

Tačkaste ocene parametara

PREDAVANJA 11

Univerzitet u Novom Sadu, FTN

Metod momenata

Običan momenat reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje slučajne promenljive X^k i označava se sa $m_k = E(X^k)$. Matematičko očekivanje je momenat reda 1.

Centralni momenat reda k slučajne promenljive X je $s_k = E((X - E(X))^k)$. Disperzija je centralni momenat reda 2.

Uzorački momenat reda k je $\overline{M}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$, a njegova

realizovana vrednost je $\overline{m}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{1}{n}(x_1^k + x_2^k \dots + x_n^k)$.

Uzoračka aritmetička sredina je uzorački momenat prvog reda ($k = 1$).

Metod momenata

Običan momenat reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje slučajne promenljive X^k i označava se sa $m_k = E(X^k)$. Matematičko očekivanje je momenat reda 1.

Centralni momenat reda k slučajne promenljive X je $s_k = E((X - E(X))^k)$. Disperzija je centralni momenat reda 2.

Uzorački momenat reda k je $\overline{M}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$, a njegova

realizovana vrednost je $\overline{m}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{1}{n}(x_1^k + x_2^k \dots + x_n^k)$.

Uzoračka aritmetička sredina je uzorački momenat prvog reda ($k = 1$).

Metod momenata

Običan momenat reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje slučajne promenljive X^k i označava se sa $m_k = E(X^k)$. Matematičko očekivanje je momenat reda 1.

Centralni momenat reda k slučajne promenljive X je $s_k = E((X - E(X))^k)$. Disperzija je centralni momenat reda 2.

Uzorački momenat reda k je $\overline{M}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$, a njegova

realizovana vrednost je $\overline{m}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{1}{n}(x_1^k + x_2^k \dots + x_n^k)$.

Uzoračka aritmetička sredina je uzorački momenat prvog reda ($k = 1$).

Metod momenata

Uzorački centralni momenat reda k je $\overline{S}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k$.

Uzoračka disperzija uzorački centralni momenat drugog reda ($k = 2$).

Za ocenjivanje nepoznatog parametra θ metodom momenata najčešće ćemo koristiti jednakost $E(X) = \overline{X}_n$.

Za ocenu $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kažemo da je **centrirana** ili **nepriistrasna** ako je $E(u(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta$.

Centrirana ocena parametra μ koji predstavlja matematičko očekivanje je $\hat{\mu} = \overline{X}_n$, tj. $\mu = \overline{x}_n$.

Centrirana ocena parametra s^2 koji predstavlja disperziju je korigovana uzoračka disperzija, tj. $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$.

Metod momenata

Uzorački centralni momenat reda k je $\overline{S}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k$.

Uzoračka disperzija uzorački centralni momenat drugog reda ($k = 2$).

Za ocenjivanje nepoznatog parametra θ metodom momenata najčešće ćemo koristiti jednakost $E(X) = \overline{X}_n$.

Za ocenu $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kažemo da je **centrirana** ili **nepriistrasna** ako je $E(u(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta$.

Centrirana ocena parametra μ koji predstavlja matematičko očekivanje je $\hat{\mu} = \overline{X}_n$, tj. $\mu = \overline{x}_n$.

Centrirana ocena parametra s^2 koji predstavlja disperziju je korigovana uzoračka disperzija, tj. $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$.

Metod momenata

Uzorački centralni momenat reda k je $\overline{S}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k$.

Uzoračka disperzija uzorački centralni momenat drugog reda ($k = 2$).

Za ocenjivanje nepoznatog parametra θ metodom momenata najčešće ćemo koristiti jednakost $E(X) = \overline{X}_n$.

Za ocenu $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kažemo da je **centrirana** ili **nepriistrasna** ako je $E(u(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta$.

Centrirana ocena parametra μ koji predstavlja matematičko očekivanje je $\hat{\mu} = \overline{X}_n$, tj. $\mu = \overline{x}_n$.

Centrirana ocena parametra s^2 koji predstavlja disperziju je korigovana uzoračka disperzija, tj. $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$.

Metod momenata

Uzorački centralni momenat reda k je $\overline{S}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k$.

Uzoračka disperzija uzorački centralni momenat drugog reda ($k = 2$).

Za ocenjivanje nepoznatog parametra θ metodom momenata najčešće ćemo koristiti jednakost $E(X) = \overline{X}_n$.

Za ocenu $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kažemo da je **centrirana** ili **nepriistrasna** ako je $E(u(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta$.

Centrirana ocena parametra μ koji predstavlja matematičko očekivanje je $\hat{\mu} = \overline{X}_n$, tj. $\mu = \overline{x}_n$.

Centrirana ocena parametra s^2 koji predstavlja disperziju je korigovana uzoračka disperzija, tj. $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$.

Metod momenata

Uzorački centralni momenat reda k je $\overline{S}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k$.

Uzoračka disperzija uzorački centralni momenat drugog reda ($k = 2$).

Za ocenjivanje nepoznatog parametra θ metodom momenata najčešće ćemo koristiti jednakost $E(X) = \overline{X}_n$.

Za ocenu $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kažemo da je **centrirana** ili **nepriistrasna** ako je $E(u(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta$.

Centrirana ocena parametra μ koji predstavlja matematičko očekivanje je $\hat{\mu} = \overline{X}_n$, tj. $\mu = \bar{x}_n$.

Centrirana ocena parametra s^2 koji predstavlja disperziju je korigovana uzoračka disperzija, tj. $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$.

