

Ponavljjanje

- Definicija verovatnoće (aksiomatska)
- Načini zadavanja (klasična, geometrijska, empirijska)
- Osobine verovatnoće
- Uslovna verovatnoća
- Nezavisnost događaja

PREDAVANJE 3

FORMULA TOTALNE VEROVATNOĆE

Totalna verovatnoća

Posmatrajmo ovakvu situaciju:

- Zanima nas verovatnoća događaja A , koji je posledica nekih događaja koji mu prethode, i koje zovemo **hipoteze**.
- Verovatnoća događaja A se menja u zavisnosti od toga koja mu je hipoteza prethodila (uslovna verovatnoća)
- Cilj je izračunati ukupnu verovatnoću događaja A , koja obuhvata sve moguće hipoteze (sve scenarije pod kojima se A može realizovati) $\Rightarrow$ **totalna verovatnoća**

Hipoteze

Totalnu verovatnoću događaja A možemo izračunati ukoliko hipoteze čine **potpun sistem događaja**

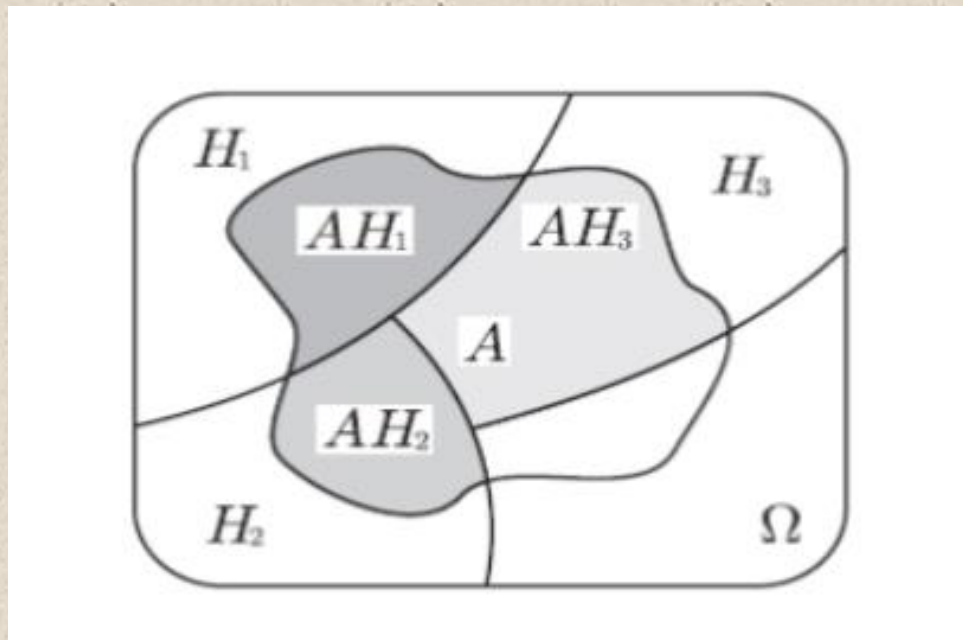
Skup događaja $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ je **potpun sistem događaja (PSD)** ako za sve događaje H_i, H_j iz tog skupa važi:

1. $P(H_i) > 0$ (mogući)
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ (disjunktni)
3. $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$ (iscrpni)

Neformalno, hipoteze treba da budu formulisane tako da se uvek sigurno realizuje (tačno) jedna od njih.

Formula totalne verovatnoće

Neka je u skupu elementarnih događaja dat potpun sistem događaja $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ i neki događaj A . Tada je:



$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$$

Formula totalne
verovatnoće

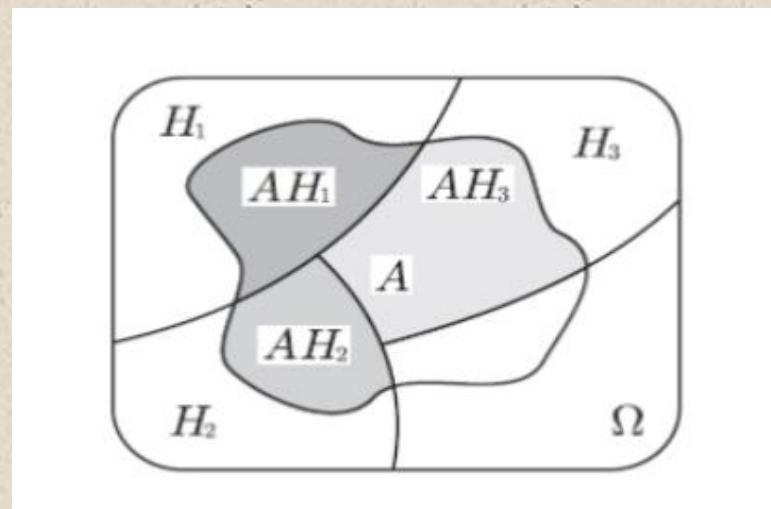
Formula totalne verovatnoće - dokaz

Kako je

$$A = AH_1 + \dots + AH_n$$

važi

$$P(A) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n).$$



Iz formule za uslovnu verovatnoću možemo izraziti

$$P(AH_i) = P(H_i) P(A | H_i) \text{ za } i=1, \dots, n$$

$$\text{pa je: } P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + \dots + P(H_n) P(A | H_n).$$

Dakle, totalnu verovatnoću događaja A možemo dobiti ukoliko znamo verovatnoće hipoteza, i uslovne verovatnoće događaja A ako mu je prethodila svaka od hipoteza.

Formula totalne verovatnoće - primer

Primer. Na ispit prosečno izlazi 70% studenata koji prvi put polažu, i 30% ostalih. Verovatnoća da student položi ako prvi put polaže je 0.25, a ako je već bio na ispitu 0.5.

Kolika je verovatnoća da slučajno odabrani student položi ispit?

I korak: formulacija događaja A i hipoteza

A – „slučajno odabrani student će položiti ispit“

H_1 – „student prvi put polaže“

H_2 – „student ne polaže prvi put“

Vidimo da su hipoteze moguće, međusobno isključive i iscrpne, dakle predstavljaju PSD.

Primer. Na ispit prosečno izlazi 70% studenata koji prvi put polažu, i 30% ostalih. Verovatnoća da student položi ako prvi put polaže je 0.25, a ako je već bio na ispitu 0.5.

Kolika je verovatnoća da slučajno odabrani student položi ispit?

II korak: verovatnoće hipoteza i uslovne verovatnoće

Iz postavke zadatka čitamo:

$$P(H_1)=0.7; P(H_2)=0.3; P(A | H_1)=0.25; P(A | H_2)=0.5$$

III korak: formula totalne verovatnoće

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2) P(A | H_2) \\ &= 0.7*0.25 + 0.3*0.5 = 0.325 \end{aligned}$$

Verovatnoća da slučajno odabrani student položi ispit je 0.325.

Napomena: Ako hipoteze čine PSD, zbir njihovih verovatnoća iznosi 1 ($P(H_1) + \dots + P(H_n) = 1$)

Bajesova formula

Posmatrajmo sada ovakvu situaciju:

- Znamo da događaj A zavisi od hipoteza $H_1, H_2, \dots, H_n$ i znamo da se A realizovao, ali ne znamo koja od hipoteza mu je prethodila
- Zanima nas **kolika je verovatnoća da mu je prethodila baš neka određena hipoteza H_k** , tj. $P(H_k | A) = ?$
- Ovu uslovnu verovatnoću dobijamo pomoću Bajesove formule gde je $P(A) > 0$ verovatnoća izračunata pomoću FTV.

$$P(H_k | A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)}, \quad k=1,2,\dots,n$$

Bajesova formula

Napomena: Ovo je rezultat engleskog matematičara, filozofa i sveštenika Tomasa Bejza (Thomas Bayes, 1701–1761). Pravilan izgovor: Bejzova formula.

