

Elementarne funkcije kompleksne promenljive

PREDAVANJA 9

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, novembar 2024

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D , onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D .
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0 , onda je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathcal{O}(z_0),$$
 tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0 .
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D , onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D .
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0 , onda je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathcal{O}(z_0),$$
 tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0 .
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D , onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D .
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0 , onda je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathcal{O}(z_0),$$
 tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0 .
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

- Ako je f analitička funkcija na D , onda je izvodna funkcija f' neprekidna funkcija na D .
- Analitička funkcija ima izvod proizvoljnog reda n u svim regularnim tačkama i svi izvodi su analitičke funkcije.
- Ako je f analitička funkcija u tački z_0 , onda je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathcal{O}(z_0),$$
 tj. postoji konvergentan stepeni red koji reprezentuje f u okolini $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0 .
- Ako je funkcija f definisana sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, gde z pripada oblasti konvergencije stepenog reda $|z - z_0| < r$, onda je f analitička funkcija.

Osobine analitičkih funkcija

- Ako je f analitička na D i $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, tada nad oblašću slika funkcije f postoji inverzna funkcija $z = \varphi(\omega)$, koja je analitička i za svako $z_0 \in D$ je

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(\omega_0)}, \text{ gde je } \omega_0 = f(z_0).$$

- Ako je f analitička funkcija na zatvorenoj oblasti D , maksimum modula vrednosti funkcije ($\max_{z \in D} |f(z)|$) biće dostignut na rubu oblasti D .
- Ako je f analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena nad $\mathbb{C}$, onda je f jednaka konstanti.

Osobine analitičkih funkcija

- Ako je f analitička na D i $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, tada nad oblašću slika funkcije f postoji inverzna funkcija $z = \varphi(\omega)$, koja je analitička i za svako $z_0 \in D$ je

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(\omega_0)}, \text{ gde je } \omega_0 = f(z_0).$$

- Ako je f analitička funkcija na zatvorenoj oblasti D , maksimum modula vrednosti funkcije ($\max_{z \in D} |f(z)|$) biće dostignut na rubu oblasti D .
- Ako je f analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena nad $\mathbb{C}$, onda je f jednaka konstanti.

Osobine analitičkih funkcija

- Ako je f analitička na D i $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, tada nad oblašću slika funkcije f postoji inverzna funkcija $z = \varphi(\omega)$, koja je analitička i za svako $z_0 \in D$ je

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(\omega_0)}, \text{ gde je } \omega_0 = f(z_0).$$

- Ako je f analitička funkcija na zatvorenoj oblasti D , maksimum modula vrednosti funkcije ($\max_{z \in D} |f(z)|$) biće dostignut na rubu oblasti D .
- Ako je f analitička na $\mathbb{C}$ i ograničena nad $\mathbb{C}$, onda je f jednaka konstanti.

Osobine analitičkih funkcija

- Dve analitičke funkcije u oblasti D su jednake nad D ako su jednake nad bilo kojim beskonačnim podskupom koji u D ima tačku nagomilavanja.
- Ako niz (ili red) funkcija f_k , analitičkih na otvorenoj oblasti D , konvergira uniformno ka f , tada je f analitička na D i niz (ili red) izvoda f'_k uniformno konvergira ka f' na D (uniformna konvergencija niza funkcija u $\mathbb{C}$ se definiše analogno kao u realnoj analizi).
- Kažemo da je f analitička u tački ∞ ako je $f(\frac{1}{z})$ analitička u tački $z = 0$.

Osobine analitičkih funkcija

- Dve analitičke funkcije u oblasti D su jednake nad D ako su jednake nad bilo kojim beskonačnim podskupom koji u D ima tačku nagomilavanja.
- Ako niz (ili red) funkcija f_k , analitičkih na otvorenoj oblasti D , konvergira uniformno ka f , tada je f analitička na D i niz (ili red) izvoda f'_k uniformno konvergira ka f' na D (uniformna konvergencija niza funkcija u $\mathbb{C}$ se definiše analogno kao u realnoj analizi).
- Kažemo da je f analitička u tački ∞ ako je $f(\frac{1}{z})$ analitička u tački $z = 0$.

