Red Lorana. Klasifikacija izolovanih singulariteta

PREDAVANJA 12

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, decembar 2023

Red Lorana

Teorema

(Loranova teorema) Neka su K_1 i K_2 koncentrične kružnice sa centrom u $\alpha \in \mathbb{C}$ i neka je f analitička funkcija na kružnicama K_1 i K_2 i prstenu $\mathcal{P}$ između K_1 i K_2. Tada, za svako $z \in \mathcal{P}$, važi

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n,}$$

gde je

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\omega)}{(\omega-\alpha)^{n+1}} d\omega, \;\; n \in \mathbb{Z},}$$

a L je proizvoljna zatvorena, pozitivno orijentisana putanja u $\mathcal{P}$ koja obuhvata manji krug.

Dokaz: Neka je $z \in \mathcal{P}$ fiksirana tačka, i r_1 poluprečnik K_1, a r_2 poluprečnik K_2, $r_2 < r_1$. Tada važi $r_2 < |z-\alpha| < r_1$. Neka je γ kružnica sa centromu z koja pripada prstenu $\mathcal{P}$. Na osnovu posledice Košijeve teoreme i Košijeve integralne formule važi $\oint_{K_1} \frac{f(\omega)}{\omega-z} d\omega = \oint_{K_2} \frac{f(\omega)}{\omega-z} d\omega + \oint_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega-z} d\omega$ i $\oint_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega-z} d\omega = 2\pi i f(z)$, a odatle je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = S_1 + S_2.$$

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\omega)}{(\omega-\alpha)^{n+1}} d\omega \right) (z-\alpha)^n.$$

Kako f nema singularitete u prstenu $\mathcal{P}$, integral se neće promeniti ako se umesto K_1 uzme bilo koja putanja $L \subset \mathcal{P}$ koja obuhvata K_2.

Kako je $\frac{1}{\omega-z} = \frac{1}{\omega-\alpha-(z-\alpha)} = -\frac{1}{z-\alpha} \frac{1}{1-\frac{\omega-\alpha}{z-\alpha}} = -\frac{1}{z-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\omega-\alpha}{z-\alpha}\right)^m$,

a iz uslova $z \in \mathcal{P}$ i $\omega \in K_2$, sledi $|z-\alpha| > r_2$ i $\left|\frac{\omega-\alpha}{z-\alpha}\right| = \frac{r_2}{|z-\alpha|} < 1$, te red konvergira uniformno na K_2 (promenljiva $\omega \in K_2$, a brojni red $\sum\limits_{m=0}^{\infty} q^m$, za $q = \frac{r_2}{|z-\alpha|} < 1$, konvergira). Dakle,

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} f(\omega)(\omega - \alpha)^m d\omega \right) \frac{1}{(z-\alpha)^{m+1}}, \end{aligned}$$

i K_2 se može zameniti sa $L \subset \mathcal{P}$ koja obuhvata K_2. Zamenom $m = -(n+1)$, konačno se dobija

$$\begin{aligned} f(z) &= S_1 + S_2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\omega)}{(\omega - \alpha)^{n+1}} d\omega \right) (z-\alpha)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\alpha)^n. \ \square \end{aligned}$$

Red Lorana

- Red $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n$, $z \in \mathcal{P}$, je Loranov razvoj ili Loranov red funkcije f u prstenu $\mathcal{P}$ u tački α.

- $$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + \\ &+ a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots \\ &= \cdots + \frac{b_n}{(z-\alpha)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + \\ &+ a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots \end{aligned}$$

- $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-\alpha)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ = glavni deo + analitički deo

Red Lorana

- Red $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n$, $z \in \mathcal{P}$, je Loranov razvoj ili Loranov red funkcije f u prstenu $\mathcal{P}$ u tački α.
- $$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + \\ &+ a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots \\ &= \cdots + \frac{b_n}{(z-\alpha)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + \\ &+ a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots \end{aligned}$$
- $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-\alpha)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$=glavni deo + analitički deo

Red Lorana

- Red $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n$, $z \in \mathcal{P}$, je Loranov razvoj ili Loranov red funkcije f u prstenu $\mathcal{P}$ u tački α.
- $$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + a_0 + \\ &+ a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots \\ &= \cdots + \frac{b_n}{(z-\alpha)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + \\ &+ a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots \end{aligned}$$
- $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-\alpha)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$=glavni deo + analitički deo

