

Kompleksni brojevi, kompleksna funkcija i njen izvod

PREDAVANJA 8

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, novembar 2024

Kompleksni brojevi

- **Algebarski oblik** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je **imaginarna jedinica**, $\operatorname{Re} z = x$ je **realni deo** kompleksnog broja z , a $\operatorname{Im} z = y$ je **imaginarni deo** kompleksnog broja z .
- **Modulo (modul)** kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je **konjugovano kompleksni broj** kompl. broja z .
- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- **Algebarski oblik** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je **imaginarna jedinica**, $\operatorname{Re} z = x$ je **realni deo** kompleksnog broja z , a $\operatorname{Im} z = y$ je **imaginarni deo** kompleksnog broja z .
- **Modulo (modul)** kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je **konjugovano kompleksni broj** kompl. broja z .
- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- **Algebarski oblik** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je **imaginarna jedinica**, $\operatorname{Re} z = x$ je **realni deo** kompleksnog broja z , a $\operatorname{Im} z = y$ je **imaginarni deo** kompleksnog broja z .
- **Modulo (modul)** kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je **konjugovano kompleksni broj** kompl. broja z .
- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- **Algebarski oblik** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je **imaginarna jedinica**, $\operatorname{Re} z = x$ je **realni deo** kompleksnog broja z , a $\operatorname{Im} z = y$ je **imaginarni deo** kompleksnog broja z .
- **Modulo (modul)** kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je **konjugovano kompleksni broj** kompl. broja z .
- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Kompleksni brojevi

- **Algebarski oblik** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gde je $i^2 := -1$, i je **imaginarna jedinica**, $\operatorname{Re} z = x$ je **realni deo** kompleksnog broja z , a $\operatorname{Im} z = y$ je **imaginarni deo** kompleksnog broja z .
- **Modulo (modul)** kompleksnog broja z je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a $\bar{z} = x - iy$ je **konjugovano kompleksni broj** kompl. broja z .
- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- Za sve $z \in \mathbb{C}$, važi: $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

- **Argument** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ **glavna vrednost** argumenta.
- **Trigonometrijski oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- **Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i\text{Arg } z} = |z|e^{i\varphi}$.
- **Otvorena ϵ -okolina** kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangenta ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se **Rimanova sfera**. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara **beskonačnom kompleksnom broju** u oznaci ∞ . Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. **Prošireni skup kompleksnih brojeva** sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞ . Otvorena ϵ -okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- **Argument** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ **glavna vrednost** argumenta.
- **Trigonometrijski oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- **Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i\text{Arg } z} = |z|e^{i\varphi}$.
- **Otvorena ϵ -okolina** kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangenta ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se **Rimanova sfera**. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara **beskonačnom kompleksnom broju** u oznaci ∞ . Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. **Prošireni skup kompleksnih brojeva** sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞ . Otvorena ϵ -okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- **Argument** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ **glavna vrednost** argumenta.
- **Trigonometrijski oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- **Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i\text{Arg } z} = |z|e^{i\varphi}$.
- **Otvorena ϵ -okolina** kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se **Rimanova sfera**. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara **beskonačnom kompleksnom broju** u oznaci ∞ . Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. **Prošireni skup kompleksnih brojeva** sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞ . Otvorena ϵ -okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- **Argument** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ **glavna vrednost** argumenta.
- **Trigonometrijski oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- **Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i\text{Arg } z} = |z|e^{i\varphi}$.
- **Otvorena ϵ -okolina** kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se **Rimanova sfera**. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara **beskonačnom kompleksnom broju** u oznaci ∞ . Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. **Prošireni skup kompleksnih brojeva** sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞ . Otvorena ϵ -okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

- **Argument** kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}$ je $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je $\arg z = \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ **glavna vrednost** argumenta.
- **Trigonometrijski oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- **Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja z je $z = |z|e^{i\text{Arg } z} = |z|e^{i\varphi}$.
- **Otvorena ϵ -okolina** kompleksnog broja z_0 je $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) < \epsilon\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$.
- Jedinična sfera, takva da joj je kompleksna ravan tangentna ravan u tački $z = 0$ i prečnik NS normalan na kompleksnu ravan, naziva se **Rimanova sfera**. Na Rimanovoj sferi tačka N odgovara **beskonačnom kompleksnom broju** u oznaci ∞ . Realni deo, imaginarni deo i argument broja ∞ se ne definišu, a modul je $+\infty$. **Prošireni skup kompleksnih brojeva** sadrži sve kompleksne brojeve uključujući i ∞ . Otvorena ϵ -okolina broja ∞ je $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| > \epsilon\}$.

