Elementarne funkcije kompleksne promenljive

PREDAVANJA 9

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, novembar 2023

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D, onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D.
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0, onda je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $z \in \mathcal{O}(z_0)$, tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0.
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D, onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D.
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0, onda je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $z \in \mathcal{O}(z_0)$, tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0.
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D, onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D.
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0, onda je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $z \in \mathcal{O}(z_0)$, tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0.
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D, onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D.
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0, onda je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $z \in \mathcal{O}(z_0)$, tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0.
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

- Ako je f analitička na D i $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, tada nad oblašću slika funkcije f postoji inverzna funkcija $z = \varphi(\omega)$, koja je analitička i za svako $z_0 \in D$ je

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi(\omega_0)}, \text{ gde je } \omega_0 = f(z_0).$$

- Ako je f analitička funkcija na zatvorenoj oblasti D, maksimum modula vrednosti funkcije $(\max_{z \in D} |f(z)|)$ biće dostignut na rubu oblasti D.
- Ako je f analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena nad $\mathbb{C}$, onda je f jednaka konstanti.

Osobine analitičkih funkcija

- Ako je f analitička na D i $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, tada nad oblašću slika funkcije f postoji inverzna funkcija $z = \varphi(\omega)$, koja je analitička i za svako $z_0 \in D$ je

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi(\omega_0)}, \text{ gde je } \omega_0 = f(z_0).$$

- Ako je f analitička funkcija na zatvorenoj oblasti D, maksimum modula vrednosti funkcije $(\max\limits_{z \in D} |f(z)|)$ biće dostignut na rubu oblasti D.
- Ako je f analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena nad $\mathbb{C}$, onda je f jednaka konstanti.

Osobine analitičkih funkcija

- Ako je f analitička na D i $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, tada nad oblašću slika funkcije f postoji inverzna funkcija $z = \varphi(\omega)$, koja je analitička i za svako $z_0 \in D$ je

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi(\omega_0)}, \text{ gde je } \omega_0 = f(z_0).$$

- Ako je f analitička funkcija na zatvorenoj oblasti D, maksimum modula vrednosti funkcije $(\max_{z \in D} |f(z)|)$ biće dostignut na rubu oblasti D.
- Ako je f analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena nad $\mathbb{C}$, onda je f jednaka konstanti.

Osobine analitičkih funkcija

- Dve analitičke funkcije u oblasti D su jednake nad D ako su jednake nad bilo kojim beskonačnim podskupom koji u D ima tačku nagomilavanja.
- Ako niz (ili red) funkcija f_k, analitičkih na otvorenoj oblasti D, konvergira uniformno ka f, tada je f analitička na D i niz (ili red) izvoda f_k' uniformno konvergira ka f' na D (uniformna konvergencija niza funkcija u $\mathbb{C}$ se definiše analogno kao u realnoj analizi).
- Kažemo da je f analitička u tački ∞ ako je $f(\frac{1}{z})$ analitička u tački $z = 0$.

Osobine analitičkih funkcija

- Dve analitičke funkcije u oblasti D su jednake nad D ako su jednake nad bilo kojim beskonačnim podskupom koji u D ima tačku nagomilavanja.
- Ako niz (ili red) funkcija f_k, analitičkih na otvorenoj oblasti D, konvergira uniformno ka f, tada je f analitička na D i niz (ili red) izvoda f_k' uniformno konvergira ka f' na D (uniformna konvergencija niza funkcija u $\mathbb{C}$ se definiše analogno kao u realnoj analizi).
- Kažemo da je f analitička u tački ∞ ako je $f(\frac{1}{z})$ analitička u tački $z = 0$.

Osobine analitičkih funkcija

- Dve analitičke funkcije u oblasti D su jednake nad D ako su jednake nad bilo kojim beskonačnim podskupom koji u D ima tačku nagomilavanja.
- Ako niz (ili red) funkcija f_k, analitičkih na otvorenoj oblasti D, konvergira uniformno ka f, tada je f analitička na D i niz (ili red) izvoda f_k' uniformno konvergira ka f' na D (uniformna konvergencija niza funkcija u $\mathbb{C}$ se definiše analogno kao u realnoj analizi).
- Kažemo da je f analitička u tački ∞ ako je $f(\frac{1}{z})$ analitička u tački $z = 0$.

