

# Statističke hipoteze i testovi značajnosti

## PREDAVANJA 12

*Univerzitet u Novom Sadu, FTN*

# Intervalne ocene nepoznatih parametara

Interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje  $m$  obeležja sa normalnom  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  raspodelom

- Ako je standardna devijacija  $\sigma$  obeležja poznata

$$I = \left( \bar{X}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

gde je  $\bar{X}_n$  aritmetička sredina uzorka,  $n$  obim uzorka,  $\beta$  zadati nivo poverenja a vrednost  $a$  se pronalazi u tablici normalne  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodele po obrascu  $a = \phi^{-1}(\frac{1+\beta}{2})$ .

- Ako je standardna devijacija  $\sigma$  nepoznata,

$$I = \left( \bar{X}_n - a \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + a \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}} \right),$$

gde je  $\bar{S}_n$  uzoračka standardna devijacija. Ako je obim uzorka  $n \geq 30$ ,  $a = \phi^{-1}(\frac{1+\beta}{2})$ , dok za  $n < 30$  je  $a = t_{n-1, \frac{1+\beta}{2}}$ , iz tablice Studentove raspodele.

## Intervalne ocene nepoznatih parametara

Interval poverenja za nepoznatu disperziju  $\sigma^2$  obeležja sa normalnom raspodelom  $\mathcal{N}(m, \sigma)$

$$\text{dvostrani: } I = \left( \frac{n\bar{S}_n^2}{a}, \frac{n\bar{S}_n^2}{b} \right), \quad \text{jednostrani: } I = \left( 0, \frac{n\bar{S}_n^2}{c} \right)$$

U prethodnim izrazima  $n$  je obim uzorka,  $\bar{S}_n^2$  je uzoračka disperzija, a vrednosti  $a$ ,  $b$  i  $c$  čitamo iz tablice Pirsonove  $\chi^2$  raspodele, sa  $n - 1$  stepenom slobode:

$$a = \chi_{n-1, \frac{1+\beta}{2}}^2, \quad b = \chi_{n-1, \frac{1-\beta}{2}}^2, \quad c = \chi_{n-1, \beta}^2.$$

Jednostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju ima za donju granicu broj 0, zato što disperzija ne može imati negativnu vrednost. Koristi se kod testiranja parametarskih hipoteza.

# Intervalne ocene nepoznatih parametara

Interval poverenja za nepoznatu proporciju  $p$  obeležja sa binomnom  $\mathcal{B}(n, p)$  raspodelom

Proporcija  $p$  predstavlja verovatnoću uspešne realizacije obeležja sa binomnom raspodelom i ocenjuje se intervalom

$$I = \left( \hat{p} - a\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n-1}}, \hat{p} + a\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n-1}} \right).$$

U prethodnom izrazu  $\hat{p} = \frac{K}{n}$ , gde je  $K$  broj uspešnih realizacija u uzorku obima  $n$ ,  $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ , a  $a = \phi^{-1}(\frac{1+\beta}{2})$ .

Pomoću ovog intervala možemo oceniti i **nepoznat broj pozitivnih realizacija** obeležja sa binomnom  $\mathcal{B}(n, p)$  raspodelom u populaciji obima  $N$ :

$$I = \left( N(\hat{p} - a\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n-1}}), N(\hat{p} + a\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n-1}}) \right).$$

## Primer

| težina [kg]      | (1.5,2.5] | (2.5,3.5] | (3.5,4.5] | (4.5,5.5] |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| broj beba (jun)  | 25        | 90        | 70        | 15        |
| broj beba (dec.) | 15        | 100       | 55        | 10        |

- (a) Odrediti 90% interval poverenja za prosečnu težinu jun. beba.
- (b) Odrediti 95% interval poverenja za procenat decembarskih beba težih od 4.5 kg.

## Rešenje:

- (a) Kako je  $n = 200$ ,  $\bar{x}_n = 3.375$ ,  $\bar{s}_n = \sqrt{0.634375} \approx 0.79648$ , tablična vrednost je  $a = \phi^{-1}(\frac{1+0.9}{2}) = \phi^{-1}(0.95) = 1.645$ , dobijamo da je odgovarajući interval poverenja  $I = (3.282\text{kg}, 3.468\text{kg})$ .
- (b) Kako je  $n = 180$ ,  $\bar{p} = \frac{10}{180} = 0.05$ ,  $\bar{q} = 1 - \frac{10}{180} = 0.94$ , a tablična vrednost je  $a = \phi^{-1}(\frac{1+0.95}{2}) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$ , dobijamo odgovarajući interval poverenja  $I = (2.2\%, 8.91\%)$ .