Kompleksni brojevi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ akko } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty \ (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0).$$

Neka su $u \neq 0$, $u, v \neq \infty$. Ako $z_n \rightarrow \infty$, $v_n \rightarrow v$, tada $z_n + v_n \rightarrow \infty + v$.

- $\infty \pm v = v \pm \infty = \infty$, $\infty \cdot u = u \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$,
- $\frac{v}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{u} = \infty$, $\frac{u}{0} = \infty$.
- „ $\infty \pm \infty$ “, „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, „ $\frac{0}{0}$ “ nisu definisani.

Kriva u $\mathbb{C}$ je $L: z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ako je preslikavanje $[a, b] \rightarrow L$ obostrano jednoznačno i L deo po deo glatka kriva, tada je L **putanja**. Putanja L za koju je $z(a) = z(b)$ je **zatvorena putanja**. Unutrašnjost (lat. interior) zatvorene putanje L označavamo sa **int** L , a spoljašnjost (lat. exterior) sa **ext** L .

Kompleksni brojevi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ akko } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty \ (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0).$$

Neka su $u \neq 0$, $u, v \neq \infty$. Ako $z_n \rightarrow \infty$, $v_n \rightarrow v$, tada $z_n + v_n \rightarrow \infty + v$.

- $\infty \pm v = v \pm \infty = \infty$, $\infty \cdot u = u \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$,
- $\frac{v}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{u} = \infty$, $\frac{u}{0} = \infty$.
- „ $\infty \pm \infty$ “, „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, „ $\frac{0}{0}$ “ nisu definisani.

Kriva u $\mathbb{C}$ je $L: z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ako je preslikavanje $[a, b] \rightarrow L$ obostrano jednoznačno i L deo po deo glatka kriva, tada je L **putanja**. Putanja L za koju je $z(a) = z(b)$ je **zatvorena putanja**. Unutrašnjost (lat. interior) zatvorene putanje L označavamo sa **int** L , a spoljašnjost (lat. exterior) sa **ext** L .

Kompleksni brojevi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ akko } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty \ (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0).$$

Neka su $u \neq 0$, $u, v \neq \infty$. Ako $z_n \rightarrow \infty$, $v_n \rightarrow v$, tada $z_n + v_n \rightarrow \infty + v$.

- $\infty \pm v = v \pm \infty = \infty$, $\infty \cdot u = u \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$,
- $\frac{v}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{u} = \infty$, $\frac{u}{0} = \infty$.
- „ $\infty \pm \infty$ “, „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, „ $\frac{0}{0}$ “ nisu definisani.

Kriva u $\mathbb{C}$ je $L: z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ako je preslikavanje $[a, b] \rightarrow L$ obostrano jednoznačno i L deo po deo glatka kriva, tada je L **putanja**. Putanja L za koju je $z(a) = z(b)$ je **zatvorena putanja**. Unutrašnjost (lat. interior) zatvorene putanje L označavamo sa **int** L , a spoljašnjost (lat. exterior) sa **ext** L .

