

Ponavljanje

Prethodno predavanje:

- pojam verovatnoće
- teorija verovatnoće
- slučajni događaji
- prostor događaja
- operacije na događajima

Sve ovo je potrebno da bi mogli da definišemo verovatnoću.

PREDAVANJE 2

DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Definicije verovatnoće

Neka je A **slučajni događaj** (A podskup skupa Ω).

- $P(A)$ predstavlja verovatnoću realizacije događaja A .
- Postoji više pokušaja definisanja verovatnoće; od klasične definicije (Laplasove) iz XVIII veka, do aksiomatske (Kolmogorovljeve) iz XX veka
- Aksiomatska definicija verovatnoće je jedina matematički potpuna i koristi se za razvoj teorije (npr. formulisanje i dokazivanje teorema)
- Ostale definicije su nepotpune; za njih se danas koristi termin **načini zadavanja verovatnoće**, i više se koriste u praksi.

Napomena: Oznaka P potiče od latinske reči *probabilitas*

Aksiomska definicija verovatnoće

Dajemo pojednostavljenu formulu definicije

(Aksiom verovatnoće). Neka je $\mathcal{F}$ σ -polje nad skupom Ω . Funkcija $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava uslove

- (i) $P(\Omega)=1$
- (ii) za sve $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$
- (iii) Za svaku konačnu ili prebrojivu familiju događaja iz $\mathcal{F}$, koji su disjunkt po parovima, važi:

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

je verovatnoća na $\mathcal{F}$.

Aksiomska definicija nam govori ŠTA je verovatnoća, ali ne i KAKO da je u konkretnom primeru izračunamo.

Klasična (Laplasova) verovatnoća

Neka se Ω konačan skup koji se sastoji od n elementarnih događaja koji su

- 1) disjunktni
- 2) jednakoverovatni.

Neka je događaj A podskup Ω koji se sastoji od m elementarnih događaja.

Tada je verovatnoća događaja A :

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad \left(= \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} \right)$$

Napomena: Ovaj način izračunavanja se zasniva na **prebrojavanju** ishoda, pa često koristimo **kombinatorne** tehnike prebrojavanja.

Klasična verovatnoća – primer:

Primer 1: Izračunati verovatnoću da pri jednom bacanju kockice padne broj veći od 4.

- Neka je A događaj „pao je broj veći od 4“, a Ω skup elementarnih događaja pri jednom bacanju kockice.
- Ω se sastoji od 6 elementarnih događaja koji su disjunktни (ne mogu pasti dva broja istovremeno) i jednakoverovatni.
- A je podskup Ω koji se sastoji od dva elementarna događaja (ω_5 i ω_6).

Dakle, uslovi za klasičnu verovatnoću su ispunjeni, $n=6$, $m=2$, i verovatnoća događaja A je:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Klasična verovatnoća – primer:

Primer 2: Izračunati verovatnoću da je slučajno odabrana tačka u krugu bliža centru nego kružnici.

- Ovaj primer, i njemu slične, **ne možemo** rešiti metodom klasične verovatnoće! Razlog tome je što se i Ω (sve tačke u krugu) i A (sve tačke koje su bliže centru nego kružnici) sastoje od **beskonačno** (neprebrojivo) mnogo elementarnih događaja.

Primer 3: Kolika je verovatnoća da će slučajno odabrani kupac u prodavnici kupiti mandarine?

- Ni ovaj primer, i njemu slične, **ne možemo** rešiti metodom klasične verovatnoće! Razlog tome je što se ne mogu definisati elementarni događaji koji će biti jednakoverovatni.

Dakle, klasična verovatnoća je jednostavna za primenu ali ima značajna ograničenja!

Geometrijska verovatnoća

Neka se Ω ograničen skup koji se sastoji od tačaka u n-dimenzionalnom prostoru (oblast).

Neka je događaj A podskup (podoblast) skupa Ω .

Tada je verovatnoća događaja A :

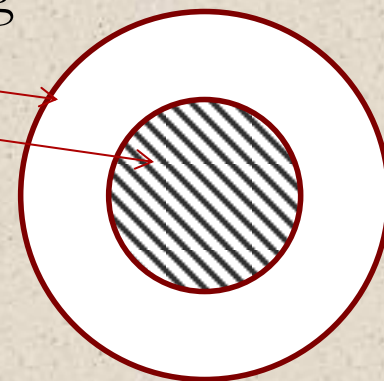
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \quad (= \frac{\text{mera oblasti } A}{\text{mera oblasti } \Omega})$$

Mera (u zavisnosti od dimenzije prostora) može biti dužina, površina, zapremina,...

Geometrijska verovatnoća – primer:

Primer 2: Izračunati verovatnoću da je slučajno odabrana tačka u krugu bliža centru nego kružnici.

