleksna funkcija kompleksne promenljive.
- Skup D je definicioni skup (domen), a $f(D)$ je skup slika (kodomen) funkcije f.
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive. $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z) + i\mathrm{Im}\, f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je jednoznačna funkcija, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ višeznačna (n-značna) funkcija.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D, $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f kompleksna funkcija kompleksne promenljive.
- Skup D je definicioni skup (domen), a $f(D)$ je skup slika (kodomen) funkcije f.
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive. $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z) + i \mathrm{Im}\, f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je jednoznačna funkcija, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ višeznačna (n-značna) funkcija.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D, $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f kompleksna funkcija kompleksne promenljive.
- Skup D je definicioni skup (domen), a $f(D)$ je skup slika (kodomen) funkcije f.
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive. $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z) + i\mathrm{Im}\, f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je jednoznačna funkcija, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ višeznačna (n-značna) funkcija.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D, $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f kompleksna funkcija kompleksne promenljive.
- Skup D je definicioni skup (domen), a $f(D)$ je skup slika (kodomen) funkcije f.
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive. $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z) + i\mathrm{Im}\, f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je jednoznačna funkcija, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ višeznačna (n-značna) funkcija.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D, $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f kompleksna funkcija kompleksne promenljive.
- Skup D je definicioni skup (domen), a $f(D)$ je skup slika (kodomen) funkcije f.
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive. $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z) + i\mathrm{Im}\, f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je jednoznačna funkcija, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ višeznačna (n-značna) funkcija.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Kompleksni broj ω_0 je granična vrednost funkcije $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako za svaku ϵ-okolinu tačke ω_0 postoji δ-okolina tačke z_0 takva da se funkcijom f δ-okolina tačke z_0, bez same tačke z_0, preslikava u ϵ-okolinu tačke ω_0, tj. $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta(\epsilon) > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \omega_0| < \epsilon)$ i pišemo $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \omega_0$.
- Ako je ω_0 granična vrednost funkcije f u tački z_0 i $f(z_0) = \omega_0$ tada je f neprekidna u tački z_0, tj. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Neka je $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, f je neprekidna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ akko su P i Q neprekidne u (x_0, y_0) i $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} P(x,y) = \alpha$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} Q(x,y) = \beta$ i $f(z_0) = \alpha + i\beta = \omega_0$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Kompleksni broj ω_0 je granična vrednost funkcije $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako za svaku ϵ-okolinu tačke ω_0 postoji δ-okolina tačke z_0 takva da se funkcijom f δ-okolina tačke z_0, bez same tačke z_0, preslikava u ϵ-okolinu tačke ω_0, tj. $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta(\epsilon) > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \omega_0| < \epsilon)$ i pišemo $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \omega_0$.
- Ako je ω_0 granična vrednost funkcije f u tački z_0 i $f(z_0) = \omega_0$ tada je f neprekidna u tački z_0, tj. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Neka je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f je neprekidna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ akko su P i Q neprekidne u (x_0, y_0) i $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} P(x, y) = \alpha$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} Q(x, y) = \beta$ i $f(z_0) = \alpha + i\beta = \omega_0$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Kompleksni broj ω_0 je granična vrednost funkcije $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako za svaku ϵ-okolinu tačke ω_0 postoji δ-okolina tačke z_0 takva da se funkcijom f δ-okolina tačke z_0, bez same tačke z_0, preslikava u ϵ-okolinu tačke ω_0, tj. $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \omega_0| < \epsilon)$ i pišemo $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$.
- Ako je ω_0 granična vrednost funkcije f u tački z_0 i $f(z_0) = \omega_0$ tada je f neprekidna u tački z_0, tj. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Neka je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f je neprekidna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ akko su P i Q neprekidne u (x_0, y_0) i $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} P(x, y) = \alpha$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} Q(x, y) = \beta$ i $f(z_0) = \alpha + i\beta = \omega_0$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački oblasti D. Zbir, proizvod, količnik i kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.
- Funkcija $\omega = f(z)$ definisana u nekoj okolini tačke z_0 je diferencijabilna u tački z_0 akko postoji

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}, \text{ tj. } \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Ovu graničnu vrednost nazivamo izvodom funkcije $\omega = f(z)$ u tački z_0 i označavamo $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$ ili $\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački oblasti D. Zbir, proizvod, količnik i kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.
- Funkcija $\omega = f(z)$ definisana u nekoj okolini tačke z_0 je diferencijabilna u tački z_0 akko postoji

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}, \text{ tj. } \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Ovu graničnu vrednost nazivamo izvodom funkcije $\omega = f(z)$ u tački z_0 i označavamo $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$ ili $\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački oblasti D. Zbir, proizvod, količnik i kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.
- Funkcija $\omega = f(z)$ definisana u nekoj okolini tačke z_0 je diferencijabilna u tački z_0 akko postoji