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D , $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f **kompleksna funkcija kompleksne promenljive**.
- Skup D je **definicioni skup (domen)**, a $f(D)$ je **skup slika (kodomen)** funkcije f .
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive.
 $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \operatorname{Re} f(z) + i\operatorname{Im} f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je **jednoznačna funkcija**, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ **višeznačna (n -značna) funkcija**.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D , $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f **kompleksna funkcija kompleksne promenljive**.
- Skup D je **definicioni skup (domen)**, a $f(D)$ je **skup slika (kodomen)** funkcije f .
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive.
 $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \operatorname{Re} f(z) + i\operatorname{Im} f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je **jednoznačna funkcija**, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ **višeznačna (n -značna) funkcija**.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D , $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f **kompleksna funkcija kompleksne promenljive**.
- Skup D je **definicioni skup (domen)**, a $f(D)$ je **skup slika (kodomen)** funkcije f .
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive.
 $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \operatorname{Re} f(z) + i\operatorname{Im} f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je **jednoznačna funkcija**, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ **višeznačna (n -značna) funkcija**.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D , $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f **kompleksna funkcija kompleksne promenljive**.
- Skup D je **definicioni skup (domen)**, a $f(D)$ je **skup slika (kodomen)** funkcije f .
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive.
 $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \operatorname{Re} f(z) + i\operatorname{Im} f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je **jednoznačna funkcija**, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ **višeznačna (n -značna) funkcija**.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako vrednosti $z = x + iy$ iz skupa D , $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, po pravilu f pridružimo $\omega = P + iQ$, $\omega \in \mathbb{C}$, tada je f **kompleksna funkcija kompleksne promenljive**.
- Skup D je **definicioni skup (domen)**, a $f(D)$ je **skup slika (kodomen)** funkcije f .
- Pišemo $\omega = f(z) = P + iQ$, gde su $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x, y)$ realne funkcije dve realne promenljive.
 $\omega = P(x, y) + iQ(x, y) = \operatorname{Re} f(z) + i\operatorname{Im} f(z)$.
- Funkcija $\omega = |z|$ je **jednoznačna funkcija**, dok je $\omega = \sqrt[n]{z}$ **višeznačna (n -značna) funkcija**.
- Za funkciju $\omega = z^2 = (x + iy)^2$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, a $Q(x, y) = 2xy$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Kompleksni broj ω_0 je **granična vrednost** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako za svaku ϵ -okolinu tačke ω_0 postoji δ -okolina tačke z_0 takva da se funkcijom f δ -okolina tačke z_0 , bez same tačke z_0 , preslikava u ϵ -okolinu tačke ω_0 , tj.
 $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \omega_0| < \epsilon)$ i
 pišemo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0$.
- Ako je ω_0 granična vrednost funkcije f u tački z_0 i $f(z_0) = \omega_0$ tada je f **neprekidna** u tački z_0 , tj. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Neka je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f je neprekidna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ akko su P i Q neprekidne u (x_0, y_0) i
 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} P(x, y) = \alpha$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} Q(x, y) = \beta$ i $f(z_0) = \alpha + i\beta = \omega_0$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Kompleksni broj ω_0 je **granična vrednost** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako za svaku ϵ -okolinu tačke ω_0 postoji δ -okolina tačke z_0 takva da se funkcijom f δ -okolina tačke z_0 , bez same tačke z_0 , preslikava u ϵ -okolinu tačke ω_0 , tj.
 $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \omega_0| < \epsilon)$ i
 pišemo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0$.
- Ako je ω_0 granična vrednost funkcije f u tački z_0 i $f(z_0) = \omega_0$ tada je f **neprekidna** u tački z_0 , tj. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Neka je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f je neprekidna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ akko su P i Q neprekidne u (x_0, y_0) i
 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} P(x, y) = \alpha$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} Q(x, y) = \beta$ i $f(z_0) = \alpha + i\beta = \omega_0$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Kompleksni broj ω_0 je **granična vrednost** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako za svaku ϵ -okolinu tačke ω_0 postoji δ -okolina tačke z_0 takva da se funkcijom f δ -okolina tačke z_0 , bez same tačke z_0 , preslikava u ϵ -okolinu tačke ω_0 , tj.
 $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \omega_0| < \epsilon)$ i
 pišemo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \omega_0$.
- Ako je ω_0 granična vrednost funkcije f u tački z_0 i $f(z_0) = \omega_0$ tada je f **neprekidna** u tački z_0 , tj. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.
- Neka je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, f je neprekidna u tački $z_0 = x_0 + iy_0$ akko su P i Q neprekidne u (x_0, y_0) i
 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} P(x, y) = \alpha$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} Q(x, y) = \beta$ i $f(z_0) = \alpha + i\beta = \omega_0$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **neprekidna u oblasti** D ako je neprekidna u svakoj tački oblasti D . Zbir, proizvod, količnik i kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.
- Funkcija $\omega = f(z)$ definisana u nekoj okolini tačke z_0 je **diferencijabilna** u tački z_0 akko postoji