- Neka je događaj A „slučajno odabrana tačka u krugu je bliža centru nego kružnici“.
- U ovom slučaju skup Ω čine sve tačke proizvoljnog kruga poluprečnika r , a podskup A čine sve tačke koncentričnog kruga poluprečnika $r/2$.
- Reč je o oblastima u ravni (dvodimenzionalnom prostoru), pa će odabrana mera biti **površina**.



$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{(\frac{r}{2})^2 \pi}{r^2 \pi} = \frac{1}{4}$$

Empirijska (statistička) verovatnoća

- Neka se verovatnosni eksperiment ponavlja n puta, i neka se događaj A realizovao k puta (od tih n).
- **Relativna frekvencija** događaja A je količnik k/n .
- Ukoliko bi više puta odredili relativnu frekvenciju, sa sve većim brojem ponavljanja eksperimenta, granična vrednost niza relativnih frekvencija bi bila **empirijska verovatnoća** događaja A .
- U praksi se umesto ove granične vrednosti koristi relativna frekvencija kao **aproksimacija** nepoznate verovatnoće (a što je veće n , aproksimacija je tim bolja).

Empirijska verovatnoća – primer:

Primer 3: Kolika je verovatnoća da će slučajno odabrani kupac u nekoj prodavnici kupiti mandarine?

- Ovu verovatnoću ne možemo tačno izračunati, ali je možemo aproksimirati relativnom frekvencijom.
- Ako su u nekoj prodavnici ustanovili da je tokom jednog dana bilo 329 kupaca (n) a da je njih 23 kupilo mandarine (k), onda je relativna frekvencija $23/329$.
- Kada bi ovakvu evidenciju vodili nedelju dana, ili mesec dana, ukupan broj kupaca (n) bi bio veći, pa bi aproksimacija bila bolja.

Empirijska verovatnoća je primer povezanosti verovatnoće i statistike, u kome statističke metode obezbeđuju input za verovatnoću.

OSOBYNE VEROVATNOĆE

Osobine verovatnoće

Navodimo, bez dokaza, neke osobine verovatnoće:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$
7. $P(A+B) = P(A) + P(B)$

- Dokazi osobina slede iz aksiomatske definicije verovatnoće
- Koriste se za računanje verovatnoća kompleksnijih događaja

Osobine verovatnoće – primer:

Primer 1. U jednom restoranu brze hrane je utvrđeno da je verovatnoća da slučajno odabrana mušterija uz pomfrit odabere kečap 0.7, da odabere majonez 0.25, a da odabere oba preliva 0.2. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:

a) Sl. odabrana mušterija je uzela pomfrit bez kečapa

Uvedimo oznake: K – odabran je kečap, M – odabran je majonez. Tada je iz postavke zadatka: $P(K)=0.7$, $P(M)=0.25$, $P(KM)=0.2$

Tada događaj „pomfrit bez kečapa“ možemo označiti sa $\bar{K}$ pa je $P(\bar{K}) = 1 - P(K) = 1 - 0.7 = 0.3$

Osobine verovatnoće – primer:

- b) Sl. odabrana mušterija je uzela pomfrit sa bar jednim od navedena dva preliva.

Događaj „pomfrit sa bar jednim prelivom tj. kečapom ili majonezom“ možemo označiti sa $K \cup M$, pa je

$$P(K \cup M) = P(K) + P(M) - P(KM) = 0.7 + 0.25 - 0.2 = 0.75$$

- c) Sl. odabrana mušterija je uzela pomfrit bez ijednog preliva

Događaj „pomfrit bez ijednog preliva“ je suprotan događaj od događaja „pomfrit sa bar jednim prelivom“ pa ga zato možemo označiti sa $\overline{K \cup M}$

$$P(\overline{K \cup M}) = 1 - P(K \cup M) = 1 - 0.75 = 0.25$$

Osobine verovatnoće – primer:

d) Sl. odabrana mušterija je uzela pomfrit samo sa majonezom

Događaj „pomfrit samo sa majonezom“ možemo označiti sa $M \setminus K$, pa je

$$P(M \setminus K) = P(M) - P(KM) = 0.25 - 0.2 = 0.05$$

e) Sl. odabrana mušterija je uzela pomfrit sa tačno jednim prelivom

Događaj „pomfrit sa tačno jednim prelivom“ se može preformulisati u „pomfrit ili samo sa K ili samo sa M “ i to su disjunktne događaji, ili u „pomfrit sa bar jednim prelivom, ali ne sa oba“ pa ga zato možemo izračunati na sledeća dva načina:

$$P(K \setminus M + M \setminus K) = P(K) - P(KM) + P(M) - P(KM) = 0.55$$

$$P((K \cup M) \setminus (KM)) = P(K \cup M) - P(KM) = 0.75 - 0.25 = 0.55$$

USLOVNA VEROVATNOĆA

Uslovna verovatnoća

- U nekim situacijama, dodatna informacija o nekom događaju može da utiče na verovatnoću njegove realizacije.
- Na primer, verovatnoća da neki tim pobedi AKO na poluvremenu gubi, nije ista kao verovatnoća da pobedi (procenjena pre početka utakmice)
- Zbog toga možemo razlikovati dve vrste verovatnoće:
 1. $P(A)$ – (obična) verovatnoća događaja A
 2. $P(A | B)$ – verovatnoća događaja A ako znamo da se realizovao B

