Reziduum. Račun ostataka. Analitičko produženje

PREDAVANJA 13

Univerzitet u Novom Sadu, FTN, januar 2023

Reziduum

- Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ regularna tačka ili izolovani singularitet funkcije $f(z)$. Reziduum funkcije f u tački α u oznaci $\mathrm{Res}[f(z), \alpha]$ je definisan sa

$$\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz,$$

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), \alpha],$$

  gde je L zatvorena, pozitivno orijentisana putanja koja okružuje α takva da je $f(z)$ analitička i na L i na $\mathrm{int}\, L$, osim, eventualno u tački α.

- Ako je α regularna tačka ili otklonjiv singularitet tada je $\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = 0$.

- $$\boxed{\mathrm{Res}[f(z),\alpha] = a_{-1} = b_1,}$$
  gde je a_{-1} koeficijent uz $\frac{1}{z-\alpha}$ u Loranovom razvoju u tački α
- Ako je $\alpha \in \mathbb{C}$ pol reda k funkcije f tada je
  $$\boxed{\mathrm{Res}[f(z),\alpha] = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}[(z-\alpha)^k f(z)]^{(k-1)}.}$$
- Ako je $\alpha \in \mathbb{C}$ pol prvog reda funkcije f tada je
  $$\mathrm{Res}[f(z),\alpha] = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'}\right)\Big|_{z=\alpha}.$$
- Reziduum u tački ∞ je $\boxed{\mathrm{Res} = [f(z),\infty] = -a_1,}$ gde je a_1 koeficijent linearnog člana u Loranovom razvoju funkcije $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ u tački $\omega = 0$.

Teorema

Ako je f analitička funkcija u unutrašnjosti i na zatvorenoj pozitivno orijentisanoj putanji L osim u konačno mnogo tačaka $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \in \operatorname{int} L$ tada je

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}[f(z), \alpha_k].$$

Dokaz: $\oint\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{m} \oint\limits_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{Res}[f(z), \alpha_k].$ $\square$

Teorema

Ako je f analitička funkcija za sve $z \in \mathbb{C}$ osim u konačno mnogo tačaka $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ tada je

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), \alpha_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0.$$

Primer

Pomoću računa ostataka izračunati $I = \oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+4}$ *i* $\mathrm{Res}[\frac{e^z}{z^2+4}, \infty]$.

Rešenje: Kako polovi prvog reda funkcije $f(z) = \frac{e^z}{z^2+4}$, $z = 2i$ i $z = -2i$ pripadaju $\mathrm{int}\, L$, gde je L zatvorena, pozitivno orijentisana kružnica $|z| = 3$ i kako je

$\mathrm{Res}[f(z), 2i] = \frac{1}{0!} \lim\limits_{z \to 2i} [(z - 2i)\frac{e^z}{(z-2i)(z+2i)}] = \frac{e^{2i}}{4i}$, dok je

$\mathrm{Res}[f(z), -2i] = \frac{1}{0!} \lim\limits_{z \to -2i} [(z + 2i)\frac{e^z}{(z-2i)(z+2i)}] = \frac{e^{-2i}}{-4i}$, dobijamo

$$I = 2\pi i(\mathrm{Res}[f(z), 2i] + \mathrm{Res}[f(z), -2i]) = 2\pi i(\frac{e^{2i}}{4i} - \frac{e^{-2i}}{4i}) = \pi i \sin 2.$$

Dalje je $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\frac{e^{2i}}{4i} + \frac{e^{-2i}}{4i} = -\frac{1}{2}\sin 2$, što je direktno pokazano u prethodnom primeru jer je koeficijent linearnog člana $a_1 = \frac{1}{2}\sin 2$ u razvoju u Loranov red funkcije $g(\omega) = f(\frac{1}{\omega})$ u tački $\omega = 0$, a $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -a_1 = -\frac{1}{2}\sin 2$.

Izračunavanje realnih integrala primenom računa ostataka

I tip: $I = \int\limits_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)dx,\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je racionalna funkcija

$L:\ |z| = 1,\ z = e^{ix},\ x \in [0, 2\pi],\ dz = ie^{ix}dx,\ dx = \frac{dz}{iz},$

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz},\ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$, tada je

$$I = \oint\limits_L \underbrace{f\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{1}{iz}}_{F(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[F(z), \alpha_k],$$

gde su $\alpha_k,\ k = 1, \ldots, m$ polovi funkcije $F(z)$ u unutrašnjosti centralne jedinične kružnice L.