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \text{ tj. } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Ovu graničnu vrednost nazivamo **izvodom** funkcije $\omega = f(z)$ u tački z_0 i označavamo $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$ ili $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **neprekidna u oblasti** D ako je neprekidna u svakoj tački oblasti D . Zbir, proizvod, količnik i kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.
- Funkcija $\omega = f(z)$ definisana u nekoj okolini tačke z_0 je **diferencijabilna** u tački z_0 akko postoji

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \text{ tj. } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Ovu graničnu vrednost nazivamo **izvodom** funkcije $\omega = f(z)$ u tački z_0 i označavamo $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$ ili $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **neprekidna u oblasti** D ako je neprekidna u svakoj tački oblasti D . Zbir, proizvod, količnik i kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.
- Funkcija $\omega = f(z)$ definisana u nekoj okolini tačke z_0 je **diferencijabilna** u tački z_0 akko postoji

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \text{ tj. } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

- Ovu graničnu vrednost nazivamo **izvodom** funkcije $\omega = f(z)$ u tački z_0 i označavamo $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$ ili $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D , kažemo da je ona **diferencijabilna u oblasti D** i njen **prvi izvod** u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ označavamo $\Delta f(z_0)$ i nazivamo ga **priraštaj funkcije f u z_0** , a $\Delta z = z_1 - z_0$ nazivamo **priraštajem nezavisne promenljive z** .
- Sa df i dz označavamo **diferencijal** funkcije f i nezavisne promenljive z .
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
 $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D , tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D , kažemo da je ona **diferencijabilna u oblasti D** i njen **prvi izvod** u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ označavamo $\Delta f(z_0)$ i nazivamo ga **priraštaj funkcije f u z_0** , a $\Delta z = z_1 - z_0$ nazivamo **priraštajem nezavisne promenljive z** .
- Sa df i dz označavamo **diferencijal** funkcije f i nezavisne promenljive z .
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
 $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D , tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D , kažemo da je ona **diferencijabilna u oblasti D** i njen **prvi izvod** u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ označavamo $\Delta f(z_0)$ i nazivamo ga **priraštaj funkcije f u z_0** , a $\Delta z = z_1 - z_0$ nazivamo **priraštajem nezavisne promenljive z** .
- Sa df i dz označavamo **diferencijal** funkcije f i nezavisne promenljive z .
- $$f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
 $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D , tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D , kažemo da je ona **diferencijabilna u oblasti D** i njen **prvi izvod** u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ označavamo $\Delta f(z_0)$ i nazivamo ga **priraštaj funkcije f u z_0** , a $\Delta z = z_1 - z_0$ nazivamo **priraštajem nezavisne promenljive z** .
- Sa df i dz označavamo **diferencijal** funkcije f i nezavisne promenljive z .
- $$f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
 $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D , tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D , kažemo da je ona **diferencijabilna u oblasti D** i njen **prvi izvod** u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ označavamo $\Delta f(z_0)$ i nazivamo ga **priraštaj funkcije f u z_0** , a $\Delta z = z_1 - z_0$ nazivamo **priraštajem nezavisne promenljive z** .
- Sa df i dz označavamo **diferencijal** funkcije f i nezavisne promenljive z .
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
 $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D , tada je ona neprekidna u toj tački.

Kompleksna funkcija kompleksne promenljive

- Ako je f diferencijabilna u svakoj tački oblasti D , kažemo da je ona **diferencijabilna u oblasti D** i njen **prvi izvod** u tački $z \in D$ označavamo $f'(z)$, $\frac{df}{dz}$ ili $\frac{df}{dz}(z)$.
- Izraz $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ označavamo $\Delta f(z_0)$ i nazivamo ga **priraštaj funkcije f u z_0** , a $\Delta z = z_1 - z_0$ nazivamo **priraštajem nezavisne promenljive z** .
- Sa df i dz označavamo **diferencijal** funkcije f i nezavisne promenljive z .
- $f'(z) = \frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.
- Zbir, proizvod, količnik, složena funkcija se diferenciraju po istim pravilima kao u realnoj analizi
 $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z, \dots$
- Ako je f diferencijabilna u unutrašnjoj tački oblasti D , tada je ona neprekidna u toj tački.