$P(A | B)$ – uslovna verovatnoća događaja A pod uslovom B

A – glavni događaj B - uslov

- Čitamo „ver. od A ako B“ ili „ver. od A pod uslovom B“

Određivanje uslovne verovatnoće

- Uslovnu verovatnoću možemo računati na dva načina:
 1. Koristeći klasičnu verovatnoću, tako što ćemo informaciju o realizaciji događaja B (koji sada preuzima ulogu sigurnog događaja) uključiti u prebrojavanje mogućih ishoda i povoljnih ishoda.
 2. Ukoliko su poznate verovatnoće $P(B)$ – **verovatnoća uslova**, $P(B) > 0$, i $P(AB)$ – verovatnoća preseka, onda uslovnu verovatnoću možemo izračunati pomoću formule:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

uslov

- Osobina uslovne verovatnoće: $P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$
- Ali za komplement uslova ne važi! $P(A | \bar{B}) \neq 1 - P(A | B)$

Uslovna verovatnoća – primer:

Primer 1. Eksperiment se sastoji od bacanja jedne kockice za igru. Dati su događaji: A – pao je paran broj; B – pao je broj veći od 3; C – pao je broj 5, D – pao je broj manji od 17. Izračunati $P(A)$, $P(A | B)$, $P(A | C)$, $P(A | D)$.

- $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ← mogući ishodi {1,2,3,4,5,6}, povoljni {2,4,6}
- $P(A | B) = \frac{2}{3}$ ← mogući ishodi {4,5,6}, povoljni {4,6}
- $P(A | C) = \frac{0}{1} = 0$ ← mogući ishod {5}, povoljni {}
- $P(A | D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ← mogući ishodi {1,2,3,4,5,6}, povoljni {2,4,6}

Napomena: uslovna verovatnoća može biti manja od obične, veća od obične, ili jednaka običnoj verovatnoći.

Uslovna verovatnoća – primer:

Primer 2. U jednom restoranu brze hrane je utvrđeno da je verovatnoća da slučajno odabrana mušterija uz pomfrit odabere kečap 0.7, da odabere majonez 0.25, a da odabere oba preliva 0.2. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:

- a) Sl. odabrana mušterija je uz pomfrit odabrala majonez, ako je već odabrala kečap

$$P(M | K) = ?; P(M | K) = \frac{P(MK)}{P(K)} = \frac{0.2}{0.7} = 0.28$$

- b) Sl. odabrana mušterija je uz pomfrit odabrala kečap, ako je već odabrala majonez

$$P(K | M) = ?; P(K | M) = \frac{P(KM)}{P(M)} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8$$

- c) Sl. odabrana mušterija uz pomfrit nije odabrala majonez, ako je već odabrala kečap

$$P(\bar{M} | K) = ?; P(\bar{M} | K) = 1 - P(M | K) = 1 - 0.28 = 0.72$$

Nezavisnost događaja

- Videli smo da dodatna informacija (uslov) nekada utiče, a nekada ne utiče na promenu uslovne verovatnoće u odnosu na običnu
- Drugim rečima, neki događaji su uzajamno nezavisni, a neki nisu.
- **Nezavisni događaji** su oni kod kojih je verovatnoća njihove istovremene realizacije jednaka proizvodu njihovih verovatnoća.

Događaji A i B su nezavisni ako je $P(AB) = P(A)P(B)$

- Ukoliko su A i B nezavisni, važi i sledeće:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

tj. uslovna verovatnoća je jednaka običnoj.

- Ukoliko su A i B nezavisni, nezavisni su i sledeći parovi

$$A \text{ i } \bar{B}, \bar{A} \text{ i } B, \bar{A} \text{ i } \bar{B}.$$

Nezavisnost događaja - primer

Primer 1. Iz primera sa pomfritom proveriti da li su „odabir kečapa“ i „odabir majoneza“ nezavisni događaji.

Nezavisnost događaja K i M proveravamo tako što proveravamo da li važi jednakost $P(KM) = P(K)P(M)$.

$P(K)=0.7$, $P(M)=0.25$, $P(KM)=0.2$. Dakle, da li je $0.2=0.7*0.25$?

$$0.7*0.25 = 0.175 \neq 0.2$$

jednakost nije zadovoljena, pa odabir kečapa i odabir majoneza nisu nezavisni događaji.

Primer 2. Neka su A i B nezavisni događaji čije su verovatnoće

$P(A)=0.5$ i $P(B)=0.6$. Kolika je verovatnoća da se realizuje bar jedan od događaja A i B?

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - \underline{P(AB)} = P(A) + P(B) - \underline{P(A)P(B)} \\ &= 0.5 + 0.6 - 0.5*0.6 = 0.8. \end{aligned}$$