ZAŠTITA ŽIVOTNE SREDINE i ZAŠTITA NA RADU (IZnR / URoKDiP / ČET) 20.02.2016.

Matematika 2

1. (a) **[5 poena]** Izračunati $I = \int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}dx.$

   (b) **[10 poena]** Izračunati $I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx.$

2. **[10 poena]** Izračunati određeni integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\ \cos x}{1+\sin^2 x}dx.$

3. **[10 poena]** Izračunati površinu P ograničenu sa parametarski zadanom krivom $x(t) = te^t$, $y(t) = e^{-t}$, i pravama $y = 0$, $x = 0$ i $x = e$.

4. **[10 poena]** Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{x^3+y}{x}$, kao i partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(2) = 6$.

5. **[10 poena]** Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 4y = x^2y^2$.

6. **[15 poena]** Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y' - 2y = x^2 - 2x + 2$.

ZAŠTITA ŽIVOTNE SREDINE i ZAŠTITA NA RADU (IZnR / URoKDiP / ČET) 20.02.2016.

Matematika 2

1. (a) **[5 poena]** Izračunati $I = \int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}dx.$

   (b) **[10 poena]** Izračunati $I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx.$

2. **[10 poena]** Izračunati određeni integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\ \cos x}{1+\sin^2 x}dx.$

3. **[10 poena]** Izračunati površinu P ograničenu sa parametarski zadanom krivom $x(t) = te^t$, $y(t) = e^{-t}$, i pravama $y = 0$, $x = 0$ i $x = e$.

4. **[10 poena]** Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{x^3+y}{x}$, kao i partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(2) = 6$.

5. **[10 poena]** Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 4y = x^2y^2$.

6. **[15 poena]** Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y' - 2y = x^2 - 2x + 2$.

REŠENJA:

1.

2. Kako je $x = te^t = 0$ za $t = 0$, i $x = te^t = e$ za $x = 1$, sledi

$$P = \int_0^1 y\,(t) x_t'\,(t) dt = \int_0^1 e^{-t}\big(e^t + te^t\big) dt = \int_0^1 (1+t) dt = \left(t + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{3}{2}.$$

3.

4. $dy = \dfrac{x^3+y}{x}dx \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{x^3+y}{x} = x^2 + \dfrac{1}{x}y,$

te se radi o linearnoj diferencijalnoj jednačini $y' = \dfrac{1}{x}y = x^2$. Uvođenjem u jednačinu $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ dobijamo $\quad u'v + uv' - \dfrac{1}{x}uv = x^2 \;\Leftrightarrow\; u'v + u\left(v' - \dfrac{1}{x}v\right) = x^2.$

Za v komponentu dobijamo

$v' - \dfrac{1}{x}v = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{x}v \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \ln|v| = \ln|x| \;\Leftrightarrow\; v = \pm x,$

a zatim, vraćanjem v u jednačinu nalazimo u komponentu:

$\pm u'x = x^2 \;\Leftrightarrow\; u' = \pm x \;\Leftrightarrow\; u = \pm \displaystyle\int x dx = \pm\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right).$

Dakle, opšte rešenje date jednačine glasi $\quad y\,(x) = u\,(x) v\,(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + cx.$

Uvrštavanjem početnog uslova $x = 2$, $y = 6$ u jednačinu dobijamo

$6 = \dfrac{1}{2}2^3 + 2c = 2(2+c) \;\Leftrightarrow\; 2 + c = 3 \;\Leftrightarrow\; c = 1,$

te dobijamo traženo partikularno rešenje $y\,(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + x.$

5. $xy' - 4y = x^2y^2 \quad\Leftrightarrow\quad y' - 4\dfrac{1}{x}y = xy^2,$

smenom $z = y^{1-2} = y^{-1}$, pri čemu je $z' = -y^{-2}y'$, $y' = -y^2z'$ dobijamo dalje

$-y^2z' - 4\dfrac{1}{x}y = xy^2 \quad\Leftrightarrow\quad z' + 4\dfrac{1}{x}y^{-1} = -x \quad\Leftrightarrow\quad z' + 4\dfrac{1}{x}z = -x,$

te dalje smenom $z = uv$, $z' = u'v + uv'$ dobijamo

$u'v + uv' + 4\dfrac{1}{x}uv = -x \quad\Leftrightarrow\quad u'v + u(v' + 4\dfrac{1}{x}v) = -x,$

gde je

$v' + 4\dfrac{1}{x}v = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -4\int \frac{dx}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \ln v = -4\ln x \quad\Leftrightarrow\quad v = \frac{1}{x^4},$

$u'\dfrac{1}{x^4} = -x \quad\Leftrightarrow\quad \displaystyle\int du = -\int x^5 dx \quad\Leftrightarrow\quad u = -\frac{1}{6}x^6 + c,$

te je

$z = uv = \dfrac{1}{x^4}(c - \dfrac{1}{6}x^6) \quad\Rightarrow\quad z = y^{-1} = \dfrac{1}{x^4}(c - \dfrac{1}{6}x^6) \quad\Rightarrow\quad y = \dfrac{x^4}{c - \frac{1}{6}x^6}.$

6. Karakteristična jednačina homogenog dela $y'' + y' - 2y = 0$ polazne jednačine je $k\,(r) = r^2 + r - 2 = 0$, te su karakteristični koreni $r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$, odnosno $r_1 = -2$ i $r_2 = 1$. Sledi da su fundamentalna rešenja homogenog dela funkcije $y_1\,(x) = e^{-2x}$ i $y_2\,(x) = e^x$, a opšte rešenje homogenog dela tada glasi $y_h\,(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^x$.

Kako je

$$y'' + y' - 2y = x^2 - 2x + 2 = e^{0\cdot x}\big((x^2 - 2x + 2)\cos(0\cdot x) + 1\cdot\sin(0\cdot x)\big)$$

pri čemu 0 nije karakteristični koren, partikularno rešenje y_p tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{0\cdot x}\big((Ax^2 + Bx + C)\cos(0\cdot x) + (ax^2 + bx + c)\sin(0\cdot x)\big) = \\ = Ax^2 + Bx + C,$$

gde je tada $y_p'(x) = 2Ax + B$ i $y_p''(x) = 2A$.

Uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} & y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow\quad & 2A + (2Ax + B) - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow\quad & -2Ax^2 + (2A - 2B)x + 2A + B - 2C = x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} -2A & & & & & = & 1 \\ 2A & - & 2B & & & = & -2 \\ 2A & + & B & - & 2C & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{5}{4} \end{array},$$

te je

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

Dakle, opšte rešenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$