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}, \text{ tj. } \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Ovu graničnu vrednost nazivamo izvodom funkcije $\omega = f(z)$ u tački z_0 i označavamo $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$ ili $\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D, kažemo da je ona diferencijabilna u oblasti D i njen prvi izvod u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ označavamo $\triangle f(z_0)$ i nazivamo ga priraštaj funkcije f u z_0, a $\triangle z = z_1 - z_0$ nazivamo priraštajem nezavisne promenljive z.
- Sa df i dz označavamo diferencijal funkcije f i nezavisne promenljive z.
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle z} = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D, tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D, kažemo da je ona diferencijabilna u oblasti D i njen prvi izvod u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ označavamo $\triangle f(z_0)$ i nazivamo ga priraštaj funkcije f u z_0, a $\triangle z = z_1 - z_0$ nazivamo priraštajem nezavisne promenljive z.
- Sa df i dz označavamo diferencijal funkcije f i nezavisne promenljive z.
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle z} = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \ldots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D, tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D, kažemo da je ona diferencijabilna u oblasti D i njen prvi izvod u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ označavamo $\triangle f(z_0)$ i nazivamo ga priraštaj funkcije f u z_0, a $\triangle z = z_1 - z_0$ nazivamo priraštajem nezavisne promenljive z.
- Sa df i dz označavamo diferencijal funkcije f i nezavisne promenljive z.
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle z} = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D, tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D, kažemo da je ona diferencijabilna u oblasti D i njen prvi izvod u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ označavamo $\triangle f(z_0)$ i nazivamo ga priraštaj funkcije f u z_0, a $\triangle z = z_1 - z_0$ nazivamo priraštajem nezavisne promenljive z.
- Sa df i dz označavamo diferencijal funkcije f i nezavisne promenljive z.
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle z} = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \ldots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D, tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D, kažemo da je ona diferencijabilna u oblasti D i njen prvi izvod u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ označavamo $\triangle f(z_0)$ i nazivamo ga priraštaj funkcije f u z_0, a $\triangle z = z_1 - z_0$ nazivamo priraštajem nezavisne promenljive z.
- Sa df i dz označavamo diferencijal funkcije f i nezavisne promenljive z.
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle z} = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
  $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D, tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D, kažemo da je ona diferencijabilna u oblasti D i njen prvi izvod u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$ označavamo $\triangle f(z_0)$ i nazivamo ga priraštaj funkcije f u z_0, a $\triangle z = z_1 - z_0$ nazivamo priraštajem nezavisne promenljive z.
- Sa df i dz označavamo diferencijal funkcije f i nezavisne promenljive z.
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle z} = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
  $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \ldots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D, tada je ona neprekidna u toj tački.

Koši-Rimanovi uslovi

Ako je f diferencijabilna u z, tada $\triangle z = \triangle x + i\triangle y \to 0$ i $\lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ ne zavisi od $\operatorname{tg} \arg \triangle z = \frac{\triangle y}{\triangle x}$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df}{dz}(z) = \frac{d(P(x,y)+iQ(x,y))}{d(x+iy)} \\ &= \frac{dP+idQ}{dx+idy} = \frac{P_x dx + P_y dy + i(Q_x dx + Q_y dy)}{dx+idy} \\ &= \frac{(P_x + iQ_x)dx + i(-iP_x + Q_y)dy}{dx+idy}. \end{aligned}$$

Odavde je $\frac{P_x+iQ_x}{1} = \frac{-iP_y+Q_y}{1}$, te su potrebni uslovi diferencijabilnosti funkcije $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ koji se nazivaju Koši-Rimanovi uslovi

$$\boxed{P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x.}$$

Koši-Rimanovi uslovi

Ako je f diferencijabilna u z, tada $\triangle z = \triangle x + i\triangle y \to 0$ i $\lim\limits_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z)-f(z)}{\triangle z}$ ne zavisi od $\operatorname{tg}\arg\triangle z = \frac{\triangle y}{\triangle x}$.

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{df}{dz}(z) = \frac{d(P(x,y)+iQ(x,y))}{d(x+iy)} \\
&= \frac{dP+idQ}{dx+idy} = \frac{P_x dx + P_y dy + i(Q_x dx + Q_y dy)}{dx+idy} \\
&= \frac{(P_x+iQ_x)dx + i(-iP_x+Q_y)dy}{dx+idy}.
\end{aligned}
$$

Odavde je $\frac{P_x+iQ_x}{1} = \frac{-iP_y+Q_y}{1}$, te su potrebni uslovi diferencijabilnosti funkcije $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ koji se nazivaju Koši-Rimanovi uslovi