Osobine analitičkih funkcija

- Dve analitičke funkcije u oblasti D su jednake nad D ako su jednake nad bilo kojim beskonačnim podskupom koji u D ima tačku nagomilavanja.
- Ako niz (ili red) funkcija f_k , analitičkih na otvorenoj oblasti D , konvergira uniformno ka f , tada je f analitička na D i niz (ili red) izvoda f'_k uniformno konvergira ka f' na D (uniformna konvergencija niza funkcija u $\mathbb{C}$ se definiše analogno kao u realnoj analizi).
- Kažemo da je f analitička u tački ∞ ako je $f(\frac{1}{z})$ analitička u tački $z = 0$.

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z , $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$,
- $e^z \cdot e^{\omega} = e^{z+\omega}$, $z, \omega \in \mathbb{C}$,
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$,
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z$,

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z , $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$,
- $e^z \cdot e^{\omega} = e^{z+\omega}$, $z, \omega \in \mathbb{C}$,
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$,
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z$,

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z , $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$,
- $e^z \cdot e^{\omega} = e^{z+\omega}$, $z, \omega \in \mathbb{C}$,
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$,
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z$,

Elementarne funkcije

1. Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$.

Funkcije e^z , $\sin z$ i $\cos z$, za $z \in \mathbb{C}$, definisane su sa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Sve tri funkcije su analitičke u celoj kompleksnoj ravni.

- $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$,
- $e^z \cdot e^{\omega} = e^{z+\omega}$, $z, \omega \in \mathbb{C}$,
- $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$,
- $e^{zi} = \cos z + i \sin z$,

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- $\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$,
- $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,
- $\sin(z + \omega) = \sin z \cos \omega + \cos z \sin \omega$,
- ostali trigonometrijski identiteti imaju isti oblik kao u realnoj analizi,
- $\sin z$ ima nule u tačkama $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a $\cos z$ ima nule u tačkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$

- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$,
 $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π ,
 $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$,
 $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$), a
 zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$

- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$,
 $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π ,
 $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$,
 $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$), a
 zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$

- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$,
 $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π ,
 $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$,
 $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$), a
 zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Funkcije e^z , $\sin z$, $\cos z$

- Kako je $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, sledi da je

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$

- Funkcija e^z je periodična funkcija sa periodom $2\pi i$,
 $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$.
- Funkcija $\sin z$ i $\cos z$ su periodične funkcije sa periodom 2π ,
 $\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} - e^{-zi-2\pi i}}{2i} = \sin z$,
 $\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi+2\pi i} + e^{-zi-2\pi i}}{2} = \cos z$.
- Funkcija e^z nije definisana za $z = \infty$ (ne postoji $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$), a
 zato ni funkcije $\sin z$ i $\cos z$ nisu definisane za $z = \infty$.

Elementarne funkcije

2. Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$.

Logaritam (pripodni) kompleksnog broja $z \neq 0$ je onaj broj $\omega \in \mathbb{C}$ za koji važi $e^{\omega} = z$ i pišemo $\omega = \text{Ln } z$.

Neka je $\omega = a + ib$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$e^{\omega} = e^a e^{ib} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Odatle je $e^a = r = |z|$, tj. $a = \ln r$ i $b = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle,

$$\text{Ln } z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Re } \text{Ln } z = \ln |z|, \quad \text{Im } \text{Ln } z = \text{Arg } z.$$

Elementarne funkcije

2. Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$.

Logaritam (pripodni) kompleksnog broja $z \neq 0$ je onaj broj $\omega \in \mathbb{C}$ za koji važi $e^{\omega} = z$ i pišemo $\omega = \text{Ln } z$.

Neka je $\omega = a + ib$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$e^{\omega} = e^a e^{ib} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Odatle je $e^a = r = |z|$, tj. $a = \ln r$ i $b = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle,

$$\text{Ln } z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Re } \text{Ln } z = \ln |z|, \quad \text{Im } \text{Ln } z = \text{Arg } z.$$

Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$

Primer

Odrediti $\text{Ln } i$, $\text{Ln } 1$ i $\text{Ln } (-1)$.

