Tejlorova teorema

Neka su funkcija f i svi njeni izvodi do reda n neprekidni nad zatvorenim intervalom $\bar{I}$ koji sadrži a i neka postoji izvod reda $n+1$ nad otvorenim intervalom I. Tada za svako x iz I važi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

gde je $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Za neko c između a i x.

Prva jednakost u Tejlorovoj teoremi je **Tejlorova formula**. Funkcija $R_n(x)$ je **ostatak reda *n*** ili **greška** aproksimacije funkcije *f* polinomom $P_n(x)$ nad *I*.

Kada je *a=0*, polinom se zove **Maklorenov polinom**.

Primer

Odrediti Tejlorov polinom četvrtog stepena za funkciju *f* u $x = 0$ (Maklorenov polinom), i iskoristiti ga za aproksimaciju vrednosti funkcije u $x = 0.2$.

$$f(x) = \cos(\pi x/2)$$

$$f(0) = \cos\frac{\pi x}{2}\bigg|_{x=0} = 1$$

$$f'(0) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\bigg|_{x=0} = 0$$

$$f''(0) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi x}{2}\bigg|_{x=0} = -\frac{\pi^2}{4}$$

Primer

Odrediti Tejlorov polinom četvrtog stepena za funkciju f u x = 0, i iskoristiti ga za aproksimaciju vrednosti funkcije u x = 0.2.

$$f\left(x\right)=\cos\left(\pi x/2\right)$$

$$f'''\left(0\right)=\frac{\pi^3}{8}\sin\frac{\pi x}{2}\bigg|_{x=0}=0$$

$$f^{(4)}\left(0\right)=\frac{\pi^4}{16}\cos\frac{\pi x}{2}\bigg|_{x=0}=\frac{\pi^4}{16}$$

$$P_4\left(x\right)=1+0x+\frac{-\pi^2/4}{2}x^2+0x^3+\frac{\pi^4/16}{4!}x^4$$

Primer

Odrediti Tejlorov polinom četvrtog stepena za funkciju f u $x = 0$, i iskoristiti ga za aproksimaciju vrednosti funkcije u $x = 0.2$.

$$f(x) = \cos(\pi x/2)$$

$$P_4(x) = 1 + 0x + \frac{-\pi^2/4}{2}x^2 + 0x^3 + \frac{\pi^4/16}{4!}x^4$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{8}x^2 + \frac{\pi^4}{384}x^4$$

$$f(0.2) \approx P_4(0.2) \approx 0.951$$