Izračunavanje realnih integrala primenom računa ostataka

II tip: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, $f(z)$ je analitička funkcija u oblasti $\operatorname{Im} z \geq 0$ osim u konačno mnogo polova α_k, $k = 1, \ldots, m$ koji nisu na realnoj osi i za $z = Re^{i\varphi}$, $|Rf(Re^{i\varphi})| \leq \epsilon(R)$, $\epsilon(R) \to 0$, $R \to +\infty$. Tada je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}[f(z), \alpha_k].$$

Zaista, $I = \oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{Res}[f(z), \alpha_k]$, gde je $L = L_1 \cup L_2$,

$L_1: \; z = Re^{i\varphi}, \;\; \varphi \in \overrightarrow{[0, \pi]}, \; dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$L_2: \;\; z = x, \;\; x \in \overrightarrow{[-R, R]}, \; dz = dx$, a za dovoljno veliko R svi polovi $\alpha_k \in \operatorname{int} L$, $k = 1, \ldots, m$.

Izračunavanje realnih integrala primenom računa ostataka

S druge strane je $I = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\,d\varphi$, i

$\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$

Iz uslova $|Rf(Re^{i\varphi})| \leq \epsilon(R)$, $\epsilon(R) \to 0$, $R \to +\infty$ sledi

$\lim\limits_{R\to+\infty} |i\int\limits_{0}^{\pi} f(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}d\varphi| \leq \int\limits_{0}^{\pi} \lim\limits_{R\to+\infty} |f(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}|d\varphi = 0.$

Konačno dobijamo

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z), \alpha_k].$$

Izračunavanje realnih integrala primenom računa ostataka

III tip: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$ ili $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx$, $f(z)$ je analitička funkcija u oblasti $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ osim u konačno mnogo polova α_k, $k = 1, \dots, m$ koji nisu na realnoj osi i za $z = Re^{i\varphi}$, $|f(Re^{i\varphi})| \leq \epsilon(R)$, $\epsilon(R) \to 0$, $R \to +\infty$. Tada je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x \, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, \alpha_k].$$

Zaista, $I = \oint\limits_L f(z)e^{iz} dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, \alpha_k]$, gde je $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 : \ z = Re^{i\varphi}, \ \varphi \in \overrightarrow{[0, \pi]}$, $dz = iRe^{i\varphi} d\varphi$, $L_2 : \ z = x, \ x \in \overrightarrow{[-R, R]}$, $dz = dx$, a za dovoljno veliko R svi polovi $\alpha_k \in \mathrm{int}\, L$, $k = 1, \dots, m$.

Izračunavanje realnih integrala primenom računa ostataka

S druge strane je $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint\limits_L f(z)e^{iz}\,dz = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)e^{ix}\,dx +$

$+\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})e^{iRe^{i\varphi}}Rie^{i\varphi}d\varphi$. Kako je

$\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)e^{ix}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\,dx,$

a iz uslova sledi

$\int\limits_0^{\pi}|f(Re^{i\varphi})e^{iRe^{i\varphi}}Rie^{i\varphi}|d\varphi \le 2R\epsilon(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}d\varphi \le$

$2R\epsilon(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\varphi}{\pi}}d\varphi = \pi\epsilon(R)(1-e^{-R}) \to 0,\ R\to+\infty$, dobijamo

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},\alpha_k].$$

Analitičko produženje

Neka su f_1 i f_2 analitičke funkcije u R_1 i R_2, respektivno, $R_1 \subseteq \mathbb{C}$ i $R_2 \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ i $R_1 \cap R_2$ ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Kažemo da se funkcija f_1 se analitički produžava na R_2 pomoću f_2, a funkcija f_2 se analitički produžava na R_1 pomoću f_1.

Tada postoji analitička funkcija f na $R_1 \cup R_2$

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), z \in R_1 \\ f_2(z), z \in R_2. \end{cases}$$

Teorema

Neka je f analitička funkcija na oblasti $R \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f(z) = 0$ za sve $z \in PQ \subset R$, gde je PQ putanja. Tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in R$.

Analitičko produženje

Neka su f_1 i f_2 analitičke funkcije u R_1 i R_2, respektivno, $R_1 \subseteq \mathbb{C}$ i $R_2 \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ i $R_1 \cap R_2$ ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Kažemo da se funkcija f_1 se analitički produžava na R_2 pomoću f_2, a funkcija f_2 se analitički produžava na R_1 pomoću f_1.

Tada postoji analitička funkcija f na $R_1 \cup R_2$

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), z \in R_1 \\ f_2(z), z \in R_2. \end{cases}$$

Teorema

Neka je f analitička funkcija na oblasti $R \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f(z) = 0$ za sve $z \in PQ \subset R$, gde je PQ putanja. Tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in R$.

