ZAŠTITA ŽIVOTNE SREDINE i ZAŠTITA NA RADU (IZnR / URoKDiP / ČET) 08.09.2015.

Matematika 2

1. (a) [**5 poena**] Izračunati $I = \int \left(x^2 + x + 1\right) e^{x+5} dx$.

   (b) [**10 poena**] Izračunati $I = \int \frac{x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

2. [**10 poena**] Izračunati $I = \int\limits_1^2 \left(x^2 + x\right) \ln x dx$.

3. [**10 poena**] Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko x-ose površi koja je ograničena krivama $y_1(x) = x^2$ i $y_2(x) = \sqrt{x}$.

4. [**15 poena**] Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{x^3 + y}{x}$, kao i partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(2) = 6$.

5. [**10 poena**] Dokazati da je $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.

6. [**10 poena**] Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 5y' + 6y = x$.

ZAŠTITA ŽIVOTNE SREDINE i ZAŠTITA NA RADU (IZnR / URoKDiP / ČET) 08.09.2015.

Matematika 2

1. (a) [**5 poena**] Izračunati $I = \int \left(x^2 + x + 1\right) e^{x+5} dx$.

   (b) [**10 poena**] Izračunati $I = \int \frac{x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

2. [**10 poena**] Izračunati $I = \int\limits_1^2 \left(x^2 + x\right) \ln x dx$.

3. [**10 poena**] Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko x-ose površi koja je ograničena krivama $y_1(x) = x^2$ i $y_2(x) = \sqrt{x}$.

4. [**15 poena**] Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{x^3 + y}{x}$, kao i partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(2) = 6$.

5. [**10 poena**] Dokazati da je $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.

6. [**10 poena**] Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - 5y' + 6y = x$.

REŠENJA:

1.

(a) Parcijalnom integracijom sa $u = x^2 + x + 1$, $du = (2x+1)dx$ i $dv = e^{x+5}dx$, $v = \int e^{x+5}dx = e^{x+5}$ (smenom $x + 5 = t$, $dx = dt$) dobijamo

$I = \big(x^2 + x + 1\big)e^{x+5} - \int (2x+1)e^{x+5}dx.$

Ponovo primenom parcijalne integracije sa $u = 2x + 1$, $du = 2dx$ i $dv = e^{x+5}dx$, $v = \int e^{x+5}dx = e^{x+5}$ dobijamo

$$I = \big(x^2 + x + 1\big)e^{x+5} - \left((2x+1)e^{x+5} - 2\int e^{x+5}dx\right) =$$
$$= \big(x^2 + x + 1\big)e^{x+5} - (2x+1)e^{x+5} + 2e^{x+5} + c = e^{x+5}\big(x^2 - x + 2\big) + c.$$

(b) Rešenje tražimo u obliku

$$\int \frac{x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + x + 1} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx.$$

Primenom izvoda na zadnju jednakost dobijamo

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = A\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{(Ax + B)(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + x + 1}},$$

te množenjem ove jednakosti sa $\sqrt{x^2 + x + 1}$ sledi

$$x^2 - 2x - 2 = A\big(x^2 + x + 1\big) + (Ax + B)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \lambda =$$
$$= 2Ax^2 + \left(\frac{3}{2}A + B\right)x + \left(A + \frac{1}{2}B + \lambda\right).$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma dobijamo sistem jednačina $1 = 2A \ \wedge\ -2 = \frac{3}{2}A + B \ \wedge\ -2 = A + \frac{1}{2}B + \lambda$ čija su rešenja $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{11}{4}$, $\lambda = -\frac{9}{8}$, te je $I = \frac{1}{2}\left(x - \frac{11}{2}\right)\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{9}{8}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx.$
Preostali integral u poslednjoj jednakosti rešavamo svođenjem na jedan od tabličnih integrala:

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\big(x + \frac{1}{2}\big)^2 + \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2}}dx \overset{[1]}{=} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2}}dt =$$
$$= \ln\left|t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right| + c = \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right| + c.$$

[1] smena $x + \frac{1}{2} = t$, $dx = dt$;

2.

