Integral kompleksne funkcije. Red Tejlora

PREDAVANJA 11

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, decembar 2023

Definicija i osobine integrala

Neka je f jednoznačno definisana i neprekidna funkcija nad putanjom L čija je početna tačka a i krajnja b. Krivu L podelimo na n delova izabranim tačkama $a = z_0, z_1, \dots, z_n = b$ u smeru od a ka b. Ako je L zatvorena putanja, pozitivan smer je suprotan od kretanja kazaljke na satu. Označimo $\triangle z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 0, 1 \dots, n$. Proizvoljno izaberimo tačke ξ_k između z_{k-1} i z_k, $k = 1, \dots, n$ i formiramo integralnu sumu $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k$. Ako postoji uvek ista (jedinstvena) granična vrednost

$$\lim_{\max\limits_{1\le k\le n} |\triangle z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k,$$

nazavisno od izbora tačaka z_k i ξ_k, tada tu graničnu vrednost nazivamo integral funkcije f duž krive L i označavamo $\int_L f(z)dz$. Ako je L zatvorena putanja, koristimo oznaku $\oint_L f(z)dz$.

Osobine integrala

Za $z = x + iy$, $dz = dx + idy$ i $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, važi

$$\boxed{\int_L f(z)dz = \int_L P(x,y)dx - Q(x,y)dy + i\int_L Q(x,y)dx + P(x,y)dy.}$$

Osobine integrala:

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, važi

$$\int_L \Big(\alpha f(z) + \beta g(z)\Big)dz = \alpha\int_L f(z)dz + \beta\int_L g(z)dz.$$

2) Ako je $-L$ putanja određena istim skupom tačaka kao i L, a suprotno orijentisana u odnosu na L, tada važi

$$\int_L f(z)dz = -\int_{-L} f(z)dz.$$

Osobine integrala

Za $z = x + iy$, $dz = dx + idy$ i $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, važi

$$\boxed{\int_L f(z)dz = \int_L P(x,y)dx - Q(x,y)dy + i\int_L Q(x,y)dx + P(x,y)dy.}$$

Osobine integrala:

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, važi

$$\int_L \Big(\alpha f(z) + \beta g(z)\Big)dz = \alpha\int_L f(z)dz + \beta\int_L g(z)dz.$$

2) Ako je $-L$ putanja određena istim skupom tačaka kao i L, a suprotno orijentisana u odnosu na L, tada važi

$$\int_L f(z)dz = -\int_{-L} f(z)dz.$$

Osobine integrala

Za $z = x + iy$, $dz = dx + idy$ i $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, važi

$$\boxed{\int_L f(z)dz = \int_L P(x, y)dx - Q(x, y)dy + i\int_L Q(x, y)dx + P(x, y)dy.}$$

Osobine integrala:

1) Za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, važi

$$\int_L \Big(\alpha f(z) + \beta g(z)\Big) dz = \alpha \int_L f(z)dz + \beta \int_L g(z)dz.$$

2) Ako je $-L$ putanja određena istim skupom tačaka kao i L, a suprotno orijentisana u odnosu na L, tada važi

$$\int_L f(z)dz = -\int_{-L} f(z)dz.$$

Osobine integrala

3) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i putanje L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz.$$

4) Ako je $|f(z)| \leq M$, za sve $z \in L$, i $\triangle L$ dužina krive L, tada važi

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leq M \triangle L.$$

5) Ako je $L : \ x = x(t),\, y = y(t),\, t \in [a, b]$, tada važi

$$\boxed{\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t)\,dt,}$$

gde je $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Osobine integrala

3) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i putanje L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz.$$

4) Ako je $|f(z)| \leq M$, za sve $z \in L$, i $\triangle L$ dužina krive L, tada važi

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leq M \triangle L.$$

5) Ako je $L:\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]$, tada važi

$$\boxed{\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t)\,dt,}$$

gde je $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Osobine integrala

3) Ako je $L = L_1 \cup L_2$, i putanje L_1 i L_2 imaju najviše jednu zajedničku tačku, tada važi

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz.$$

4) Ako je $|f(z)| \leq M$, za sve $z \in L$, i $\triangle L$ dužina krive L, tada važi

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leq M \triangle L.$$

5) Ako je $L:\ x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]$, tada važi

$$\boxed{\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t)\,dt,}$$

gde je $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Primer

Izračunti $I=\int_L \overline{z}dz$ *od tačke* $z=0$ *do tačke* $z=4+2i$

a) duž putanje $L:\ z(t)=t^2+it,\ t\in\overrightarrow{[0,2]}$,

b) duž putanje $L=L_1+L_2$, *gde je* L_1 *duž od* $z=0$ *do* $z=2i$, *a* L_2 *je duž od* $z=2i$ *do* $z=4+2i$.