- $$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\omega)}{(\omega-\alpha)^{n+1}} d\omega, \;\; n = 0, 1, 2 \ldots}$$
- $$\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L f(\omega)(\omega-\alpha)^{n-1} d\omega, \;\; n = 1, 2 \ldots}$$
- Ako je f analitička na $\mathrm{int}\, K_2$, dobija se Tejlorov red funkcije f.
- Ako je α regularna tačka funkcije f tada je Tejlorov red u okolini tačke $z = \alpha$ jednak Loranovom redu.
- Kada kažemo da je funkcija razvijena u Loranov red u okolini α podrazumevamo razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$, a pod razvojem po stepenima od $z - \alpha$ podrazumevamo razvoj u svim prstenovima $r < |z-\alpha| < R$, $(0 \leq r < R \leq +\infty)$.
- Ako je α izolovani singularitet funkcije f tada razvoj u Loranov red u okolini tačke $z = \alpha$ podrazumeva razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$.

- $\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\omega)}{(\omega - \alpha)^{n+1}} d\omega, \ \ n = 0, 1, 2 \dots}$
- $\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L f(\omega)(\omega - \alpha)^{n-1} d\omega, \ \ n = 1, 2 \dots}$
- Ako je f analitička na $\operatorname{int} K_2$, dobija se Tejlorov red funkcije f.
- Ako je α regularna tačka funkcije f tada je Tejlorov red u okolini tačke $z = \alpha$ jednak Loranovom redu.
- Kada kažemo da je funkcija razvijena u Loranov red u okolini α podrazumevamo razvoj u oblasti $0 < |z - \alpha| < r$, a pod razvojem po stepenima od $z - \alpha$ podrazumevamo razvoj u svim prstenovima $r < |z - \alpha| < R$, $(0 \leq r < R \leq +\infty)$.
- Ako je α izolovani singularitet funkcije f tada razvoj u Loranov red u okolini tačke $z = \alpha$ podrazumeva razvoj u oblasti $0 < |z - \alpha| < r$.

- $$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\omega)}{(\omega-\alpha)^{n+1}}d\omega,\ \ n = 0, 1, 2\dots}$$
- $$\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(\omega)(\omega-\alpha)^{n-1}d\omega,\ \ n = 1, 2\dots}$$
- Ako je f analitička na $\operatorname{int} K_2$, dobija se Tejlorov red funkcije f.
- Ako je α regularna tačka funkcije f tada je Tejlorov red u okolini tačke $z = \alpha$ jednak Loranovom redu.
- Kada kažemo da je funkcija razvijena u Loranov red u okolini α podrazumevamo razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$, a pod razvojem po stepenima od $z-\alpha$ podrazumevamo razvoj u svim prstenovima $r < |z-\alpha| < R$, $(0 \le r < R \le +\infty)$.
- Ako je α izolovani singularitet funkcije f tada razvoj u Loranov red u okolini tačke $z = \alpha$ podrazumeva razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$.

- $$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\omega)}{(\omega-\alpha)^{n+1}}d\omega,\ \ n = 0, 1, 2\dots}$$
- $$\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(\omega)(\omega-\alpha)^{n-1}d\omega,\ \ n = 1, 2\dots}$$
- Ako je f analitička na $\operatorname{int} K_2$, dobija se Tejlorov red funkcije f.
- Ako je α regularna tačka funkcije f tada je Tejlorov red u okolini tačke $z = \alpha$ jednak Loranovom redu.
- Kada kažemo da je funkcija razvijena u Loranov red u okolini α podrazumevamo razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$, a pod razvojem po stepenima od $z-\alpha$ podrazumevamo razvoj u svim prstenovima $r < |z-\alpha| < R$, $(0 \leq r < R \leq +\infty)$.
- Ako je α izolovani singularitet funkcije f tada razvoj u Loranov red u okolini tačke $z = \alpha$ podrazumeva razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$.