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z, $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$
- $e^z \cdot e^\omega = e^{z+\omega}, \quad z, \omega \in \mathbb{C},$
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z,$

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z, $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$
- $e^z \cdot e^\omega = e^{z+\omega}, \quad z, \omega \in \mathbb{C},$
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z,$

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z, $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}, \ \sin z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \cos z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z, \ (\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z,$
- $e^z \cdot e^\omega = e^{z+\omega}, \ z, \omega \in \mathbb{C},$
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z,$

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z, $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}, \ \sin z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \cos z = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z, \ \ (\sin z)' = \cos z, \ \ (\cos z)' = -\sin z,$
- $e^z \cdot e^\omega = e^{z+\omega}, \ \ z, \omega \in \mathbb{C},$
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z,$

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z+\omega) = \sin z \cos\omega + \cos z \sin\omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos\omega + \cos z \sin\omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z+\omega) = \sin z \cos\omega + \cos z \sin\omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$

- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π, $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$), a zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je
$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$
- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π, $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$), a zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$

- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π, $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$), a zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je
$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$
- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π, $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$), a zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Elementarne funkcije

2. Logaritamska funkcija $\mathrm{Ln}\, z$.

Logaritam (pripodni) kompleksnog broja $z \neq 0$ je onaj broj $\omega \in \mathbb{C}$ za koji važi $e^{\omega} = z$ i pišemo $\omega = \mathrm{Ln}\, z$.

Neka je $\omega = a + ib$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$e^{\omega} = e^{a}e^{ib} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Odatle je $e^{a} = r = |z|$, tj. $a = \ln r$ i $b = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle,

$$\boxed{\mathrm{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\mathrm{Ln}\, z = \ln|z|, \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Arg}\, z.}$$

Elementarne funkcije

2. Logaritamska funkcija $\mathrm{Ln}\, z$.

Logaritam (pripodni) kompleksnog broja $z \neq 0$ je onaj broj $\omega \in \mathbb{C}$ za koji važi $e^{\omega} = z$ i pišemo $\omega = \mathrm{Ln}\, z$.

Neka je $\omega = a + ib$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$e^{\omega} = e^{a}e^{ib} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Odatle je $e^{a} = r = |z|$, tj. $a = \ln r$ i $b = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle,

$$\boxed{\mathrm{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z},}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\mathrm{Ln}\, z = \ln|z|,\ \ \mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\, z = \mathrm{Arg}\, z.}$$

Logaritamska funkcija $\mathrm{Ln}\, z$

Primer

Odrediti $\mathrm{Ln}\, i$, $\mathrm{Ln}\, 1$ *i* $\mathrm{Ln}\,(-1)$.

Rešenje:

$$\mathrm{Ln}\, i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1+4k) = \frac{\pi i}{2}(1+4k), \; k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\, 1 = \ln|1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\,(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Logaritamska funkcija $\mathrm{Ln}\, z$

Primer

Odrediti $\mathrm{Ln}\, i$, $\mathrm{Ln}\, 1$ *i* $\mathrm{Ln}\, (-1)$.

<u>*Rešenje:*</u>

$$\mathrm{Ln}\, i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1+4k) = \frac{\pi i}{2}(1+4k), \ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\, 1 = \ln|1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\, (-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Logaritamska funkcija $\mathrm{Ln}\, z$

Primer

Odrediti $\mathrm{Ln}\, i$, $\mathrm{Ln}\, 1$ *i* $\mathrm{Ln}\,(-1)$.

Rešenje:

$$\mathrm{Ln}\, i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1+4k) = \frac{\pi i}{2}(1+4k),\ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\, 1 = \ln|1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\,(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Logaritamska funkcija $\mathrm{Ln}\, z$

Primer

Odrediti $\mathrm{Ln}\, i$, $\mathrm{Ln}\, 1$ *i* $\mathrm{Ln}\,(-1)$.