Rešenje:

a) $I=\int_L \overline{z}dz=\int_0^2(t^2-it)(2t+i)dt=\left(2\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2-i\frac{t^3}{3}\Big|_0^2=10-\frac{8}{3}i.$

b) $L_1:\ z(t)=ti,\ t\in\overrightarrow{[0,2]},\ L_2:\ z(t)=t+2i,\ t\in\overrightarrow{[0,4]},$
$I=\int_{L_1}\overline{z}dz+\int_{L_2}\overline{z}dz=\int_0^2(-it)idt+\int_0^4(t-2i)dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^2+\left(\frac{t^2}{2}-2it\right)\Big|_0^4=10-8i.$

Primer

Izračunti $I = \int_L \overline{z}dz$ *od tačke* $z = 0$ *do tačke* $z = 4 + 2i$
a) duž putanje $L: \; z(t) = t^2 + it, \; t \in \overrightarrow{[0, 2]}$,
b) duž putanje $L = L_1 + L_2$, *gde je* L_1 *duž od* $z = 0$ *do* $z = 2i$, *a* L_2 *je duž od* $z = 2i$ *do* $z = 4 + 2i$.

Rešenje:

a) $I = \int_L \overline{z}dz = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i)dt = \left(2\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2 - i\frac{t^3}{3}\Big|_0^2 = 10 - \frac{8}{3}i.$

b) $L_1 : \; z(t) = ti, \; t \in \overrightarrow{[0, 2]}, \; L_2 : \; z(t) = t + 2i, \; t \in \overrightarrow{[0, 4]}$,
$I = \int_{L_1} \overline{z}dz + \int_{L_2} \overline{z}dz = \int_0^2 (-it)idt + \int_0^4 (t - 2i)dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 + \left(\frac{t^2}{2} - 2it\right)\Big|_0^4 = 10 - 8i.$

Košijeva teorema i njene posledice

Teorema

(Košijeva teorema) Neka je f analitička funkcija definisana na jednostruko povezanoj oblasti G, a L zatvorena putanja koja sa svojom unutrašnjošću $\mathrm{int}\, L = D$ pripada G. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

Dokaz: Kako je funkcija f analitička funkcija, $f'(z)$ je neprekidna funkcija na L, te su P_x, P_y, Q_x i Q_y neprekidni na L i važe Koši-Rimanovi uslovi.

$\oint_L f(z)dz = \oint_L Pdx - Qdy + i \oint_L Qdx + Pdy =$
$\iint_D(-Q_x - P_y)dxdy + i \iint_D(P_x - Q_y)dxdy = 0 + i0 = 0.$ $\square$

Košijeva teorema i njene posledice

Teorema

(Košijeva teorema) Neka je f analitička funkcija definisana na jednostruko povezanoj oblasti G, a L zatvorena putanja koja sa svojom unutrašnjošću $\mathrm{int} L = D$ *pripada G. Tada je*

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

<u>Dokaz:</u> Kako je funkcija f analitička funkcija, $f'(z)$ je neprekidna funkcija na L, te su P_x, P_y, Q_x i Q_y neprekidni na L i važe Koši-Rimanovi uslovi.

$\oint_L f(z)dz = \oint_L Pdx - Qdy + i \oint_L Qdx + Pdy =$
$\iint_D (-Q_x - P_y)dxdy + i \iint_D (P_x - Q_y)dxdy = 0 + i0 = 0.$ $\square$

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je primitivna funkcija funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f, tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na D. Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D.
- Osnovna formula integralnog računa $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je primitivna funkcija funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.

Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f, tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na D. Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D.
- Osnovna formula integralnog računa $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je primitivna funkcija funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.
Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f, tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na D. Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D.
- Osnovna formula integralnog računa $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je primitivna funkcija funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.
Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f, tj. $\{F + C \,|\, C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na D. Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D.
- Osnovna formula integralnog računa $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je primitivna funkcija funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.
Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f, tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na D. Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D.
- Osnovna formula integralnog računa $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

Košijeva teorema i njene posledice

Analitička funkcija $F : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ je primitivna funkcija funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ ako za sve $z \in D$ važi $F'(z) = f(z)$.
Neodređeni integral funkcije f je skup svih primitivnih funkcija funkcije f, tj. $\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$.