Koši-Rimanovi uslovi

Ako je f diferencijabilna u z , tada $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$ i

$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ ne zavisi od $\arg \Delta z = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df}{dz}(z) = \frac{d(P(x, y) + iQ(x, y))}{d(x + iy)} \\ &= \frac{dP + idQ}{dx + idy} = \frac{P_x dx + P_y dy + i(Q_x dx + Q_y dy)}{dx + idy} \\ &= \frac{(P_x + iQ_x)dx + i(-iP_y + Q_y)dy}{dx + idy}. \end{aligned}$$

Oдавde je $\frac{P_x + iQ_x}{1} = \frac{-iP_y + Q_y}{1}$, te su **potrebni uslovi diferencijabilnosti** funkcije $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ koji se nazivaju **Koši-Rimanovi uslovi**

$$P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x.$$

Koši-Rimanovi uslovi

Ako je f diferencijabilna u z , tada $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$ i

$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ ne zavisi od $\arg \Delta z = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df}{dz}(z) = \frac{d(P(x, y) + iQ(x, y))}{d(x + iy)} \\ &= \frac{dP + i dQ}{dx + i dy} = \frac{P_x dx + P_y dy + i(Q_x dx + Q_y dy)}{dx + i dy} \\ &= \frac{(P_x + iQ_x)dx + i(-iP_y + Q_y)dy}{dx + i dy}. \end{aligned}$$

Odavde je $\frac{P_x + iQ_x}{1} = \frac{-iP_y + Q_y}{1}$, te su **potrebni uslovi diferencijabilnosti** funkcije $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ koji se nazivaju **Koši-Rimanovi uslovi**

$$P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x.$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, bude diferencijabilna u tački $z = x + iy$, $z \in D$ je da funkcije P i Q budu diferencijabilne u tački (x,y) i da važi $P_x = Q_y$ i $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x , P_y , Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r,\varphi) + i\mathcal{Q}(r,\varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r,\varphi)$, $\mathcal{Q}(r,\varphi)$ diferencijabilne u (r,φ) ,
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, bude diferencijabilna u tački $z = x + iy$, $z \in D$ je da funkcije P i Q budu diferencijabilne u tački (x, y) i da važi $P_x = Q_y$ i $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x , P_y , Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r, \varphi) + i\mathcal{Q}(r, \varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r, \varphi)$, $\mathcal{Q}(r, \varphi)$ diferencijabilne u (r, φ) ,
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, bude diferencijabilna u tački $z = x + iy$, $z \in D$ je da funkcije P i Q budu diferencijabilne u tački (x,y) i da važi $P_x = Q_y$ i $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x , P_y , Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r,\varphi) + i\mathcal{Q}(r,\varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r,\varphi)$, $\mathcal{Q}(r,\varphi)$ diferencijabilne u (r,φ) ,
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, bude diferencijabilna u tački $z = x + iy$, $z \in D$ je da funkcije P i Q budu diferencijabilne u tački (x,y) i da važi $P_x = Q_y$ i $P_y = -Q_x$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije f je egzistencija i neprekidnost P_x , P_y , Q_x i Q_y uz Koši-Rimanove uslove.

$$f'(z) = P_x + iQ_x = Q_y - iP_y = P_x - iP_y = Q_y + iQ_x.$$

Za funkciju $f(z) = f(re^{i\varphi}) = \mathcal{P}(r, \varphi) + i\mathcal{Q}(r, \varphi)$, potreban i dovoljan uslov diferencijabilnosti:

- $\mathcal{P}(r, \varphi)$, $\mathcal{Q}(r, \varphi)$ diferencijabilne u (r, φ) ,
- $\mathcal{P}_r = \frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r$.

$$f'(z) = -\frac{i}{z}(\mathcal{P}_\varphi + i\mathcal{Q}_\varphi) = \frac{r}{z}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r).$$

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Rešenje: Kako je $P(x, y) = e^x \cos y$, $Q(x, y) = e^x \sin y$, $P_x = e^x \cos y = Q_y$, $P_y = -e^x \sin y = -Q_x$, to je $(e^z)' = f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Rešenje: Kako su $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = 0$, parcijalni izvodi su neprekidne funkcije $P_x = 2x$, $Q_y = 0$, $P_y = 2y$, $Q_x = 0$, ali Koši-Rimanovi uslovi su ispunjeni samo za $z = 0$, te funkcija diferencijabilna samo u tački $z = 0$ i $f'(0) = 0$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Rešenje: Kako je $P(x, y) = e^x \cos y$, $Q(x, y) = e^x \sin y$, $P_x = e^x \cos y = Q_y$, $P_y = -e^x \sin y = -Q_x$, to je $(e^z)' = f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Rešenje: Kako su $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = 0$, parcijalni izvodi su neprekidne funkcije $P_x = 2x$, $Q_y = 0$, $P_y = 2y$, $Q_x = 0$, ali Koši-Rimanovi uslovi su ispunjeni samo za $z = 0$, te funkcija diferencijabilna samo u tački $z = 0$ i $f'(0) = 0$.