Rešenje:

$$\mathrm{Ln}\, i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1+4k) = \frac{\pi i}{2}(1+4k),\ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\, 1 = \ln|1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Ln}\,(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Logaritamska funkcija $\operatorname{Ln} z$

- Kako je $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}$, za $k = 0$ dobijamo glavnu granu višeznačne funkcije $\operatorname{Ln} z$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Dakle,

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}.}$$

- $$\operatorname{Ln}(z \cdot \omega) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} \omega, \qquad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- $$\operatorname{Ln} \frac{z}{\omega} = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} \omega, \qquad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Logaritamska funkcija $\operatorname{Ln} z$

- Kako je $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}$, za $k = 0$ dobijamo glavnu granu višeznačne funkcije $\operatorname{Ln} z$

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Dakle,

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}.}$$

-
$$\operatorname{Ln}(z \cdot \omega) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} \omega, \qquad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

-
$$\operatorname{Ln} \frac{z}{\omega} = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} \omega, \qquad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Logaritamska funkcija $\mathrm{Ln}\, z$

- Kako je $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, za $k = 0$ dobijamo glavnu granu višeznačne funkcije $\mathrm{Ln}\, z$

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Dakle,

$$\boxed{\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}.}$$

- $$\mathrm{Ln}\,(z \cdot \omega) = \mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, \omega, \qquad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- $$\mathrm{Ln}\, \frac{z}{\omega} = \mathrm{Ln}\, z - \mathrm{Ln}\, \omega, \qquad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Elementarne funkcije

3. Stepena funkcija z^{α}, $\alpha \in \mathbb{C}$

- Stepena funkcija $\omega = z^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiše se sa

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}, \quad z \neq 0.$$

Dakle,

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = e^{\alpha(\ln z + 2k\pi i)} = e^{\alpha \ln z} e^{2k\pi\alpha i} = \omega_0 e^{2k\pi\alpha i}, \; k \in \mathbb{Z},$$

gde je ω_0 (za $k = 0$) jedna od vrednosti višeznačne funkcije $\omega = z^{\alpha}$. Sve njene vrednosti obrazuju geometrijsku progresiju $\ldots, \omega_0 e^{-2n\pi\alpha i}, \ldots, \omega_0 e^{-2\pi\alpha i}, \omega_0, \omega_0 e^{2\pi\alpha i}, \ldots, \omega_0 e^{2n\pi\alpha i}, \ldots$