3. Nađimo najpre presečne tačke krivih $y_1(x)$ i $y_2(x)$ (funkcija $\sqrt{x}$ je definisana samo za $x \geq 0$):

$$x^2 = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \big(x \geq 0 \ \wedge \ x^4 = x\big) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \big(x \geq 0 \ \wedge \ x(x^3-1) = 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0 \ \vee \ x = 1).$$

Kako je $\sqrt{x} \geq x^2$ za $x \in [0,1]$, traženu zapreminu ćemo dobiti tako što ćemo od zapremine V_2 tela koja nastaje rotacijom oko x-ose površi koja je ograničena krivom $y_2(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, oduzeti zapreminu V_1 tela koja nastaje rotacijom oko x-ose površi koja je ograničena krivom $y_1(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Sledi da je

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_0^1 \big(\sqrt{x}\big)^2 dx - \pi \int_0^1 \big(x^2\big)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\pi x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{5}\pi x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{3}{10}\pi.$$

4. $dy = \dfrac{x^3+y}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{x^3+y}{x} = x^2 + \dfrac{1}{x}y,$

te se radi o linearnoj diferencijalnoj jednačini $y' = \frac{1}{x}y = x^2$. Uvođenjem u jednačinu $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ dobijamo $\quad u'v + uv' - \dfrac{1}{x}uv = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad u'v + u\left(v' - \dfrac{1}{x}v\right) = x^2.$

Za v komponentu dobijamo

$$v' - \frac{1}{x}v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln|v| = \ln|x| \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm x,$$

a zatim, vraćanjem v u jednačinu nalazimo u komponentu:

$$\pm u'x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad u' = \pm x \quad \Leftrightarrow \quad u = \pm \int x dx = \pm\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right).$$

Dakle, opšte rešenje date jednačine glasi $\quad y(x) = u(x)v(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + cx.$

Uvrštavanjem početnog uslova $x = 2$, $y = 6$ u jednačinu dobijamo

$$6 = \frac{1}{2}2^3 + 2c = 2(2+c) \quad \Leftrightarrow \quad 2 + c = 3 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1,$$

te dobijamo traženo partikularno rešenje $y(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + x.$

5. Kako je $\dfrac{\partial}{\partial y}e^y = \dfrac{\partial}{\partial x}(xe^y - 2y) = e^y$, sledi da u pitanju jeste jednačina totalnog diferencijala. Stoga je

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = e^y \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = \int e^y dx = xe^y + S(y).$$

Dalje je

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = xe^y - 2y = xe^y + S'(y),$$

te dobijamo

$S'(y) = -2y$, odnosno $S(y) = \displaystyle\int -2y dy = -y^2 + c,$

te je $F(x,y) = xe^y - y^2 + c.$

Dakle, rešenje posmatrane diferencijalne jednačine glasi $xe^y - y^2 = c.$

6. Karakteristična jednačina homogenog dela $y'' - 5y' + 6y = 0$ jednačine je $k(r) = r^2 - 5r + 6 = 0$, te su karakteristični koreni $r_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$, odnosno $r_1 = 2$ i $r_2 = 3$. Sledi da su fundamentalna rešenja homogenog dela funkcije $y_1(x) = e^{2x}$ i $y_2(x) = e^{3x}$, a opšte rešenje homogenog dela tada glasi $y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.

Kako je

$y'' - 5y' + 6y = x = e^{0 \cdot x}(x\cos(0 \cdot x) + 1 \cdot \sin(0 \cdot x))$

pri čemu 0 nije karakteristični koren, partikularno rešenje y_p tražimo u obliku

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= e^{0 \cdot x}((Ax + B)\cos(0 \cdot x) + (ax + b)\sin(0 \cdot x)) = \\
&= Ax + B,
\end{aligned}
$$

gde je tada $y_p'(x) = A$ i $y_p''(x) = 0$.

Uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo

$$
\begin{aligned}
& y_p''(x) - 5y_p'(x) + 6y_p(x) = x \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad & -5A + 6(Ax + B) = x \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad & 6Ax + 6B - 5A = x \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad & \begin{array}{rcrcl} 6A & & & = & 1 \\ -5A & + & 6B & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{5}{36} \end{array},
\end{aligned}
$$

te je

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}.$$

Dakle, opšte rešenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{36}.$$