- $$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\omega)}{(\omega-\alpha)^{n+1}}d\omega,\ \ n = 0, 1, 2\ldots}$$
- $$\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(\omega)(\omega-\alpha)^{n-1}d\omega,\ \ n = 1, 2\ldots}$$
- Ako je f analitička na $\operatorname{int} K_2$, dobija se Tejlorov red funkcije f.
- Ako je α regularna tačka funkcije f tada je Tejlorov red u okolini tačke $z = \alpha$ jednak Loranovom redu.
- Kada kažemo da je funkcija razvijena u Loranov red u okolini α podrazumevamo razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$, a pod razvojem po stepenima od $z-\alpha$ podrazumevamo razvoj u svim prstenovima $r < |z-\alpha| < R$, $(0 \leq r < R \leq +\infty)$.
- Ako je α izolovani singularitet funkcije f tada razvoj u Loranov red u okolini tačke $z = \alpha$ podrazumeva razvoj u oblasti $0 < |z-\alpha| < r$.

- $$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\omega)}{(\omega - \alpha)^{n+1}} d\omega, \ \ n = 0, 1, 2 \ldots}$$
- $$\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L f(\omega)(\omega - \alpha)^{n-1} d\omega, \ \ n = 1, 2 \ldots}$$
- Ako je f analitička na $\mathrm{int}\, K_2$, dobija se Tejlorov red funkcije f.
- Ako je α regularna tačka funkcije f tada je Tejlorov red u okolini tačke $z = \alpha$ jednak Loranovom redu.
- Kada kažemo da je funkcija razvijena u Loranov red u okolini α podrazumevamo razvoj u oblasti $0 < |z - \alpha| < r$, a pod razvojem po stepenima od $z - \alpha$ podrazumevamo razvoj u svim prstenovima $r < |z - \alpha| < R$, $(0 \leq r < R \leq +\infty)$.
- Ako je α izolovani singularitet funkcije f tada razvoj u Loranov red u okolini tačke $z = \alpha$ podrazumeva razvoj u oblasti $0 < |z - \alpha| < r$.

Primer

Razviti funkciju $f(z) = \frac{4}{(z-1)(z+3)}$ *u Loranov red*
a) po stepenima od z, *b) po stepenima od* $z-1$.
Rešenje: a) 1) U krugu $|z| < 1$,
$f(z) = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)z^n, \ \ |z| < 1.$
2) U prstenu $1 < |z| < 3$,
$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n, \ \ 1 < |z| < 3.$
3) U oblasti $|z| > 3$,
$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-3)^n}{z^{n+1}}, \ \ |z| > 3.$
b) 1) U probušenoj okolini $0 < |z-1| < 4$,
$f(z) = \frac{4}{z-1}\frac{1}{4+z-1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(z-1)^{n-1},$
$0 < |z-1| < 4.$
2) U oblasti $|z-1| > 4$,
$f(z) = \frac{4}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\frac{4}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}, \ \ |z-1| > 4.$

Primer

Razviti funkciju $f(z) = \frac{4}{(z-1)(z+3)}$ *u Loranov red*
a) po stepenima od z*, b) po stepenima od* $z-1$*.*
Rešenje: a) 1) U krugu $|z| < 1$,
$f(z) = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right) z^n, \;\; |z| < 1.$
2) U prstenu $1 < |z| < 3$,
$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n, \;\; 1 < |z| < 3.$
3) U oblasti $|z| > 3$,
$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-3)^n}{z^{n+1}}, \;\; |z| > 3.$
b) 1) U probušenoj okolini $0 < |z-1| < 4$,
$f(z) = \frac{4}{z-1}\frac{1}{4+z-1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(z-1)^{n-1},$
$0 < |z-1| < 4.$
2) U oblasti $|z-1| > 4$,
$f(z) = \frac{4}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\frac{4}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}, \;\; |z-1| > 4.$

Primer

Razviti u Loranov red funkciju $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^3}$ *u okolini tačke* $\alpha = -1$ *i odrediti oblast konvergencije.*

Rešenje: *Koristeći Maklorenov razvoj funkcije* $g(z) = e^z$, *u probušenoj okolini tačke* $\alpha = -1$ *koja je jedini singularitet u skupu* $\mathbb{C}$ *funkcije* f, $0 < |z+1| < r$, $r > 0$, *je*

$$f(z) = \frac{e^{2(z+1)-2}}{(z+1)^3} = \frac{e^{-2}}{(z+1)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z+1)^n}{n!}.$$

Red konvergira za svako $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Klasifikacija izolovanih singulariteta

- Kažemo da je $\alpha \in \mathbb{C}$ singularitet ili singularna tačka funkcije f ako funkcija nije analitička u tački $z = \alpha$.
- Tačka $\alpha \in \mathbb{C}$ je izolovani singularitet ako postoji okolina tačke α takva da je α jedini singularitet funkcije f u toj okolini.

