

POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE

Polinomi

Polinomi su funkcije koje, zbog svog jednostavnog oblika, spadaju među funkcije koje se najčešće koriste. Polinomi se dobijaju sabiranjem stepenih funkcija.

Funkcija $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oblika

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C},$$

se zove **polinom** (**polinomna funkcija**) nad skupom \mathbb{C} po promenljivoj x .

Ako je $a_n \neq 0$ broj n se naziva **stepen polinoma** P , u oznaci $st(P) = n$ (ili $deg(P) = n$.) Konstanta se definiše kao polinom **nultog stepena**. Specijalno, polinomi prvog, drugog i trećeg stepena se redom nazivaju *linernim*, *kvadratnim* i *kubnim* polinomima.

Primer: Odrediti stepene polinoma: $P(x) = -3x + 5$, $Q(x) = 6x^2 - 2x - 1$, $R(x) = -2x^3 + 4x - 7$, $S(x) = x^2(1 + x) - (x^2 + 1)^2$.

Primer: Date su funkcije $f(x) = 4x^6 + 15x^{-2} + 1$, $g(x) = 5x^{1/2} - x + x^2$, $h(x) = 0 \cdot x^3 + 2x^2 - \sqrt{3}$, $r(x) = \frac{2}{x} + x^3 - 2$, $t(x) = \sqrt{x^2}$. Koje od ovih funkcija su polinomi?

Sabirci $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ su **članovi** polinoma, a brojevi a_n, \dots, a_0 **koeficijenti** polinoma. Sabirak $a_n x^n$ se zove **vodeći** (najstariji), a a_0 **slobodan član** polinoma P .

Ako je koeficijent u vodećem članu polinoma P jednak jedinici ($a_n = 1$), polinom P je **normiran** (normalizovan, moničan).

Primer: $P(x) = x^7 - 2x^4 + \sqrt{2}x^3 - 13$.

Polinom P čiji su svi koeficijenti realni brojevi ($a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$) naziva se **polinom sa realnim koeficijentima** ili **realan polinom**.

Polinom je **identički jednak nuli** ako je jednak nuli za svako x . Pišemo $P(x) \equiv 0$. Može se pokazati da je polinom identički jednak nuli ako i samo ako su mu svi koeficijenti jednaki nuli. Polinom P čiji su svi koeficijenti jednaki nuli naziva se **nula polinom**. Stepen nula polinoma se ne definiše.

Polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ su **(identički) jednaki** ako važi

$$P(x) = Q(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Može se pokazati:

Polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ su jednaki ako i samo ako su **istog stepena** i ako su im **odgovarajući koeficijenti**, tj. koeficijenti uz iste stepene promenljive, **jednaki**.

Primer: Odrediti koeficijente a, b, c i d tako da važi

$$a(x-1)(x-2) + bx + c = dx^3 + x - 2, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Primer: Odrediti koeficijente a, b, c, d i e tako da $\forall x \in \mathbb{C}$ važi

$$ax(x+1)(x-2)(x+3) + bx(x+1)(x-2) + cx(x+1) + dx + e = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 2.$$

$$(a = 1, b = -1, c = 2, d = 3, e = 2)$$

Operacije sa polinomima

Nad polinomima se mogu obavljati osnovne računске operacije i rezultat sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja polinoma će takođe biti polinom.

- **Polinomi se sabiraju** tako što se sabere članovi istog stepena. Pri tome je $st(P_n(x) + Q_m(x)) \leq \max\{n, m\}$.

Primer: Ako su dati polinomi $P(x) = -x^4 + 3x^2 - 15x + 2$ i $Q(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3$, onda je njihov zbir

$$P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 1.$$

- **Polinom se množi skalarom** $\lambda \in \mathbb{R}$ tako što se svaki član pomnoži sa λ .

Primer: Ako je $P(x) = -x^4 + 3x^2 - 15x + 2$, onda je polinom $2 \cdot P(x)$ dat sa

$$2P(x) = -2x^4 + 6x^2 - 30x + 4.$$

- **Polinomi se množe** tako što se svaki član polinoma $P_n(x)$ pomnoži sa svakim članom $Q_m(x)$. Pri tome je $st(P_n(x) \cdot Q_m(x)) = m + n$.

Primer: Proizvod polinoma $P(x) = x + 1$ i $Q(x) = -x^2 + x - 3$ je polinom

$$P(x) \cdot Q(x) = -x^3 - 2x - 3.$$

- **Deljenje polinoma**

Za svaka dva nenula polinoma P i Q , postoje jedinstveni polinomi S i R takvi da je

$$P = Q \cdot S + R, \text{ tj.}$$

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$$

i važi da je R nula polinom ili $st(R) < st(Q)$.

Kaže se da je S **količnik** a R **ostatak** pri deljenju polinoma P polinomom Q .

Ako je $R \equiv 0$, kažemo da je polinom P **deljiv polinomom** Q ili da polinom Q **deli polinom** P i tada je

$$P = Q \cdot S.$$

Polinom Q je **delilac** ili **faktor** polinoma P .