## Primer

Za uzorak obima  $n = 27$ , izračunata je uzoračka disperzija  $\bar{s}_{27}^2 = 9.7344$ . Ako obeležje ima normalnu raspodelu, naći dvostrani i jednostrani interval poverenja za disperziju sa nivoom poverenja  $\beta = 0.95$ .

Rešenje: Tražene intervale poverenja odredićemo pomoću:

$I = \left( \frac{n\bar{s}_n^2}{a}, \frac{n\bar{s}_n^2}{b} \right)$ , i  $I = \left( 0, \frac{n\bar{s}_n^2}{c} \right)$ . Kako je  $n = 27$  i  $\bar{s}_{27}^2 = 9.7344$ , iz tablice  $\chi^2$  rapodele, za zadati nivo poverenja  $\beta = 0.95$ , dobijamo  $a = \chi_{n-1, \frac{1+\beta}{2}}^2 = \chi_{27-1, \frac{1+0.95}{2}}^2 = \chi_{26, 0.975}^2 = 41.9$ ,  $b = \chi_{n-1, \frac{1-\beta}{2}}^2 = \chi_{27-1, \frac{1-0.95}{2}}^2 = \chi_{26, 0.025}^2 = 13.8$ ,  $c = \chi_{26, 0.95}^2 = 38.9$ .

Dakle, dvostrani interval je

$I = \left( \frac{27 \times 9.7344}{41.9}, \frac{27 \times 9.7344}{13.8} \right) = (6.27, 19.05)$ , a jednostrani

$I = \left( 0, \frac{27 \times 9.7344}{38.9} \right) = (0, 6.76)$ .

Ako znamo realizovane vrednosti prostog slučajnog uzorka obeležja  $X$ , možemo postaviti neke pretpostavke o raspodeli obeležja  $X$ , takozvane **statističke hipoteze**. Ako se hipoteza odnosi na vrednost parametra poznatog oblika raspodele, tada je u pitanju **parametarska hipoteza**, a ako se pretpostavka odnosi na funkciju raspodele, onda je to **neparametarska hipoteza**.

Provera hipoteze se naziva **statistički test**. Kod svakog statističkog testa unapred je definisan **prag značajnosti**  $\alpha$ , koji predstavlja najveću dozvoljenu verovatnoću greške I vrste tj. verovatnoću da smo nultu hipotezu odbacili iako je zapravo tačna.

# Testiranje parametarskih hipoteza

Kod parametarskih testova **jednog uzorka** nulta hipoteza je oblika  $H_0(\theta = \theta_0)$ , gde je  $\theta$  nepoznati parametar raspodele obeležja, a  $\theta_0$  njegova pretpostavljena vrednost.

Nultoj hipotezi  $H_0(\theta = \theta_0)$  suprotstavljamo alternativnu hipotezu  $H_1(\theta \neq \theta_0)$ , sa zadatim pragom značajnosti  $\alpha$ . Jedan od načina provere parametarskih hipoteza jednog uzorka je pomoću **intervala poverenja**. Odredimo interval poverenja  $I$  za traženi parametar  $\theta$ , sa nivoom poverenja  $\beta = 1 - \alpha$ .

Ako  $\theta_0 \in I$ , nultu hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti  $\alpha$ .

Ako  $\theta_0 \notin I$ , tada nultu hipotezu odbacujemo, a prihvatamo alternativnu.

### Primer

*Za podatke o težini junskih beba iz prethodnog primera sa pragom značajnosti  $\alpha = 0.1$ , testirati hipotezu da je prosečna težina junskih beba 3kg,*

Rešenje: Nultoj hipotezi  $H_0(m = 3)$  suprotstavljamo alternativnu hipotezu  $H_1(m \neq 3)$ , sa pragom značajnosti  $\alpha = 0.1$ .

U prethodnom primeru odredili smo 90% interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje,

$$I_{90\%} = (3.282\text{kg}, 3.468\text{kg}).$$

Kako  $3 \notin I_{90\%}$ , nulta hipoteza se ne prihvata.

# Testiranje neparametarskih hipoteza-Pirsonov test

Neparametarske testove primenjujemo kada nam nije poznata raspodela obeležja. Nulta hipoteza je oblika  $H_0(F = F_0)$ , a prag značajnosti je  $\alpha$ .