1) Otklonjiv (prividan) singularitet. Tačka α je otklonjiv (prividan) singularitet ako je f ograničena u nekoj okolini tačke $z = \alpha$. Tada su svi koeficijenti b_n, $n \in \mathbb{N}$, glavnog dela Loranovog razvoja u tački α jednaki nuli.
Npr. kako je $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$, tačka $z = 0$ je prividan singularitet funkcije $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

- Kažemo da je $\alpha \in \mathbb{C}$ singularitet ili singularna tačka funkcije f ako funkcija nije analitička u tački $z = \alpha$.
- Tačka $\alpha \in \mathbb{C}$ je izolovani singularitet ako postoji okolina tačke α takva da je α jedini singularitet funkcije f u toj okolini.

1) Otklonjiv (prividan) singularitet. Tačka α je otklonjiv (prividan) singularitet ako je f ograničena u nekoj okolini tačke $z = \alpha$. Tada su svi koeficijenti b_n, $n \in \mathbb{N}$, glavnog dela Loranovog razvoja u tački α jednaki nuli.

Npr. kako je $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$, tačka $z = 0$ je prividan singularitet funkcije $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

- Kažemo da je $\alpha \in \mathbb{C}$ singularitet ili singularna tačka funkcije f ako funkcija nije analitička u tački $z = \alpha$.
- Tačka $\alpha \in \mathbb{C}$ je izolovani singularitet ako postoji okolina tačke α takva da je α jedini singularitet funkcije f u toj okolini.

1) Otklonjiv (prividan) singularitet. Tačka α je otklonjiv (prividan) singularitet ako je f ograničena u nekoj okolini tačke $z = \alpha$. Tada su svi koeficijenti b_n, $n \in \mathbb{N}$, glavnog dela Loranovog razvoja u tački α jednaki nuli.

Npr. kako je $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$, tačka $z = 0$ je prividan singularitet funkcije $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

- Kažemo da je $\alpha \in \mathbb{C}$ singularitet ili singularna tačka funkcije f ako funkcija nije analitička u tački $z = \alpha$.
- Tačka $\alpha \in \mathbb{C}$ je izolovani singularitet ako postoji okolina tačke α takva da je α jedini singularitet funkcije f u toj okolini.

1) Otklonjiv (prividan) singularitet. Tačka α je otklonjiv (prividan) singularitet ako je f ograničena u nekoj okolini tačke $z = \alpha$. Tada su svi koeficijenti b_n, $n \in \mathbb{N}$, glavnog dela Loranovog razvoja u tački α jednaki nuli.
Npr. kako je $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$, tačka $z = 0$ je prividan singularitet funkcije $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1\right) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

2) Pol reda k. Tačka α je pol reda k, $k \in \mathbb{N}$, ako je

- $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = +\infty$
- $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ je analitička u $z = \alpha$ i α je nula reda k funkcije $g(z)$, tj. $g(z) = (z-\alpha)^k h(z)$, $h(\alpha) \neq 0$.
- $f(z) = \frac{b_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots$, $b_k \neq 0$ i $b_m = 0$, za sve $m > k$.

Npr. tačka $z = 1$ je pol reda 2 funkcije $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$. U oblasti $0 < |z-1| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \frac{e^2}{(z-1)^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n!} = \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + 2e^2 + \frac{4}{3} e^2 (z-1) + \ldots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

2) Pol reda k. Tačka α je pol reda k, $k \in \mathbb{N}$, ako je

- $\star$ $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z) = +\infty$
- $\star$ $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ je analitička u $z = \alpha$ i α je nula reda k funkcije $g(z)$, tj. $g(z) = (z-\alpha)^k h(z)$, $h(\alpha) \neq 0$.
- $\star$ $f(z) = \frac{b_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots,$ $b_k \neq 0$ i $b_m = 0$, za sve $m > k$.