Metod maksimalne verodostojnosti

Neka je $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uzorak obima n , a $F(x, \theta)$ raspodela obeležja X . **Funkcija verodostojnosti** je

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \cdots p(x_n, \theta), & \text{diskretno ob.} \\ \varphi(x_1, \theta)\varphi(x_2, \theta) \cdots \varphi(x_n, \theta), & \text{neprekidno ob.} \end{cases}$$

Metodom maksimalne verodostojnosti za ocenu nepoznatog parametra θ uzima se statistika za koju $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ dostiže svoju najveću vrednost (maksimum), tj. ocena se dobija

rešavanjem jednačine $\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$.

Jednostavnije je raditi sa logaritamskom funkcijom verodostojnosti koja, zbog monotonosti logaritamske funkcije, dostiže ekstremne vrednosti za iste vrednosti parametra θ za koje i funkcija L , te

ocenu dobijamo rešavanjem $\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$.

Primer

Obeležje X date populacije ima raspodelu

$$X : \left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 7 \\ \frac{\theta}{5} & \frac{\theta}{5} & 1 - \frac{2\theta}{5} \end{array} \right).$$

- (a) Metodom momenata naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka $(0, -2, 7, -2)$.
- (b) Na osnovu istog uzorka naći ocenu nepoznatog parametra θ metodom maksimalne verodostojnosti.

Rešenje: (a) Matematičko očekivanje obeležja je

$E(X) = -2 \cdot \frac{\theta}{5} + 0 \cdot \frac{\theta}{5} + 7(1 - \frac{2\theta}{5}) = 7 - \frac{16\theta}{5}$, a aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_4 = \bar{m}_4 = \frac{3}{4}$.

Iz jednačine $E(X) = \bar{m}_4$ dobijamo nepoznati parametar θ :

$$7 - \frac{16\theta}{5} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{16\theta}{5} \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{125}{64} \approx 1.953125.$$

(b) Funkcija verodostojnosti je

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta) = P(X = 0)P(X = -2)P(X = 7)P(X = -2) = \frac{\theta}{5} \cdot \frac{\theta}{5} \cdot (1 - \frac{2\theta}{5}) \cdot \frac{\theta}{5} = (\frac{\theta}{5})^3 \cdot (1 - \frac{2\theta}{5}).$$

Logaritmovanjem prethodne jednakosti dobijamo

$\ln L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta) = 3 \cdot \ln \frac{\theta}{5} + \ln(1 - \frac{2\theta}{5})$, a zatim odredimo parcijalni izvod funkcije $\ln L$ po θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(x_1, x_2, x_3, x_4; \theta)}{\partial \theta} &= 3 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{(1 - \frac{2\theta}{5})} \cdot (-\frac{2}{5}) \\ &= \frac{3}{\theta} - \frac{2}{5 - 2\theta} = \frac{15 - 8\theta}{\theta(5 - 2\theta)}. \end{aligned}$$

Dalje, iz jednačine $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_4; \theta)}{\partial \theta} = 0$ sledi da je $15 - 8\theta = 0$, a odatle je $\tilde{\theta} = \frac{15}{8} = 1.875$.

Primer

Neka obeležje X ima gustinu

$$\varphi_X(\theta, x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}, \theta > -1.$$

Na osnovu uzorka 0.92 0.79 0.9 0.65 0.86 0.47 0.73 0.97 0.94 0.77, naći ocenu nepoznatog parametra θ

- (a) metodom momenata;
- (b) metodom maksimalne verodostojnosti.

Rešenje:(a) Za datu neprekidnu slučajnu promenljivu

$$E(X) = \int_0^1 x(\theta + 1)x^\theta dx = (\theta + 1) \int_0^1 x^{\theta+1} dx = \frac{\theta+1}{\theta+2} x^{\theta+2} \Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

Kako je $\bar{x}_{10} = \frac{8}{10} = 0.8$, iz $E(X) = \bar{x}_{10}$, dobijamo jednačinu

$$\frac{\theta + 1}{\theta + 2} = 0.8, \text{ a odatle je } \bar{\theta} = 3.$$

(b) Funkcija verodostojnosti je

$$\begin{aligned}
 L(x_1, \dots, x_{10}; \theta) &= \\
 &= \varphi(0.92) \cdot \varphi(0.79) \cdot \varphi(0.9) \cdot \varphi(0.65) \cdot \varphi(0.86) \cdot \varphi(0.47) \cdot \varphi(0.73) \cdot \\
 &\varphi(0.97) \cdot \varphi(0.94) \cdot \varphi(0.77) \\
 &= (\theta + 1)^{10} (0.92 \cdot 0.79 \cdot 0.9 \cdot 0.65 \cdot 0.86 \cdot 0.47 \cdot 0.73 \cdot 0.97 \cdot 0.94 \cdot 0.77)^\theta \\
 &= (\theta + 1)^{10} (0.0880806)^\theta.
 \end{aligned}$$

Logaritmovanjem funkcije verodostojnosti L dobijamo

$$\ln L(x_1, \dots, x_{10}; \theta) = 10 \ln(\theta + 1) + \theta \ln 0.0880806,$$

a zatim i

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_{10}; \theta)}{\partial \theta} = \frac{10}{\theta + 1} + \ln 0.0880806.$$

Iz jednačine $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_{10}; \theta)}{\partial \theta} = 0$ sledi da je

$$\frac{10}{\theta + 1} - 2.4295029 = 0, \text{ a odatle je } \tilde{\theta} \approx 3.116.$$