Primer

Ispitati diferencijabilnost i naći izvod funkcije $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje: $f(z) = z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi$, odatle je $\mathcal{P}_r = nr^{n-1} \cos n\varphi$, $\mathcal{P}_\varphi = -nr^n \sin n\varphi$, $\mathcal{Q}_r = nr^{n-1} \sin n\varphi$, $\mathcal{Q}_\varphi = nr^n \cos n\varphi$, dakle, važi

$$\mathcal{P}_r = -\frac{1}{r}\mathcal{Q}_\varphi \quad \text{i} \quad \mathcal{P}_\varphi = -r\mathcal{Q}_r.$$

$$(z^n)' = f'(z) = f'(re^{i\varphi}) = \frac{r}{re^{i\varphi}}(\mathcal{P}_r + i\mathcal{Q}_r) = e^{-i\varphi}(nr^{n-1} \cos n\varphi + inr^{n-1} \sin n\varphi) = e^{-i\varphi} nr^{n-1} e^{in\varphi} = nr^{n-1} e^{i(n-1)\varphi} = nz^{n-1}.$$

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **analitička** u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je **analitička na skupu** D ako je analitička u svakoj tački skupa D .

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su **regularne tačke**, a one u kojima nije analitička su **singularne tačke** ili **singulariteti** funkcije.

Funkcija u je **harmonijska** funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **analitička** u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je **analitička na skupu** D ako je analitička u svakoj tački skupa D .

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su **regularne tačke**, a one u kojima nije analitička su **singularne tačke** ili **singulariteti** funkcije.

Funkcija u je **harmonijska** funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **analitička** u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je **analitička na skupu** D ako je analitička u svakoj tački skupa D .

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su **regularne tačke**, a one u kojima nije analitička su **singularne tačke** ili **singulariteti** funkcije.

Funkcija u je **harmonijska** funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **analitička** u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je **analitička na skupu** D ako je analitička u svakoj tački skupa D .

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su **regularne tačke**, a one u kojima nije analitička su **singularne tačke** ili **singulariteti** funkcije. Funkcija u je **harmonijska** funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Analitička funkcija

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je **analitička** u tački $z_0 \in D$ ako postoji okolina tačke z_0 takva da je f diferencijabilna u svakoj tački te okoline. Funkcija je **analitička na skupu** D ako je analitička u svakoj tački skupa D .

Primer

Funkcija $f(z) = |z|^2$ je diferencijabilna u tački $z = 0$, ali nije analitička u tački $z = 0$ jer nije diferencijabilna ni u jednoj drugoj tački.

Tačke u kojima je funkcija analitička su **regularne tačke**, a one u kojima nije analitička su **singularne tačke** ili **singulariteti** funkcije.

Funkcija u je **harmonijska** funkcija ako su $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne funkcije i važi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ako je $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ analitička funkcija tada su P i Q harmonijske funkcije.

Primer

Odrediti analitičku funkciju $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + i(2xy+5y)$, tako da važi $f(i) = 5i$.

Rešenje: Kako je $Q(x,y) = 2xy + 5y$, dobijamo $Q_x = 2y = -P_y$. Odatle je

$$P(x,y) = \int -2y dy = -\frac{2y^2}{2} + \varphi(x).$$

Dakle, $P_x = \varphi'(x) = 2x + 5 = Q_y$, te je $\varphi(x) = x^2 + 5x + C$.

$$\begin{aligned} f(z) = f(x+iy) &= (x^2 + 5x - y^2 + C) + i(2xy + 5y) \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + 5(x+iy) + C = z^2 + 5z + C. \end{aligned}$$

Kako je $f(i) = 5i - 1 + C = 5i$, dobijamo da je $C = 1$ i konačno je $f(z) = z^2 + 5z + 1$.