Npr. tačka $z = 1$ je pol reda 2 funkcije $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$. U oblasti $0 < |z-1| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \frac{e^2}{(z-1)^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n!} = \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + 2e^2 + \frac{4}{3} e^2 (z-1) + \ldots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

2) Pol reda k. Tačka α je pol reda k, $k \in \mathbb{N}$, ako je

- ⋆ $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z) = +\infty$
- ⋆ $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ je analitička u $z = \alpha$ i α je nula reda k funkcije $g(z)$, tj. $g(z) = (z-\alpha)^k h(z)$, $h(\alpha) \neq 0$.
- ⋆ $f(z) = \frac{b_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots$, $b_k \neq 0$ i $b_m = 0$, za sve $m > k$.

Npr. tačka $z = 1$ je pol reda 2 funkcije $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$. U oblasti $0 < |z-1| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \frac{e^2}{(z-1)^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n!} = \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + 2e^2 + \frac{4}{3} e^2 (z-1) + \ldots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

2) Pol reda k. Tačka α je pol reda k, $k \in \mathbb{N}$, ako je

- $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z) = +\infty$
- $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ je analitička u $z = \alpha$ i α je nula reda k funkcije $g(z)$, tj. $g(z) = (z-\alpha)^k h(z)$, $h(\alpha) \neq 0$.
- $f(z) = \frac{b_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots,$
  $b_k \neq 0$ i $b_m = 0$, za sve $m > k$.

Npr. tačka $z = 1$ je pol reda 2 funkcije $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$. U oblasti $0 < |z-1| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} =$

$$\frac{e^2}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n!} = \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + 2e^2 + \frac{4}{3} e^2 (z-1) + \ldots$$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

2) Pol reda k. Tačka α je pol reda k, $k \in \mathbb{N}$, ako je

- $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z) = +\infty$
- $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ je analitička u $z = \alpha$ i α je nula reda k funkcije $g(z)$, tj. $g(z) = (z-\alpha)^k h(z)$, $h(\alpha) \neq 0$.
- $f(z) = \frac{b_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-\alpha} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \ldots,$ $b_k \neq 0$ i $b_m = 0$, za sve $m > k$.

Npr. tačka $z = 1$ je pol reda 2 funkcije $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$. U oblasti $0 < |z-1| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} =$
$\frac{e^2}{(z-1)^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n!} = \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + 2e^2 + \frac{4}{3} e^2 (z-1) + \ldots$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

3) Esencijalni singularitet. Tačka α je esencijalni singularitet ako

- ⋆ $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z)$ ne postoji (ni konačan, ni beskonačan).
- ⋆ Glavni deo Loranovog razvoja ima beskonačno članova sa koeficijentima različitim od nule, tj., za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$, $m > k$, takvo da je $b_m \neq 0$.

Npr. $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ ne postoji, tačka $z = 0$ je esencijalni singularitet funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots$

Singularitet u ∞. Funkcija $f(z)$ ima izolovani singularitet u tački $z = \infty$ ako funkcija $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ ima izolovani singularitet u tački $\omega = 0$. Npr. $z = \infty$ je pol reda 3 funkcije $f(z) = 1 + z + z^3$ jer je $\omega = 0$ pol reda 3 funkcije $g(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}$.

Klasifikacija izolovanih singulariteta

3) Esencijalni singularitet. Tačka α je esencijalni singularitet ako

- $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ ne postoji (ni konačan, ni beskonačan).
- Glavni deo Loranovog razvoja ima beskonačno članova sa koeficijentima različitim od nule, tj., za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$, $m > k$, takvo da je $b_m \neq 0$.

Npr. $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ ne postoji, tačka $z = 0$ je esencijalni singularitet funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots$

Singularitet u ∞. Funkcija $f(z)$ ima izolovani singularitet u tački $z = \infty$ ako funkcija $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ ima izolovani singularitet u tački $\omega = 0$. Npr. $z = \infty$ je pol reda 3 funkcije $f(z) = 1 + z + z^3$ jer je $\omega = 0$ pol reda 3 funkcije $g(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}$.

Klasifikacija izolovanih singulariteta

3) Esencijalni singularitet. Tačka α je esencijalni singularitet ako

- $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z)$ ne postoji (ni konačan, ni beskonačan).
- Glavni deo Loranovog razvoja ima beskonačno članova sa koeficijentima različitim od nule, tj., za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$, $m > k$, takvo da je $b_m \neq 0$.