Primer. Na ispit prosečno izlazi 70% studenata koji prvi put polažu, i 30% ostalih. Verovatnoća da student položi ako prvi put polaže je 0.25, a ako je već bio na ispitu 0.5. Ukoliko je student položio ispit, koliko je verovatno da je na njega izašao 1. put?

- Zanima nas verovatnoća da je student polagao 1. put (H_1), ako je poznato da je položio ispit (A) tj. $P(H_1 | A) = ?$
- Primenom Bajesove formule dobijamo:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.25*0.7}{0.325} = 0.54.$$

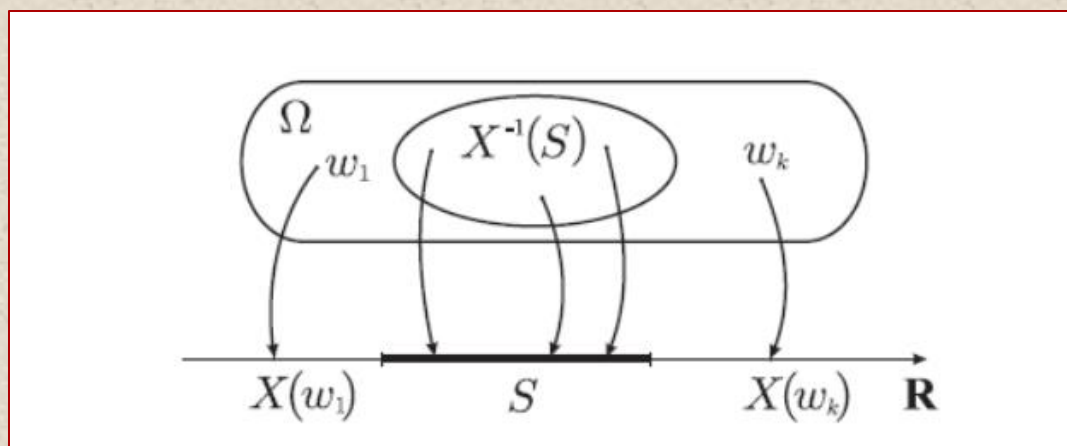
Napomena: **FTV se odnosi na budućnost** (događaj koji tek treba da se desi), a **BF na prošlost** (rekonstruiše verovatnoću uzroka događaja koji se već desio).

SLUČAJNE PROMENLJIVE

Pojam slučajne promenljive

- **Slučajna promenljiva** je matematički model kojim želimo **odjednom da opišemo ceo verovatnosni eksperiment** – sve njegove ishode i verovatnoće.
- Ishodima ćemo pridružiti numeričke vrednosti
- Slučajna promenljiva je funkcija koja preslikava Ω u $\mathbb{R}$ (i koja zadovoljava neke osobine)

Slučajne promenljive označavamo sa X ($Y, Z, \dots$)



Skup vrednosti

- **Skup vrednosti** slučajne promenljive X :

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ je slika nekog mogućeg ishoda}\}$$

- Oznake $X=x$ (slučajna pr. X uzima vrednost x) i $X < x$ ćemo koristiti za označavanje sledećih događaja:

$$(X=x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega)=x\}$$

$$(X < x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$$

Verovatnoću $P(X=x)$ označavamo sa $p(x)$

Podela slučajnih promenljivih

- Postoje dva osnovna tipa slučajnih promenljivih, u zavisnosti od broja elemenata (kardinalnosti) skupa vrednosti

R_X može biti:

1. Konačan (veličine n)
 2. Prebrojiv (kao $\mathbb{N}$)
 3. Neprebrojiv (kao $\mathbb{R}$)
- DISKRETNE sl.pr.**
- NEPREKIDNE sl.pr.**
-

- Postoje i slučajne promenljive kombinovanog tipa

Napomena: podela na **diskretne** / **neprekidne** strukture je centralna podela u matematici uopšte! (**algebra** / **analiza**)

Slučajne promenljive - primer

Primer 1. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih pisama prilikom 2 bacanja novčića.

Kada dva puta bacamo novčić mogući ishodi su PP, PG, GP, GG, pa broj palih pisama može biti od 0 do 2.