Stepena funkcija z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = n$.
  Dakle, $\omega = z^n = \omega_0 e^{2k\pi n i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $e^{2k\pi n i} = 1$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, stepena funkcija $\omega = z^n = \omega_0$ je jednoznačna ako je stepen $n \in \mathbb{Z}$.
  Specijalno, ako je $n \in \mathbb{N}$, tada je $\omega = z^n$ polinomna funkcija definisana i neprekidna za svako $z \in \mathbb{C}$.
- $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q su uzajamno prosti.
  Dakle, $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \omega_0 e^{2k\pi \frac{p}{q} i}$, $k \in \mathbb{Z}$, te u ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je q-značna i ima q različitih vrednosti koje dobijamo za $k = 0, \ldots, q-1$.
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tj. α je iracionalan broj.
  U ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je beskonačnoznačna, sve njene vrednosti imaju isti modul $|\omega_0|$, a različite argumente $\arg \omega_0 + 2k\pi\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stepena funkcija z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = n$.
  Dakle, $\omega = z^n = \omega_0 e^{2k\pi n i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $e^{2k\pi n i} = 1$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, stepena funkcija $\omega = z^n = \omega_0$ je jednoznačna ako je stepen $n \in \mathbb{Z}$.
  Specijalno, ako je $n \in \mathbb{N}$, tada je $\omega = z^n$ polinomna funkcija definisana i neprekidna za svako $z \in \mathbb{C}$.
- $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q su uzajamno prosti.
  Dakle, $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \omega_0 e^{2k\pi \frac{p}{q} i}$, $k \in \mathbb{Z}$, te u ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je q-značna i ima q različitih vrednosti koje dobijamo za $k = 0, \ldots, q-1$.
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tj. α je iracionalan broj.
  U ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je beskonačnoznačna, sve njene vrednosti imaju isti modul $|\omega_0|$, a različite argumente $\arg \omega_0 + 2k\pi\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stepena funkcija z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = n$.
  Dakle, $\omega = z^n = \omega_0 e^{2k\pi ni}$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $e^{2k\pi ni} = 1$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, stepena funkcija $\omega = z^n = \omega_0$ je jednoznačna ako je stepen $n \in \mathbb{Z}$.
  Specijalno, ako je $n \in \mathbb{N}$, tada je $\omega = z^n$ polinomna funkcija definisana i neprekidna za svako $z \in \mathbb{C}$.
- $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q su uzajamno prosti.
  Dakle, $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \omega_0 e^{2k\pi \frac{p}{q} i}$, $k \in \mathbb{Z}$, te u ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je q-značna i ima q različitih vrednosti koje dobijamo za $k = 0, \ldots, q-1$.
- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tj. α je iracionalan broj.
  U ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je beskonačnoznačna, sve njene vrednosti imaju isti modul $|\omega_0|$, a različite argumente $\arg \omega_0 + 2k\pi\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stepena funkcija z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha = bi$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Kako je $e^{2k\pi\alpha i} = e^{-2k\pi b} \in \mathbb{R}^+$, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je beskonačnoznačna, sve njene vrednosti imaju isti argument, $\arg \omega_0$, a različite module $|\omega_0| e^{-2k\pi b}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je beskonačnoznačna, njene vrednosti se mogu razlikovati i po modulu i po argumentu.

Primer

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \ k \in \mathbb{Z},$$

$$(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} e^{i \ln \sqrt{2}}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Stepena funkcija z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha = bi$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Kako je $e^{2k\pi\alpha i} = e^{-2k\pi b} \in \mathbb{R}^+$, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je beskonačnoznačna, sve njene vrednosti imaju isti argument, $\arg \omega_0$, a različite module $|\omega_0| e^{-2k\pi b}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je beskonačnoznačna, njene vrednosti se mogu razlikovati i po modulu i po argumentu.

Primer

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

$$(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} e^{i \ln\sqrt{2}}, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$ i $\mathrm{Arctg}\, z$.

- $\mathrm{Arcsin}\, z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin\omega = z$, tj. $\frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i} = z$, odnosno

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Dakle,

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1 - z^2}),\ \ z \in \mathbb{C}.}$$

Slično je i

$$\boxed{\mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}\,(z + i\sqrt{1 - z^2}),\ \ z \in \mathbb{C},}$$

$$\boxed{\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\frac{1 + iz}{1 - iz},\ \ z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.}$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

- $\operatorname{Arcsin} z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin\omega = z$, tj. $\frac{e^{\omega i}-e^{-\omega i}}{2i} = z$, odnosno

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1-z^2}$. Dakle,

$$\boxed{\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}),\ z \in \mathbb{C}.}$$

Slično je i

$$\boxed{\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + i\sqrt{1-z^2}),\ z \in \mathbb{C},}$$

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\ z \in \mathbb{C}\setminus\{-i, i\}.}$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$ i $\mathrm{Arctg}\, z$.

- $\mathrm{Arcsin}\, z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin\omega = z$, tj. $\frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i} = z$, odnosno

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Dakle,

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1 - z^2}), \;\; z \in \mathbb{C}.}$$

Slično je i

$$\boxed{\mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}\,(z + i\sqrt{1 - z^2}), \;\; z \in \mathbb{C},}$$

$$\boxed{\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\frac{1 + iz}{1 - iz}, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.}$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$ i $\mathrm{Arctg}\, z$.