Npr. $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ ne postoji, tačka $z = 0$ je esencijalni singularitet funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$

Singularitet u ∞. Funkcija $f(z)$ ima izolovani singularitet u tački $z = \infty$ ako funkcija $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ ima izolovani singularitet u tački $\omega = 0$. Npr. $z = \infty$ je pol reda 3 funkcije $f(z) = 1 + z + z^3$ jer je $\omega = 0$ pol reda 3 funkcije $g(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}$.

Klasifikacija izolovanih singulariteta

3) Esencijalni singularitet. Tačka α je esencijalni singularitet ako

- $\star$ $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$ ne postoji (ni konačan, ni beskonačan).
- $\star$ Glavni deo Loranovog razvoja ima beskonačno članova sa koeficijentima različitim od nule, tj., za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$, $m > k$, takvo da je $b_m \neq 0$.

Npr. $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ ne postoji, tačka $z = 0$ je esencijalni singularitet funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. U oblasti $0 < |z| < r$, $r > 0$, Loranov razvoj je $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$

Singularitet u ∞. Funkcija $f(z)$ ima izolovani singularitet u tački $z = \infty$ ako funkcija $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ ima izolovani singularitet u tački $\omega = 0$. Npr. $z = \infty$ je pol reda 3 funkcije $f(z) = 1 + z + z^3$ jer je $\omega = 0$ pol reda 3 funkcije $g(\omega) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}$.

Primer

Ispitati prirodu singulariteta u proširenoj kompleksnoj ravni funkcije $f(z) = \frac{e^z}{z^2+4}$. *U Loranovom razvoju u tački* $\omega = 0$ *funkcije* $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ *odrediti koeficijent linearnog člana* a_1.

Rešenje: *Singulariteti funkcije* f *u* $\overline{\mathbb{C}}$ *su* $z = 2i$, $z = -2i$ *i* $z = \infty$. *Kako su* $z = 2i$ *i* $z = -2i$ *nule prvog reda funkcije* $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-2i)(z+2i)}{e^z}$, *singulariteti* $z = 2i$ *i* $z = -2i$ *funkcije* f *su polovi prvog reda. Razmotrimo singularitet u* ∞. *Loranov razvoj* $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ *u tački* $\omega = 0$ *je* $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega}) =$

$$= \frac{e^{\frac{1}{\omega}}}{\frac{1}{\omega^2}+4} = e^{\frac{1}{\omega}} \frac{\omega^2}{4\omega^2+1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\omega^n}\right) \cdot \left(\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \omega^{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{3!\omega^3} + \dots\right) \cdot \left(\omega^2 - 2^2\omega^4 + 2^4\omega^6 - 2^6\omega^8 \dots\right) =$$

$$= \dots + \left(1 - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^4}{5!} \dots\right)\omega + \dots$$

Dakle, ∞ *je esencijalni singularitet,*

$$a_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sin 2.$$

Reziduum

- Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ regularna tačka ili izolovani singularitet funkcije $f(z)$. Reziduum funkcije f u tački α u oznaci $\mathrm{Res}[f(z), \alpha]$ je definisan sa

$$\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz,$$

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), \alpha],$$

gde je L zatvorena, pozitivno orijentisana putanja koja okružuje α takva da je $f(z)$ analitička i na L i na $\mathrm{int}\, L$, osim, eventualno u tački α.

- Ako je α regularna tačka ili otklonjiv singularitet tada je $\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = 0$.

- $$\boxed{\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = a_{-1} = b_1,}$$
  gde je a_{-1} koeficijent uz $\frac{1}{z-\alpha}$ u Loranovom razvoju u tački α
- Ako je $\alpha \in \mathbb{C}$ pol reda k funkcije f tada je
  $$\boxed{\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to \alpha} [(z-\alpha)^k f(z)]^{(k-1)}.}$$
- Ako je $\alpha \in \mathbb{C}$ pol prvog reda funkcije f tada je
  $$\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'} \right) \Big|_{z=\alpha}.$$
- Reziduum u tački ∞ je $\boxed{\mathrm{Res} = [f(z), \infty] = -a_1,}$ gde je a_1 koeficijent linearnog člana u Loranovom razvoju funkcije $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ u tački $\omega = 0$.