Posledice Košijeve teoreme

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ jednostruko povezana oblast i $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija na D. Tada važi

- $\int_{L_1(a,b)} f(z)dz = \int_{L_2(a,b)} f(z)dz$, gde su L_1 i L_2 putanje koje leže u D i povezuju a i b (pišemo $\int_a^b f(z)dz$).
- $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\omega)d\omega$, za sve $z_0 \in D$ je primitivna funkcija funkcije f na D.
- Osnovna formula integralnog računa $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

- Neka su L i L_1 zatvorene putanje takve da L_1 leži u unutrašnjosti L, tj. $L_1 \subset \operatorname{int} L$, i neka je f analitička na L, L_1 i na $\operatorname{int} L \setminus \operatorname{int} L_1$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$$

<u>Dokaz:</u> Neka je $T = L + AB + (-L_1) + BA$ pozitivno orijentisana zatvorena putanja. Na osnovu Košijeve teoreme važi $\oint_T f(z)dz = 0$, tj.
$\oint_L f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{-L_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0.$
Dakle, $\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$

- Neka su $L_1, \ldots L_n$ zatvorene putanje koje leže u unutrašnjosti L, tj. $L_k \subset \operatorname{int} L$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, i za sve $k, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \neq m$, $\operatorname{int} L_m \cap \operatorname{int} L_k = \varnothing$, i neka je f analitička na L, L_1, $\ldots$, L_n i na $\operatorname{int} L \setminus \cup_{k=1}^{n} \operatorname{int} L_k$. Tada je

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{L_n} f(z)dz.$$

- Neka su L i L_1 zatvorene putanje takve da L_1 leži u unutrašnjosti L, tj. $L_1 \subset \operatorname{int} L$, i neka je f analitička na L, L_1 i na $\operatorname{int} L \setminus \operatorname{int} L_1$. Tada je
$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$$
<u>Dokaz:</u> Neka je $T = L + AB + (-L_1) + BA$ pozitivno orijentisana zatvorena putanja. Na osnovu Košijeve teoreme važi $\oint_T f(z)dz = 0$, tj.
$\oint_L f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{-L_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0.$
Dakle, $\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$
- Neka su $L_1, \dots L_n$ zatvorene putanje koje leže u unutrašnjosti L, tj. $L_k \subset \operatorname{int} L$, $k \in \{1, \dots, n\}$, i za sve $k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq m$, $\operatorname{int} L_m \cap \operatorname{int} L_k = \emptyset$, i neka je f analitička na L, L_1, $\dots$, L_n i na $\operatorname{int} L \setminus \cup_{k=1}^{n} \operatorname{int} L_k$. Tada je
$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \dots + \oint_{L_n} f(z)dz.$$

- Neka su L i L_1 zatvorene putanje takve da L_1 leži u unutrašnjosti L, tj. $L_1 \subset \mathrm{int}\, L$, i neka je f analitička na L, L_1 i na $\mathrm{int}\, L \setminus \mathrm{int}\, L_1$. Tada je
$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$$
<u>Dokaz:</u> Neka je $T = L + AB + (-L_1) + BA$ pozitivno orijentisana zatvorena putanja. Na osnovu Košijeve teoreme važi $\oint_T f(z)dz = 0$, tj.
$\oint_L f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{-L_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0.$
Dakle, $\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz.$
- Neka su $L_1, \dots L_n$ zatvorene putanje koje leže u unutrašnjosti L, tj. $L_k \subset \mathrm{int}\, L$, $k \in \{1, \dots, n\}$, i za sve $k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq m$, $\mathrm{int}\, L_m \cap \mathrm{int}\, L_k = \varnothing$, i neka je f analitička na L, L_1, $\dots$, L_n i na $\mathrm{int}\, L \setminus \cup_{k=1}^{n} \mathrm{int}\, L_k$. Tada je
$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{L_n} f(z)dz.$$

Primer

Izračunati $I = \oint_L \frac{dz}{z-\alpha}$, *ako je*
a) $\alpha \in \mathrm{ext}\, L$, *b)* $\alpha \in \mathrm{int}\, L$.
Rešenje:
a) Funkcija $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ *je analitička na* L *i* $\mathrm{int}\, L$, *te je* $I = 0$.
b) $I = \oint_\gamma \frac{dz}{z-\alpha}$, *gde je* $\gamma \subset \mathrm{int}\, L$, $\gamma: \ z-\alpha = \epsilon e^{ti}$, $t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$, $\epsilon > 0$.
Dakle, $I = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{ti}}{\epsilon e^{ti}} dt = ti\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(a,b)} (3z^2 - 2iz)dz$, *ako je* $a = 1+i$ *i* $b = 2+3i$.
Rešenje:
Kako je $F(z) = \int_0^z (3\omega^2 - 2i\omega)d\omega = z^3 - iz^2$, *traženi integral je*
$I = \int_{1+i}^{2+3i} (3z^2 - 2iz)dz = F(2+3i) - F(1+i)$
$= (2+3i)^3 - i(2+3i)^2 - (1+i)^3 + i(1+i)^2 = 34 + 12i$.