- $\mathrm{Arcsin}\, z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin\omega = z$, tj. $\frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i} = z$, odnosno

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1-z^2}$. Dakle,

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1-z^2}),\ \ z \in \mathbb{C}.}$$

Slično je i

$$\boxed{\mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}\,(z + i\sqrt{1-z^2}),\ \ z \in \mathbb{C},}$$

$$\boxed{\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz},\ \ z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.}$$

Inverzne trigonometrijske funkcije $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$ i $\mathrm{Arctg}\, z$.

Primer

Odrediti $\mathrm{Arcsin}\, i$ *i* $\mathrm{Arctg}\, 1$.

$$\mathrm{Arcsin}\, i = -i\mathrm{Ln}\,(-1 \pm \sqrt{2}), \ \ k \in \mathbb{Z},$$

$\mathrm{Arcsin}\, i = -i(\ln|-1+\sqrt{2}| + 2k\pi i) = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
$\mathrm{Arcsin}\, i = -i(\ln|-1-\sqrt{2}| + 2k\pi i) = (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$$\mathrm{Arctg}\, 1 = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Inverzne trigonometrijske funkcije $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$ i $\mathrm{Arctg}\, z$.

Primer

Odrediti $\mathrm{Arcsin}\, i$ *i* $\mathrm{Arctg}\, 1$.

$$\mathrm{Arcsin}\, i = -i\mathrm{Ln}\,(-1 \pm \sqrt{2}),\ \ k \in \mathbb{Z},$$

$\mathrm{Arcsin}\, i = -i(\ln|-1+\sqrt{2}| + 2k\pi i) = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
$\mathrm{Arcsin}\, i = -i(\ln|-1-\sqrt{2}| + 2k\pi i) = (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

$$\mathrm{Arctg}\, 1 = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Inverzne trigonometrijske funkcije $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$ i $\mathrm{Arctg}\, z$.

Primer

Odrediti $\mathrm{Arcsin}\, i$ *i* $\mathrm{Arctg}\, 1$.

$$\mathrm{Arcsin}\, i = -i\mathrm{Ln}\,(-1 \pm \sqrt{2}), \;\; k \in \mathbb{Z},$$

$\mathrm{Arcsin}\, i = -i(\ln|-1+\sqrt{2}| + 2k\pi i) = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
$\mathrm{Arcsin}\, i = -i(\ln|-1-\sqrt{2}| + 2k\pi i) = (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$,
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$$\mathrm{Arctg}\, 1 = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi}{4} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Višeznačne funkcije

- List je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- Grana predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- Zasek predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- Rimanova površ funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je tačka grananja funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. Red tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti algebarski (konačan) ili transcedentan (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- List je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- Grana predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- Zasek predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- Rimanova površ funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je tačka grananja funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. Red tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti algebarski (konačan) ili transcedentan (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- List je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- Grana predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- Zasek predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- Rimanova površ funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je tačka grananja funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. Red tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti algebarski (konačan) ili transcedentan (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- List je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- Grana predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- Zasek predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- Rimanova površ funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je tačka grananja funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. Red tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti algebarski (konačan) ili transcedentan (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- List je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- Grana predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- Zasek predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- Rimanova površ funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je tačka grananja funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. Red tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti algebarski (konačan) ili transcedentan (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- Primer n-značne funkcije je $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gde je n prirodan broj, koja ima n grana, a to su funkcije $f_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{n} i}$, $k = 0, \ldots, n-1$.
- Listovi Rimanove površi definisani su sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \,|\, \varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)\}$, za $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Za $k = 0$ dobija se glavna grana funkcije $f_0(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\arg z}{n} i}$, definisana na listu L_0, sa skupom slika $G_0 = \{\omega \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \arg \omega < \frac{2\pi}{n}\}$.
- Obilaskom oko tačaka $z = 0$ i $z = \infty$ argument nezavisno promenljive menja se tako da dolazi do promene grane funkcije. Tačke 0 i ∞ su algebarske tačke grananja n-tog reda.