Primer: Podeliti polinom $P(x) = x^4 + 3x^3 + x - 1$ polinomom $Q(x) = x^2 - 1$.

$$(S(x) = x^2 + 3x + 1, R(x) = 4x)$$

Kada polinom $P(x)$ stepena n podelimo sa binomom $Q(x) = x - x_0$, dobićemo količnik

$$S(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0$$

i ostatak R koji je jednak konstanti. Tada je

$$P(x) = (x - x_0)S(x) + R, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Za $x = x_0$ važi

$$P(x_0) = (x_0 - x_0)S(x_0) + R, \quad \text{tj.} \quad P(x_0) = R.$$

Tako je dokazana

Bezuova teorema

Ostatak pri deljenju polinoma P polinomom $x - x_0$ jednak je vrednosti polinoma P u tački x_0 ($R = P(x_0)$).

Posledica:

Polinom P je deljiv polinomom $x - x_0$ ako i samo ako je $P(x_0) = 0$.

Primer: Odrediti a i b tako da polinom $P(x) = x^5 - 3x^4 + ax + b$ bude deljiv sa $x - 1$ i $x - 2$.

Hornerova šema

Vrednosti za ostatak R i koeficijente polinoma količnika $S(x)$ pri deljenju polinoma $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ sa $x - x_0$, najbrže se određuju pomoću Hornerove šeme.

Polazeći od

$$P(x) = (x - x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_0) + R$$

i izjednačavajući koeficijente, dobija se

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1}, \dots, b_0 = x_0 b_1 + a_1.$$

To se zapisuje u obliku tablice

x_0	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
	a_n	$x_0 b_{n-1} + a_{n-1}$	\dots	$x_0 b_1 + a_1$	$x_0 b_0 + a_0$
	\parallel	\parallel	\dots	\parallel	\parallel
	b_{n-1}	b_{n-2}	\dots	b_0	R

koja se naziva Hornerova šema.

Primer: Podeliti polinome

a) $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 6x - 4$ sa $Q(x) = x - 2$, a zatim sa $Q(x) = x + 1$.

b) $P(x) = x^4 + 5x^2 - 2$ sa $Q(x) = x - 1$.

Nule i faktorizacija polinoma

Koren (nula) polinoma P je kompleksan (realan) broj x_0 za koji važi

$$P(x_0) = 0.$$

Ako je x_0 nula polinoma $P(x)$, onda je on deljiv sa $x - x_0$ i moguće ga je prikazati u obliku:

$$P(x) = (x - x_0)S(x).$$

Primer: Naći sve nule polinoma $P(x) = x - 3$, $Q(x) = x^2 + x - 6$ i $R(x) = x^2 + 1$.

Ako je polinom P deljiv sa $(x - x_0)^m$, a nije deljiv sa $(x - x_0)^{m+1}$, kažemo da je x_0 **koren višestrukosti m (nula reda m)** polinoma P .

Primer: Naći sve nule polinoma $P(x) = x^2 + 2x + 1$.

Osnovni stav algebre:

Svaki polinom stepena n ($n \geq 1$) nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jedan, a najviše n različitih korena.

Osnovni stav algebre:

Svaki polinom stepena n ($n \geq 1$) nad poljem kompleksnih brojeva ima n (ne obavezno različitih) korena.

Svaki polinom stepena n se na jedinstven način može faktorirati u obliku

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_s)^{k_s},$$

gde su x_1, x_2, \dots, x_s po parovima različiti koreni polinoma, a k_1, k_2, \dots, k_s redom njihove višestrukosti ($k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ je stepen polinoma P).

Primer: Faktorirati polinome $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$ i $Q(x) = x^2 - 2x + 2$ nad poljem kompleksnih brojeva.

Neka je P polinom nad poljem kompleksnih brojeva sa **realnim koeficijentima**. Tada:

- Ako je kompleksan broj z koren polinoma P , onda je i \bar{z} takođe koren polinoma P .
- Realni polinom neparnog stepena ima bar jednu realnu nulu.

Polinom P se na jedinstven način može faktorirati u obliku proizvoda svog vodećeg koeficijenta i realnih polinoma oblika

$$(x - x_0) \quad \text{i} \quad (x^2 + px + q) \quad \text{gde je} \quad p^2 - 4q < 0.$$

Racionalne nule polinoma sa celobrojnim koeficijentima:

Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n a_0 \neq 0$, polinom sa celobrojnim koeficijentima. Ako je $\frac{p}{q}$ racionalan koren polinoma P tada važi

$$p \mid a_0 \quad \text{i} \quad q \mid a_n.$$

Primer: Naći racionalne nule polinoma $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.

Primer: Naći racionalne nule polinoma $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

Vijetove formule:

Ako su x_1, x_2, \dots, x_n koreni polinoma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

onda važi

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

\vdots

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Primer: Odrediti realan broj p tako da jedan koren jednačine $x^3 - 7x + p = 0$ bude jednak dvostrukom drugom korenu te jednačine.