Rešenje:

$$\text{Ln } i = \ln |i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1 + 4k) = \frac{\pi i}{2}(1 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } 1 = \ln |1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } (-1) = \ln |-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$

Primer

Odrediti $\text{Ln } i$, $\text{Ln } 1$ i $\text{Ln } (-1)$.

Rešenje:

$$\text{Ln } i = \ln |i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1 + 4k) = \frac{\pi i}{2}(1 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } 1 = \ln |1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } (-1) = \ln |-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$

Primer

Odrediti $\text{Ln } i$, $\text{Ln } 1$ i $\text{Ln } (-1)$.

Rešenje:

$$\text{Ln } i = \ln |i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1 + 4k) = \frac{\pi i}{2}(1 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } 1 = \ln |1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } (-1) = \ln |-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$

Primer

Odrediti $\text{Ln } i$, $\text{Ln } 1$ i $\text{Ln } (-1)$.

Rešenje:

$$\text{Ln } i = \ln |i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \ln 1 + \frac{\pi i}{2}(1 + 4k) = \frac{\pi i}{2}(1 + 4k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } 1 = \ln |1| + 2k\pi i = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Ln } (-1) = \ln |-1| + i(\pi + 2k\pi) = \ln 1 + (2k+1)\pi i = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$

- Kako je $\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, za $k = 0$ dobijamo **glavnu granu** višeznačne funkcije $\text{Ln } z$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Dakle,

$$\boxed{\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

$$\text{Ln}(z \cdot \omega) = \text{Ln } z + \text{Ln } \omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$\text{Ln} \frac{z}{\omega} = \text{Ln } z - \text{Ln } \omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$

- Kako je $\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, za $k = 0$ dobijamo **glavnu granu** višeznačne funkcije $\text{Ln } z$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Dakle,

$$\boxed{\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

•

$$\text{Ln}(z \cdot \omega) = \text{Ln } z + \text{Ln } \omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

•

$$\text{Ln } \frac{z}{\omega} = \text{Ln } z - \text{Ln } \omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Logaritamska funkcija $\text{Ln } z$

- Kako je $\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, za $k = 0$ dobijamo **glavnu granu** višeznačne funkcije $\text{Ln } z$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Dakle,

$$\boxed{\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

•

$$\text{Ln}(z \cdot \omega) = \text{Ln } z + \text{Ln } \omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

•

$$\text{Ln } \frac{z}{\omega} = \text{Ln } z - \text{Ln } \omega, \quad z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Elementarne funkcije

3. Stepena funkcija z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$

- Stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiše se sa

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \quad z \neq 0.$$

Dakle,

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln z + 2k\pi i)} = e^{\alpha \ln z} e^{2k\pi \alpha i} = \omega_0 e^{2k\pi \alpha i}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

gde je ω_0 (za $k = 0$) jedna od vrednosti višeznačne funkcije $\omega = z^\alpha$. Sve njene vrednosti obrazuju geometrijsku progresiju $\dots, \omega_0 e^{-2n\pi \alpha i}, \dots, \omega_0 e^{-2\pi \alpha i}, \omega_0, \omega_0 e^{2\pi \alpha i}, \dots, \omega_0 e^{2n\pi \alpha i}, \dots$

Stepena funkcija z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = n$.

Dakle, $\omega = z^n = \omega_0 e^{2k\pi ni}$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $e^{2k\pi ni} = 1$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, stepena funkcija $\omega = z^n = \omega_0$ je **jednoznačna** ako je stepen $n \in \mathbb{Z}$.

Specijalno, ako je $n \in \mathbb{N}$, tada je $\omega = z^n$ **polinomna** funkcija definisana i neprekidna za svako $z \in \mathbb{C}$.

- $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q su uzajamno prosti.