- Skup vrednosti: $R_X = \{0,1,2\}$
- Verovatnoće: $p(0) = P(\text{palo je 0 pisama}) = 0.25$, $p(1) = 0.5$, $p(2) = 0.25$

Ovo je diskretna slučajna promenljiva, videćemo da ima binomnu raspodelu.

Primer 2. Slučajna promenljiva Y predstavlja visinu slučajno odabranog odraslog živog čoveka.

- Ovo je primer neprekidne slučajne promenljive; vrednosti su svi realni brojevi iz intervala (54.6 cm, 251cm), a verovatnoće ćemo moći da odredimo pomoću gustine normalne raspodele.

DISKRETNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Zakon raspodele

- **Diskretne** slučajne promenljive su one koje imaju **konačan ili prebrojiv** skup vrednosti.
- Diskretne slučajne promenljive su određene svojim vrednostima, i njihovim verovatnoćama.
- Te informacije su sadržane u **zakonu raspodele**.

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{vrednosti} \\ \leftarrow \text{verovatnoće} \end{matrix}$$

- Šematski prikaz zakona raspodele slučajne promenljive X se sastoji od dve vrste:
 1. Prva vrsta sadrži sve vrednosti iz skupa vrednosti R_X
 2. Druga vrsta sadrži verovatnoću one vrednosti ispod koje je napisana.

Zakon raspodele

U svakom šematskom prikazu zakona raspodele važe sledeća pravila:

1. Vrednosti iz skupa vrednosti R_X se navode u rastućem poretku (tj. od najmanje do najveće, bez ponavljanja)

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

2. Verovatnoće svih vrednosti su pozitivne ($p(x_i) > 0$) i u zbiru iznose 1 (zato što su obuhvaćeni svi mogući ishodi veovatnosnog eksperimenta)

$$p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n) + \dots = 1$$

Zakon raspodele – primer

Primer: Verovatnosni eksperiment može da ima ishode 0, 2, 1 i -1. Poznato je da se 0 javlja u 50% slučajeva, 2 u 30% slučajeva, i da se vrednosti 1 i -1 javljaju jednakoverovatno. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja ishode ovog eksperimenta.

- Sortirane vrednosti: -1, 0, 1, 2.
- Verovatnoće: $P(X=0)=0.5$, $P(X=2)=0.3$, $P(X=1)=P(X=-1)=k$.
- Iz osobine zakona raspodele $p(-1)+p(0)+p(1)+p(2) = 1$ izračunavamo $0.5+0.3+k+k=1 \Rightarrow k=0.1$
- Zakon raspodele:

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Određivanje verovatnoća

- Zakon raspodele slučajne promenljive X sadrži **potpunu informaciju** o X , tj. o verovatnosnom eksperimentu koji je opisan putem X .
- **Verovatnoću događaja A** nad skupom elementarnih ishoda $\Omega = R_X$ možemo pročitati iz zakona raspodele.
- Postupak: u zakonu raspodele identifikujemo sve vrednosti x_i koje su sadržane u događaju A , i saberemo njihove verovatnoće:

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$$

Određivanje verovatnoća – primer

Primer: Iz eksperimenta iz prethodnog primera izračunati verovatnoće sledećih događaja: A – ishod je pozitivan broj, B – ishod je manji od $4/3$, C – ishod je neparan broj, D – ishod nije manji od 3, E – ishod je broj koji udvostručen i potom uvećan za 3 pripada intervalu $[3, 6]$.

Zakon raspodele $X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

- $P(A) = P(X > 0) = p(1) + p(2) = 0.1 + 0.3 = 0.4$
- $P(B) = P(X < 4/3) = p(-1) + p(0) + p(1) = 0.7$
- $P(C) = P(X \text{ je neparan}) = p(-1) + p(1) = 0.2$
- $P(D) = P(X \geq 3) = 0$
- $P(E) = P(3 \leq 2X + 3 \leq 6) = P(0 \leq 2X \leq 3) = P(0 \leq X \leq 3/2) = p(0) + p(1) = 0.6$

Nastaviće se...