Racionalne funkcije

Neka su dati polinomi P i $Q \neq 0$ nad poljem realnih brojeva i neka je $D_R = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Funkcija $R : D_R \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se zove **racionalna funkcija**.

Primeri racionalnih funkcija:

$$R_1(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 7}{x^2 + 1}, \quad R_2(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 - 7x + 2}, \quad R_3(x) = \frac{x}{x^4 + 1}.$$

Ako je $st(P) < st(Q)$ onda je $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ **prava racionalna funkcija**, a ako je $st(P) \geq st(Q)$ onda se funkcija $R(x)$ se deljenjem svodi na zbir polinoma i prave racionalne funkcije.

Primer:

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x + 7}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{2x + 6}{x^2 + 1}$$

Često je vrlo korisno, a za integraciju racionalnih funkcija i potrebno, rastaviti neku komplikovanu racionalnu funkciju na zbir jednostavnijih razlomaka. Na primer, može se pokazati da je

$$\frac{4x + 7}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 2} + \frac{2}{x + 1}.$$

Postupak rastavljanja racionalne funkcije na parcijalne razlomke zavisi od polinoma u imeniocu. Imenilac racionalne funkcije se može napisati kao

proizvod lineranih i kvadratnih faktora (činilaca). Linearni faktori su oblika

$$ax + b \quad \text{npr.} \quad 2x + 7, 3x - 2, 4 - x, x + 16,$$

a kvadratni

$$ax^2 + bx + c \quad \text{gde je} \quad b^2 - 4ac < 0.$$

Kvadratni faktori su oni koji se ne mogu faktorisati na linearne činioce nad skupom realnih brojeva, na primer:

$$x^2 + x + 1, \quad 4x^2 - 2x + 3, \quad x^2 + 1.$$

Prvo ćemo opisati postupak za nalaženje parcijalnih razlomaka za pravu racionalnu funkciju kod koje se imenilac može zapisati kao [proizvod lineranih činilaca koji se pojavljuju samo jednom](#):

- Faktoriše se imenilac.
- Od svakog činioca će nastati jedna parcijalni razlomak. Na primer, od faktora $3x + 2$ nastaće parcijalni razlomak $\frac{A}{3x + 2}$ gde je A nepoznata konstanta. Nepoznate konstante za svaki parcijalni razlomak mogu biti različite, pa ćemo ih obeležavati redom slovima A, B, C, \dots
- Nepoznate konstante se izračunavaju izjednačavanjem koeficijenata.

Primer: Rastaviti funkciju $R(x) = \frac{7x + 10}{2x^2 + 5x + 3}$ na zbir parcijalnih razlomaka.

Od linearnog faktora $ax + b$ koji se pojavljuje samo jednom nastaje parcijalni razlomak oblika $\frac{A}{ax + b}$.

Kada se u faktorizaciji polinoma iz imenioca pojavi isti linearni faktor više puta (tj. na neki stepen), kao na primer:

$$(x + 1)^2, \quad x^2, \quad (3x - 4)^3,$$

onda linearnom faktoru koji se ponavlja $(x + 1)^2$ odgovara zbir dva parcijalna razlomka $\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2}$.

U opštem slučaju, faktoru

$$(ax + b)^2 \quad \text{odgovara zbir parcijalnih razlomaka} \quad \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2},$$

tj. linearnom faktoru $ax + b$ koji se pojavljuje k puta, $(ax + b)^k$, odgovara zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}.$$

Primer: Rastaviti funkciju $R(x) = \frac{3 - x}{x^2 - 2x + 1}$ na zbir parcijalnih razlomaka.

Kao što smo već napomenuli, pri faktorizaciji polinoma iz imenioca, može se desiti da imamo kvadratni faktor koji se ne može faktorisati na linearne faktore nad skupom realnih brojeva. Jedan takav primer je funkcija x^2+x+1 . Ovom činiocu onda odgovara parcijalni razlomak oblika $\frac{Ax+B}{x^2+x+1}$.

U opštem slučaju, faktor ax^2+bx+c , ($b^2-4ac < 0$) odgovara parcijalni razlomak $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

Primer: Rastaviti funkciju $R(x) = \frac{3x+1}{(x^2+x+10)(x-1)}$ na zbir parcijalnih razlomaka.

Ako se kvadratni faktor $ax^2 + bx + c$, ($b^2 - 4ac < 0$), pojavljuje dva puta u faktorizaciji polinoma u imeniocu, onda faktoru $(ax^2 + bx + c)^2$ odgovara zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2}.$$

Dakle, svaka (prava) racionalna funkcija može se predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(ax + b)^k (px^2 + qx + r)^n} &= \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k} + \\ &+ \frac{B_1x + C_1}{px^2 + qx + r} + \frac{B_2x + C_2}{(px^2 + qx + r)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(px^2 + qx + r)^n}. \end{aligned}$$