- Pirsonov ( $\chi^2$ -test) primenjujemo ako je obim uzorka bar 50.
- Skup realnih brojeva  $(-\infty, +\infty)$  podelimo na  $k$  disjunktних intervala  $I_m = [a_m, b_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ , tako da u svakom intervalu bude barem pet elemenata realizovanog uzorka (ako neki interval sadrži manje od 5 elemenata, spajamo ga sa nekim od susednih intervala, tako da broj spajanja bude minimalan).
- Za  $m = 1, 2, \dots, k$ , odredimo vrednost  $n_m$  koja predstavlja broj elemenata realizovanog uzorka  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koji pripadaju intervalu  $I_m$ .

# Testiranje neparametarskih hipoteza-Pirsonov test

Neparametarske testove primenjujemo kada nam nije poznata raspodela obeležja. Nulta hipoteza je oblika  $H_0(F = F_0)$ , a prag značajnosti je  $\alpha$ .

- Pirsonov ( $\chi^2$ -test) primenjujemo ako je obim uzorka bar 50.
- Skup realnih brojeva  $(-\infty, +\infty)$  podelimo na  $k$  disjunktних intervala  $I_m = [a_m, b_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ , tako da u svakom intervalu bude barem pet elemenata realizovanog uzorka (ako neki interval sadrži manje od 5 elemenata, spajamo ga sa nekim od susednih intervala, tako da broj spajanja bude minimalan).
- Za  $m = 1, 2, \dots, k$ , odredimo vrednost  $n_m$  koja predstavlja broj elemenata realizovanog uzorka  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koji pripadaju intervalu  $I_m$ .

# Testiranje neparametarskih hipoteza-Pirsonov test

Neparametarske testove primenjujemo kada nam nije poznata raspodela obeležja. Nulta hipoteza je oblika  $H_0(F = F_0)$ , a prag značajnosti je  $\alpha$ .

- Pirsonov ( $\chi^2$ -test) primenjujemo ako je obim uzorka bar 50.
- Skup realnih brojeva  $(-\infty, +\infty)$  podelimo na  $k$  disjunktних intervala  $I_m = [a_m, b_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ , tako da u svakom intervalu bude barem pet elemenata realizovanog uzorka (ako neki interval sadrži manje od 5 elemenata, spajamo ga sa nekim od susednih intervala, tako da broj spajanja bude minimalan).
- Za  $m = 1, 2, \dots, k$ , odredimo vrednost  $n_m$  koja predstavlja broj elemenata realizovanog uzorka  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koji pripadaju intervalu  $I_m$ .

- Odredimo teorijske verovatnoće pripadanja intervalu  $I_m$ :  
 $p_m = \mathbf{P}(X \in I_m) = F_0(b_m) - F_0(a_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ ,  
 pa je teorijski (pretpostavljeni) broj elemenata u intervalu  $I_m$   
 jednak  $np_m$ .
- Odredimo realizovanu vrednost  $z$ , statistike

$$Z = \sum_{m=1}^k \frac{(N_m - np_m)^2}{np_m}$$

koja meri ukupno odstupanje teorijskih od empirijskih frekvencija.

- Iz tablice  $\chi^2$  raspodele (za dovoljno veliko  $n$ , raspodela statistike  $Z$  se može aproksimirati  $\chi_{k-1}^2$  raspedelom) se očitava  $\chi_{k-1-s, 1-\alpha}^2$ , gde  $s$  predstavlja broj nepoznatih parametara raspodele, koje smo morali da prethodno ocenimo, obično metodom momenata.

- Odredimo teorijske verovatnoće pripadanja intervalu  $I_m$ :  
 $p_m = \mathbf{P}(X \in I_m) = F_0(b_m) - F_0(a_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ ,  
 pa je teorijski (pretpostavljeni) broj elemenata u intervalu  $I_m$  jednak  $np_m$ .
- Odredimo realizovanu vrednost  $z$ , statistike

$$Z = \sum_{m=1}^k \frac{(N_m - np_m)^2}{np_m}$$

koja meri ukupno odstupanje teorijskih od empirijskih frekvencija.

- Iz tablice  $\chi^2$  raspodele (za dovoljno veliko  $n$ , raspodela statistike  $Z$  se može aproksimirati  $\chi_{k-1}^2$  raspo delom) se o čita  $\chi_{k-1-s, 1-\alpha}^2$ , gde  $s$  predstavlja broj nepoznatih parametara raspodele, koje smo morali da prethodno ocenimo, obično metodom momenata.