Primer

Izračunati $I = \oint_L \frac{dz}{z-\alpha}$, *ako je*
a) $\alpha \in \mathrm{ext}\, L$, *b)* $\alpha \in \mathrm{int}\, L$.
Rešenje:
a) Funkcija $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ *je analitička na* L *i* $\mathrm{int}\, L$, *te je* $I = 0$.
b) $I = \oint_\gamma \frac{dz}{z-\alpha}$, *gde je* $\gamma \subset \mathrm{int}\, L$, $\gamma :\ z - \alpha = \epsilon e^{ti}$, $t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$, $\epsilon > 0$.
Dakle, $I = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{ti}}{\epsilon e^{ti}} dt = ti \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$.

Primer

Izračunati $I = \int_{L(a,b)} (3z^2 - 2iz) dz$, *ako je* $a = 1 + i$ *i* $b = 2 + 3i$.
Rešenje:
Kako je $F(z) = \int_0^z (3\omega^2 - 2i\omega) d\omega = z^3 - iz^2$, *traženi integral je*
$I = \int_{1+i}^{2+3i} (3z^2 - 2iz) dz = F(2+3i) - F(1+i)$
$= (2+3i)^3 - i(2+3i)^2 - (1+i)^3 + i(1+i)^2 = 34 + 12i$.

Košijeve integralne formule

Teorema

(Košijeve integralne formule) Neka je f analitička funkcija na jednostruko povezanoj oblasti G i neka je L zatvorena, pozitivno orijentisana putanja koja zajedno sa svojom unutrašnošću $\operatorname{int} L = D$ *pripada oblasti G. Tada, za sve $a \in D$ i $n \in \mathbb{N}$, važi*

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz, \\ f^{(n)}(a) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

Dokaz: Funkcija $f(z) = \frac{1}{z-a}$ je analitička na $D \setminus \{a\}$.
Neka je $\gamma \subset \operatorname{int} L$ pozitivno orijentisana putanja, $\gamma : z - a = \epsilon e^{ti}$, $t \in \overrightarrow{[0, 2\pi]}$, $\epsilon > 0$. Kako je $dz = \epsilon i e^{it} dt$, dobijamo

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(\epsilon e^{ti} + a)}{\epsilon e^{ti}} \epsilon i e^{ti} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(\epsilon e^{ti} + a) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} i \int_0^{2\pi} f(\epsilon e^{ti} + a) dt &= i \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} f(\epsilon e^{ti} + a) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a) dt = f(a) 2\pi i. \end{aligned}$$

Dakle, $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z-a} dz$. Slično se pokazuje i druga formula $\square$
Ako f ima prvi izvod na D, ona ima i sve izvode višeg reda na D.

Primer

Ako je $L: |z| = 2$, *naći a)* $\oint_L \frac{2\sin z}{(z-1)(z+1)}dz$, *b)* $\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$.

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{2\sin z}{(z-1)(z+1)}dz &= \oint_L \frac{\sin z}{z-1}dz - \oint_L \frac{\sin z}{z+1}dz \\ &= 2\pi i \sin 1 - 2\pi i \sin(-1) = 4\pi i \sin 1.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz &= \frac{2\pi i}{3!}(e^{2z})'''\Big|_{z=-1} \\ &= \frac{8}{3}\pi i e^{-2}.\end{aligned}$$

Primer

Ako je $L : |z| = 2$, *naći a)* $\oint_L \frac{2\sin z}{(z-1)(z+1)} dz$, *b)* $\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$.

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{2\sin z}{(z-1)(z+1)} dz &= \oint_L \frac{\sin z}{z-1} dz - \oint_L \frac{\sin z}{z+1} dz \\ &= 2\pi i \sin 1 - 2\pi i \sin(-1) = 4\pi i \sin 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} (e^{2z})''' \Big|_{z=-1} \\ &= \frac{8}{3} \pi i e^{-2}. \end{aligned}$$

Primer

Ako je $L: |z| = 2$, *naći a)* $\oint_L \frac{2\sin z}{(z-1)(z+1)}dz$, *b)* $\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$.