Dakle, $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \omega_0 e^{2k\pi \frac{p}{q} i}$, $k \in \mathbb{Z}$, te u ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **q-značna** i ima q različitih vrednosti koje dobijamo za $k = 0, \dots, q-1$.

- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tj. α je iracionalan broj.

U ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **beskonačnoznačna**, sve njene vrednosti imaju isti modul $|\omega_0|$, a različite argumente $\arg \omega_0 + 2k\pi\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stepena funkcija z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = n$.

Dakle, $\omega = z^n = \omega_0 e^{2k\pi ni}$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $e^{2k\pi ni} = 1$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, stepena funkcija $\omega = z^n = \omega_0$ je **jednoznačna** ako je stepen $n \in \mathbb{Z}$.

Specijalno, ako je $n \in \mathbb{N}$, tada je $\omega = z^n$ **polinomna** funkcija definisana i neprekidna za svako $z \in \mathbb{C}$.

- $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q su uzajamno prosti.

Dakle, $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \omega_0 e^{2k\pi \frac{p}{q} i}$, $k \in \mathbb{Z}$, te u ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **q-značna** i ima q različitih vrednosti koje dobijamo za $k = 0, \dots, q-1$.

- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tj. α je iracionalan broj.

U ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **beskonačnoznačna**, sve njene vrednosti imaju isti modul $|\omega_0|$, a različite argumente $\arg \omega_0 + 2k\pi\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stepena funkcija z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha = n$.

Dakle, $\omega = z^n = \omega_0 e^{2k\pi ni}$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $e^{2k\pi ni} = 1$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, stepena funkcija $\omega = z^n = \omega_0$ je **jednoznačna** ako je stepen $n \in \mathbb{Z}$.

Specijalno, ako je $n \in \mathbb{N}$, tada je $\omega = z^n$ **polinomna** funkcija definisana i neprekidna za svako $z \in \mathbb{C}$.

- $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q su uzajamno prosti.

Dakle, $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \omega_0 e^{2k\pi \frac{p}{q} i}$, $k \in \mathbb{Z}$, te u ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **q-značna** i ima q različitih vrednosti koje dobijamo za $k = 0, \dots, q-1$.

- $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tj. α je iracionalan broj.

U ovom slučaju, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **beskonačnoznačna**, sve njene vrednosti imaju isti modul $|\omega_0|$, a različite argumente $\arg \omega_0 + 2k\pi\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stepena funkcija z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha = bi$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kako je $e^{2k\pi ai} = e^{-2k\pi b} \in \mathbb{R}^+$, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **beskonačnoznačna**, sve njene vrednosti imaju isti argument, $\arg \omega_0$, a različite module $|\omega_0|e^{-2k\pi b}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **beskonačnoznačna**, njene vrednosti se mogu razlikovati i po modulu i po argumentu.

Primer

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} e^{i \ln \sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Stepena funkcija z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$

- $\alpha = bi$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kako je $e^{2k\pi i} = e^{-2k\pi b} \in \mathbb{R}^+$, stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **beskonačnoznačna**, sve njene vrednosti imaju isti argument, $\arg \omega_0$, a različite module $|\omega_0|e^{-2k\pi b}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Stepena funkcija $\omega = z^\alpha$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je **beskonačnoznačna**, njene vrednosti se mogu razlikovati i po modulu i po argumentu.

Primer

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} e^{i \ln \sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

- $\operatorname{Arcsin} z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin \omega = z$, tj.

$$\frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i} = z, \text{ odnosno}$$

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Dakle,

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Slično je i

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + i\sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

- $\operatorname{Arcsin} z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin \omega = z$, tj.

$$\frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i} = z, \text{ odnosno}$$

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Dakle,

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Slično je i

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + i\sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

- $\operatorname{Arcsin} z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin \omega = z$, tj.

$$\frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i} = z, \text{ odnosno}$$

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Dakle,

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Slično je i

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + i\sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.$$

Elementarne funkcije

4. Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

- $\operatorname{Arcsin} z$ je onaj kompleksni broj ω za koji je $\sin \omega = z$, tj.