$$\boxed{P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x.}$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, *bude diferencijabilna u tački* $z = x + iy$, $z \in D$ *je da funkcije* P *i* Q *budu diferencijabilne u tački* (x,y) *i da važi* $P_x = Q_y$ *i* $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x, P_y, Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r,\varphi) + i\mathcal{Q}(r,\varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r,\varphi)$, $\mathcal{Q}(r,\varphi)$ diferencijabilne u (r,φ),
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, *bude diferencijabilna u tački* $z = x + iy$, $z \in D$ *je da funkcije* P *i* Q *budu diferencijabilne u tački* (x,y) *i da važi* $P_x = Q_y$ *i* $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x, P_y, Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r,\varphi) + i\mathcal{Q}(r,\varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r,\varphi)$, $\mathcal{Q}(r,\varphi)$ diferencijabilne u (r,φ),
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, bude diferencijabilna u tački $z = x + iy$, $z \in D$ je da funkcije P i Q budu diferencijabilne u tački (x,y) i da važi $P_x = Q_y$ i $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x, P_y, Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r,\varphi) + i\mathcal{Q}(r,\varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r,\varphi)$, $\mathcal{Q}(r,\varphi)$ diferencijabilne u (r,φ),
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, *bude diferencijabilna u tački* $z = x + iy$, $z \in D$ *je da funkcije* P *i* Q *budu diferencijabilne u tački* (x,y) *i da važi* $P_x = Q_y$ *i* $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x, P_y, Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r,\varphi) + i\mathcal{Q}(r,\varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r,\varphi)$, $\mathcal{Q}(r,\varphi)$ diferencijabilne u (r,φ),
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Rešenje: Kako je $P(x,y) = e^x \cos y$, $Q(x,y) = e^x \sin y$, $P_x = e^x \cos y = Q_y$, $P_y = -e^x \sin y = -Q_x$, *to je* $(e^z)' = f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Rešenje: Kako su $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = 0$, *parcijalni izvodi su neprekidne funkcije* $P_x = 2x$, $Q_y = 0$, $P_y = 2y$, $Q_x = 0$, *ali Koši-Rimanovi uslovi su ispunjeni samo za* $z = 0$, *te funkcija diferencijabilna samo u tački* $z = 0$ *i* $f'(0) = 0$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Rešenje: *Kako je* $P(x,y) = e^x \cos y$, $Q(x,y) = e^x \sin y$, $P_x = e^x \cos y = Q_y$, $P_y = -e^x \sin y = -Q_x$, *to je* $(e^z)' = f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Rešenje: *Kako su* $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = 0$, *parcijalni izvodi su neprekidne funkcije* $P_x = 2x$, $Q_y = 0$, $P_y = 2y$, $Q_x = 0$, *ali Koši-Rimanovi uslovi su ispunjeni samo za* $z = 0$, *te funkcija diferencijabilna samo u tački* $z = 0$ *i* $f'(0) = 0$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje: $f(z) = z^n = r^n e^{n\varphi i} = r^n \cos n\varphi + i r^n \sin n\varphi$, *odatle je* $\mathcal{P}_r = n r^{n-1} \cos n\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -n r^n \sin n\varphi$, $\mathcal{Q}_r = n r^{n-1} \sin n\varphi$, $\mathcal{Q}_\varphi = n r^n \cos n\varphi$, *dakle, važi*

$$\mathcal{P}_r = -\frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi \ \text{ i } \ \mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r.$$

$(z^n)' = f'(z) = f'(re^{i\varphi}) = \frac{r}{re^{i\varphi}}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r) = e^{-i\varphi}(n r^{n-1} \cos n\varphi + i n r^{n-1} \sin n\varphi) = e^{-i\varphi} n r^{n-1} e^{in\varphi} = n r^{n-1} e^{i(n-1)\varphi} = n z^{n-1}$.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je analitička u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je analitička na skupu D ako je analitička u svakoj tački skupa D.

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su regularne tačke, a one u kojima nije analitička su singularne tačke ili singulariteti funkcije. Funkcija u je harmonijska funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je analitička u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je analitička na skupu D ako je analitička u svakoj tački skupa D.

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su regularne tačke, a one u kojima nije analitička su singularne tačke ili singulariteti funkcije. Funkcija u je harmonijska funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je analitička u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je analitička na skupu D ako je analitička u svakoj tački skupa D.

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su regularne tačke, a one u kojima nije analitička su singularne tačke ili singulariteti funkcije.

Funkcija u je harmonijska funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je analitička u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je analitička na skupu D ako je analitička u svakoj tački skupa D.

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su regularne tačke, a one u kojima nije analitička su singularne tačke ili singulariteti funkcije. Funkcija u je harmonijska funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je analitička u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je analitička na skupu D ako je analitička u svakoj tački skupa D.

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su regularne tačke, a one u kojima nije analitička su singularne tačke ili singulariteti funkcije.
Funkcija u je harmonijska funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Primer

Odrediti analitičku funkciju $f(z) = f(x+iy) = P(x,y)+i(2xy+5y)$, *tako da važi* $f(i) = 5i$.

Rešenje: *Kako je* $Q(x,y) = 2xy + 5y$, *dobijamo* $Q_x = 2y = -P_y$. *Odatle je*

$$P(x,y) = \int -2ydy = -\frac{2y^2}{2} + \varphi(x).$$

Dakle, $P_x = \varphi'(x) = 2x + 5 = Q_y$, *te je* $\varphi(x) = x^2 + 5x + C$.

$$\begin{aligned} f(z) = f(x+iy) &= (x^2 + 5x - y^2 + C) + i(2xy + 5y) \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + 5(x+iy) + C = z^2 + 5z + C. \end{aligned}$$

Kako je $f(i) = 5i - 1 + C = 5i$, *dobijamo da je* $C = 1$ *i konačno je* $f(z) = z^2 + 5z + 1$.