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{2\sin z}{(z-1)(z+1)}dz &= \oint_L \frac{\sin z}{z-1}dz - \oint_L \frac{\sin z}{z+1}dz \\ &= 2\pi i \sin 1 - 2\pi i \sin(-1) = 4\pi i \sin 1.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz &= \frac{2\pi i}{3!}(e^{2z})'''\Big|_{z=-1} \\ &= \frac{8}{3}\pi i e^{-2}.\end{aligned}$$

Red Tejlora

Teorema

(Tejlorova teorema) Neka je f *analitička funkcija na kružnici* $K : |z-\alpha| = r$ *i u unutrašnjosti kružnice* $\operatorname{int} K$. *Tada, za svako* $z \in \operatorname{int} K$, *važi*

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n,}$$

gde je

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}, \;\; n = 0, 1 \ldots.}$$

Dokaz: Za svako $z \in \operatorname{int} K$, važi $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$.
Kako je $\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega - \alpha - (z - \alpha)} = \frac{1}{\omega - \alpha} \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\omega-\alpha}}$, a iz uslova $z \in \operatorname{int} K$ i $\omega \in K$, sledi $|z - \alpha| < |\omega - \alpha|$, dobijamo $\frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\omega-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha}{\omega-\alpha}\right)^n$.

Za fiksirano $z \in \operatorname{int} K$, red $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha}{\omega-\alpha}\right)^n$ konvergira uniformno na K (jer brojni red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, za $q = \frac{|z-\alpha|}{r} < 1$, konvergira), te je

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \left(\frac{f(\omega)}{\omega - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\omega-\alpha)^n} \right) d\omega \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega-\alpha)^{n+1}} \right) (z-\alpha)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z-\alpha)^n. \ \square
\end{aligned}
$$

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, za $|z-\alpha| < r$, tada je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ Tejlorov razvoj ili Tejlorov red funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α. Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α, poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α. Broj r je poluprečnik konvergencije.
- Na kružnici $|z-\alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z-\alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularite funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se Maklorenov razvoj funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, za $|z-\alpha| < r$, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ Tejlorov razvoj ili Tejlorov red funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α. Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α, poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α. Broj r je poluprečnik konvergencije.
- Na kružnici $|z-\alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z-\alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularite funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se Maklorenov razvoj funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, za $|z-\alpha| < r$, tada je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ Tejlorov razvoj ili Tejlorov red funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α. Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α, poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α. Broj r je poluprečnik konvergencije.
- Na kružnici $|z-\alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z-\alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularite funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se Maklorenov razvoj funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, za $|z-\alpha| < r$, tada je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ Tejlorov razvoj ili Tejlorov red funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α. Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α, poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α. Broj r je poluprečnik konvergencije.
- Na kružnici $|z-\alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z-\alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularite funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se Maklorenov razvoj funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$, za $|z-\alpha|<r$, tada je $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ Tejlorov razvoj ili Tejlorov red funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α. Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α, poluprečnika $r=|\beta-\alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α. Broj r je poluprečnik konvergencije.
- Na kružnici $|z-\alpha|=r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z-\alpha|>r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularite funkcije f u ∞ tada je $r=+\infty$ i red konvergira za sve $z\in\mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha=0$, dobija se Maklorenov razvoj funkcije f (isti kao u realnoj analizi).

Posledice Tejlorove teoreme

- Ako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, za $|z-\alpha| < r$, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ Tejlorov razvoj ili Tejlorov red funkcije $f(z)$ u tački (okolini tačke) α. Ovaj razvoj je jedinstven.
- Funkcija f analitička u tački α može se razviti u Tejlorov red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$, koji je konvergentan u krugu sa centrom u α, poluprečnika $r = |\beta - \alpha|$, gde je β singularitet funkcije f najbliži tački α. Broj r je poluprečnik konvergencije.
- Na kružnici $|z-\alpha| = r$ red ne mora da konvergira.
- Za one z za koje važi $|z-\alpha| > r$, red divergira.
- Ako je najbliži singularite funkcije f u ∞ tada je $r = +\infty$ i red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$.
- Ako je $\alpha = 0$, dobija se Maklorenov razvoj funkcije f (isti kao u realnoj analizi).