- Odredimo teorijske verovatnoće pripadanja intervalu  $I_m$ :  
 $p_m = \mathbf{P}(X \in I_m) = F_0(b_m) - F_0(a_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ ,  
 pa je teorijski (pretpostavljeni) broj elemenata u intervalu  $I_m$  jednak  $np_m$ .
- Odredimo realizovanu vrednost  $z$ , statistike

$$Z = \sum_{m=1}^k \frac{(N_m - np_m)^2}{np_m}$$

koja meri ukupno odstupanje teorijskih od empirijskih frekvencija.

- Iz tablice  $\chi^2$  raspodele (za dovoljno veliko  $n$ , raspodela statistike  $Z$  se može aproksimirati  $\chi_{k-1}^2$  rasodelom) se očitava  $\chi_{k-1-s, 1-\alpha}^2$ , gde  $s$  predstavlja broj nepoznatih parametara raspodele, koje smo morali da prethodno ocenimo, obično metodom momenata.

Zaključujemo:

|                                  |                              |
|----------------------------------|------------------------------|
| $z < \chi_{k-1-s;1-\alpha}^2$    | $H_0(F = F_0)$ ne odbacujemo |
| $z \geq \chi_{k-1-s;1-\alpha}^2$ | $H_0(F = F_0)$ odbacujemo    |

**Napomena:** Ako se testira raspodela obeležja diskretnog tipa,  $I_m$  najčešće sadrži po jednu vrednost  $i_m$  i tada je  $p_m = \mathbf{P}(X = i_m)$ . U opštem slučaju,  $I_m$  sadrži konačano mnogo vrednosti  $i_1, i_2, \dots, i_{\ell_m}$ , pa je  $p_m = \sum \mathbf{P}(X = i_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, \ell_m$ .

Zaključujemo:

|                                  |                              |
|----------------------------------|------------------------------|
| $z < \chi_{k-1-s;1-\alpha}^2$    | $H_0(F = F_0)$ ne odbacujemo |
| $z \geq \chi_{k-1-s;1-\alpha}^2$ | $H_0(F = F_0)$ odbacujemo    |

**Napomena:** Ako se testira raspodela obeležja diskretnog tipa,  $I_m$  najčešće sadrži po jednu vrednost  $i_m$  i tada je  $p_m = \mathbf{P}(X = i_m)$ . U opštem slučaju,  $I_m$  sadrži konačano mnogo vrednosti  $i_1, i_2, \dots, i_{\ell_m}$ , pa je  $p_m = \sum \mathbf{P}(X = i_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, \ell_m$ .

## Primer

*Evidentiran je broj napravljenih rezervacija pre kupovine avio-karte 240 putnika i dobijeni su sledeći podaci:*

| broj rezervacija | 0  | 1  | 2  | 3  |
|------------------|----|----|----|----|
| broj putnika     | 35 | 77 | 85 | 43 |

$\chi^2$ -testom, sa pragom značajnosti  $\alpha = 0.05$ , proveriti hipotezu da broj napravljenih rezervacija ima sledeću raspodelu

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Rešenje: Uzorak je obima  $n = 35 + 77 + 85 + 43 = 240$ . Skup realnih brojeva podelićemo na  $k = 4$  disjunktna podintervala od kojih svaki sadrži po jedan od brojeva iz skupa  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

Frekvencija broja 0 je 35, broja 1 je 77, itd., dakle prvi interval sadrži 35 elemenata realizovanog uzorka, drugi 77, itd. U svakom od intervala sadržano je bar pet (35, 77, itd.) elemenata realizovanog uzorka. Broj nepoznatih parametara raspodele je  $s = 0$ .

Teorijske verovatnoće su:

$$p_1 = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{2}{6},$$

$$p_3 = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{2}{6} \text{ i } p_4 = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{6}.$$

Realizovana vrednost statistike  $Z$  je

$$z = \frac{(35 - 240 \cdot \frac{1}{6})^2}{240 \cdot \frac{1}{6}} + \frac{(77 - 240 \cdot \frac{2}{6})^2}{240 \cdot \frac{2}{6}} + \frac{(85 - 240 \cdot \frac{2}{6})^2}{240 \cdot \frac{2}{6}} + \frac{(43 - 240 \cdot \frac{1}{6})^2}{240 \cdot \frac{1}{6}} = 1.275.$$

Iz tablica  $\chi^2$  raspodele očitamo

$$\chi_{k-1-s;1-\alpha}^2 = \chi_{4-1-0;0.95}^2 = \chi_{3;0.95}^2 = 7.81.$$

Kako je  $z = 1.275 < 7.81$ , zaključujemo da uzorak ne protivreči hipotezi, tj. da sa pragom značajnosti  $\alpha = 0.05$  prihvatamo hipotezu da obeležje koje predstavlja broj napravljenih rezervacija ima datu raspodelu.