$$\frac{e^{\omega i} - e^{-\omega i}}{2i} = z, \text{ odnosno}$$

$$(e^{\omega i})^2 - 2ize^{\omega i} - 1 = 0.$$

Odatle je $e^{\omega i} = iz + \sqrt{1 - z^2}$. Dakle,

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Slično je i

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + i\sqrt{1 - z^2}), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.$$

Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

Primer

Odrediti $\operatorname{Arcsin} i$ i $\operatorname{Arctg} 1$.

$$\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln}(-1 \pm \sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Arcsin} i = -i(\ln|-1 + \sqrt{2}| + 2k\pi i) = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} i = -i(\ln|-1 - \sqrt{2}| + 2k\pi i) = (2k + 1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

Primer

Odrediti $\operatorname{Arcsin} i$ i $\operatorname{Arctg} 1$.

$$\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln}(-1 \pm \sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Arcsin} i = -i(\ln|-1 + \sqrt{2}| + 2k\pi i) = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} i = -i(\ln|-1 - \sqrt{2}| + 2k\pi i) = (2k + 1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inverzne trigonometrijske funkcije $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$ i $\operatorname{Arctg} z$.

Primer

Odrediti $\operatorname{Arcsin} i$ i $\operatorname{Arctg} 1$.

$$\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln}(-1 \pm \sqrt{2}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Arcsin} i = -i(\ln|-1 + \sqrt{2}| + 2k\pi i) = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arcsin} i = -i(\ln|-1 - \sqrt{2}| + 2k\pi i) = (2k + 1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1),$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} i = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Višeznačne funkcije

- **List** je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- **Grana** predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- **Zasek** predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- **Rimanova površ** funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je **tačka grananja** funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. **Red** tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti **algebarski** (konačan) ili **transcedentan** (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- **List** je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- **Grana** predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- **Zasek** predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- **Rimanova površ** funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je **tačka grananja** funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. **Red** tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti **algebarski** (konačan) ili **transcedentan** (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- **List** je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- **Grana** predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- **Zasek** predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- **Rimanova površ** funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je **tačka grananja** funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. **Red** tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti **algebarski** (konačan) ili **transcedentan** (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- **List** je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- **Grana** predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- **Zasek** predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- **Rimanova površ** funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je **tačka grananja** funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. **Red** tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti **algebarski** (konačan) ili **transcedentan** (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- **List** je standardan naziv za predstavljanje svih tačaka kompleksne ravni na kojima je funkcija jednoznačna, što se postiže definisanjem granica za argument tačaka.
- **Grana** predstavlja restrikciju funkcije na njen list.
- **Zasek** predstavlja barijeru preko koje nije moguće preći pri posmatranju tačno jedne grane višeznačne funkcije.
- **Rimanova površ** funkcije predstavlja skup svih njenih listova.
- Neka je funkcija definisana u nekoj okolini tačke $z = a$. Tačka a je **tačka grananja** funkcije, ako obilaskom promenljive z po krivoj u datoj okolini tačke a dolazi do promene grane funkcije. **Red** tačke grananja predstavlja broj međusobnih promena grana obilaskom oko nje po krivoj u istom smeru i on može biti **algebarski** (konačan) ili **transcedentan** (beskonačan).

Višeznačne funkcije

- Primer n -značne funkcije je $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gde je n prirodan broj, koja ima n grana, a to su funkcije $f_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{n}i}$, $k = 0, \dots, n-1$.
- Listovi Rimanove površi definisani su sa $L_k = \{z = re^{i\varphi} \mid \varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)\}$, za $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- Za $k = 0$ dobija se glavna grana funkcije $f_0(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\arg z}{n}i}$, definisana na listu L_0 , sa skupom slika $G_0 = \{\omega \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg \omega < \frac{2\pi}{n}\}$.
- Obilaskom oko tačaka $z = 0$ i $z = \infty$ argument nezavisno promenljive menja se tako da dolazi do promene grane funkcije. Tačke 0 i ∞ su **algebarske tačke grananja** n -tog reda.