Analitičko produženje

Neka su f_1 i f_2 analitičke funkcije u R_1 i R_2, respektivno, $R_1 \subseteq \mathbb{C}$ i $R_2 \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ i $R_1 \cap R_2$ ima bar jednu tačku nagomilavanja.
Kažemo da se funkcija f_1 se analitički produžava na R_2 pomoću f_2, a funkcija f_2 se analitički produžava na R_1 pomoću f_1.
Tada postoji analitička funkcija f na $R_1 \cup R_2$

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), \ z \in R_1 \\ f_2(z), \ z \in R_2. \end{cases}$$

Teorema

Neka je f analitička funkcija na oblasti $R \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f(z) = 0$ za sve $z \in PQ \subset R$, gde je PQ putanja. Tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in R$.

Analitičko produženje

Neka su f_1 i f_2 analitičke funkcije u R_1 i R_2, respektivno, $R_1 \subseteq \mathbb{C}$ i $R_2 \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ i $R_1 \cap R_2$ ima bar jednu tačku nagomilavanja.
Kažemo da se funkcija f_1 se analitički produžava na R_2 pomoću f_2, a funkcija f_2 se analitički produžava na R_1 pomoću f_1.
Tada postoji analitička funkcija f na $R_1 \cup R_2$

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), \ z \in R_1 \\ f_2(z), \ z \in R_2. \end{cases}$$

Teorema

Neka je f analitička funkcija na oblasti $R \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f(z) = 0$ za sve $z \in PQ \subset R$, gde je PQ putanja. Tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in R$.

Analitičko produženje

Teorema

Neka su funkcije f_1 i f_2 analitičke na oblasti $R \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f_1(z) = f_2(z)$, za svako $z \in PQ$, gde je PQ putanja u R. Tada je $f_1(z) = f_2(z)$ za svako $z \in R$.

Primer

Stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$ definiše analitičku funkciju $f(z) = \frac{1}{1-z}$, za $z \neq 1$, koja je analitičko produženje za $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sa jediničnog kruga na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Analitičko produženje

Teorema

Neka su funkcije f_1 i f_2 analitičke na oblasti $R \subseteq \mathbb{C}$ i neka je $f_1(z) = f_2(z)$, za svako $z \in PQ$, gde je PQ putanja u R. Tada je $f_1(z) = f_2(z)$ za svako $z \in R$.

Primer

Stepeni red $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$ *definiše analitičku funkciju* $f(z) = \frac{1}{1-z}$, *za* $z \neq 1$, *koja je analitičko produženje za* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *sa jediničnog kruga na* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Analitičko produženje

Konstrukcija analitičkog produženja Pretpostavimo da je funkcija f predstavljena u obliku stepenog reda na $|z-a|<r$ analitička u tački a. Za svaku tačku b iz tog kruga su poznate vrednosti $f(b)$, $f'(b)$,...te je poznat i Tejlorov red funkcije $f(z)$ koji konvergira u krugu $|z-b|<r_1$. Na taj način se formira lanac krugova konvergencije $C_1, \ldots, C_n$ čiji su centri na nekoj putanji P_1. Unija tih krugova je oblast G na kojoj razni razvoji daju funkciju F koja je analitičko produženje funkcije f. Elementi funkcije F su stepeni redovi koji reprezentuju F u svim krugovima konvergencije. Funkcija F je jednoznačno određena ako je zadat svaki njen element. Ako u oblasti ograničenoj putanjama P_1 i P_2 nema singulariteta dobijamo isti razvoj u red na C_n, gde je P_2 neka druga putanja. Prirodna granica analitičke funkcije je rub kruga na kome su singulariteti gusto raspoređeni da nije moguće dalje analitičko produženje.

Primer

$1+\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1+z+z^2+z^4+\cdots = F(z)$ *ne može biti analitički produžena van* $|z|<1$, $|z|=1$ *je prirodna granica funkcije* $F(z)$ *jer su svi koreni* $z=1$, $z^2=1$, $z^4=1$, $z^8=1$, ...*singulariteti funkcije* $F(z) = z+F(z^2) = z+z^2+F(z^4) = z+z^2+z^4+F(z^8) = \ldots$, *zaista* $F(1)=\infty$, $F(\sqrt{1}) = \sqrt{1}+F(1) = \sqrt{1}+\infty = \infty$, $F(\sqrt[4]{1}) = \sqrt[4]{1} + (\sqrt[4]{1})^2 + F(1) = \infty$, $F(\sqrt[8]{1}) = \sqrt[8]{1} + (\sqrt[8]{1})^2 + (\sqrt[8]{1})^4 + F(1) = \infty, \ldots$

Primer

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ *analitički produžavaju jedan drugoga,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2-z} = f(z)$, $|z|<2$, *a kako je* $f(z) = \frac{1}{2-i-(z-i)} = \frac{1}{2-i}\frac{1}{1-\frac{z-i}{2-i}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$, $|z-i| < |2-i| = \sqrt{5}$, *oba reda su jednaka istoj funkciji i predstavljaju direktna analitička produženja jedan drugog.*