UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Irena Čomić, Ljiljana Pavlović

Funkcije više promenljivih

Novi Sad, 2000.

7 Totalni diferencijali višeg reda

Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u nekoj okolini tačke (x, y). Drugi totalni diferencijal funkcije f (u oznaci $d^2 f$ ili $d^2 z$) je totalni diferencijal prvog totalnog diferencijala (vidi (4.9)), tj.:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = \tfrac{\partial}{\partial x}(df)dx + \tfrac{\partial}{\partial y}(df)dy \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x}(\tfrac{\partial f}{\partial x}dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}dy)dx + \tfrac{\partial}{\partial y}(\tfrac{\partial f}{\partial x}dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}dy)dy \\ &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2, \end{aligned}$$

jer je

$$\frac{\partial}{\partial x}(dx) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(dx) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(dy) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(dy) = 0.$$

Tako imamo

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

što formalno zapisujemo u obliku:

$$d^2 f = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 f$$

$(dx^2 = (dx)^2, dy^2 = (dy)^2)$.

Kada su funkcija f i svi njeni parcijalni izvodi do zaključno trećeg reda neprekidne funkcije u okolini tačke (x, y), onda je u toj tački treći totalni diferencijal odredjen sa:

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3,$$

odnosno formalno u obliku binomne formule:

$$d^3 f(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^3 f|_{(x,y)}.$$

Slično se dobija

$$d^n f(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n f|_{(x,y)}.$$

8 Tejlorova formula za funkcije dve promenljive

Neka su funkcija f i svi njeni parcijalni izvodi do zaključno n-tog reda neprekidne funkcije u nekoj oblasti $D \subset \mathcal{R}^{\in}$ i neka tačke (x, y) i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pripadaju toj oblasti.

Posmatramo pomoćnu funkciju

$$F(t) = f(x + t\Delta x, y + t\Delta y) \tag{8.1}$$

koja je definisana za svako $t \in [0, 1]$ i

$$F(0) = f(x, y), \quad F(1) = f(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Maklorenov [Maclaurin] obrazac za funkciju $F(t)$ glasi:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \ldots \tag{8.2}$$

$$+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(\theta t)$$

$$0 < \theta < 1.$$

Za $t = 1$ (8.2) postaje

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots \tag{8.3}$$

$$+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}}{n!}(\theta).$$

Kako je

$$F(t) = f(u(t), v(t)), \quad u(t) = x + t\Delta x, \quad v(t) = y + t\Delta y,$$

to važi

$$F'(t) = f'_u u'_t + f'_v v'_t = f'_u \Delta x + f'_v \Delta y$$

$(u'_t = \Delta x, \quad v'_t = \Delta y)$ i

$$F'(0) = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = (\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y) f|_{(x,y)}$$

(jer je $u(0) = x, \quad v(0) = y$).

Dalje je

$$F''(t) = f''_{uu}(u'_t)^2 + f''_{vu}v'_tu'_t + f'_uu''_t + f'_vv''_t + f''_{uv}u'_tv'_t + f''_{vv}(v'_t)^2.$$

Kako je $u''_t = 0$ i $v''_t = 0$, to imamo

$$F''(t) = f''_{uu}(\Delta x)^2 + 2f''_{uv}\Delta x\Delta y + f''_{vv}(\Delta y)^2$$

i

$$\begin{aligned} F''(0) &= f''_{xx}(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}\Delta x\Delta y + f''_{yy}(\Delta y)^2 \\ &= (\tfrac{\partial}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial}{\partial y}\Delta y)^2 f|_{(x,y)}. \end{aligned}$$

Slično se dobija da je

$$F^{(n-1)}(0) = (\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y)^{n-1} f|_{(x,y)},$$

$$F^{n}(\theta) = (\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y)^{n} f|_{(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}.$$

Uvrštavajući vrednosti za $F(1), F(0), F'(0), F''(0), ..., F^{(n-1)}(0), F^{(n)}(\theta)$ u (8.3), dobijamo:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) &= f(x,y) + (\tfrac{\partial}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial}{\partial y}\Delta y) f|_{(x,y)} \\ &+ \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial}{\partial y}\Delta y)^2 f|_{(x,y)} + ... \qquad (8.4) \\ &+ \tfrac{1}{(n-1)!}(\tfrac{\partial}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial}{\partial y}\Delta y)^{n-1} f|_{(x,y)} + R_n, \end{aligned}$$

gde je

$$R_n = \frac{1}{n!}(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y)^n f|_{(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}.$$

Kako su priraštaji nezavisno promenljivih jednaki njihovim diferencijalima, tj.

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y,$$

(8.4) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} f(x+dx, y+dy) &= f(x,y) + df(x,y) + \tfrac{1}{2!}d^2 f(x,y) + ... \\ &+ \; + \tfrac{1}{(n-1)!}d^{n-1} f(x,y) + \tfrac{1}{(n)!}d^n f(x+\theta dx, y+\theta dy). \\ & \qquad (8.5) \end{aligned}$$

Kako je

$$\Delta f(x,y) = f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y) - f(x,y),$$

onda za $n = 3$ (8.5) možemo pisati u obliku:

$$\Delta f(x,y) = df(x,y) + \frac{1}{2!}d^2 f(x,y) + R_3, \tag{8.6}$$

gde je $R_3 = \frac{1}{3!}d^3 f(x+\theta dx, y+\theta dy)$.

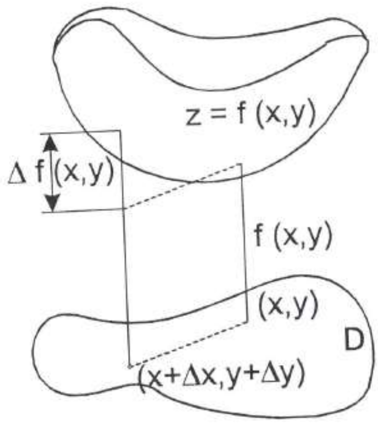
Δz – TOTALNI PRIRAŠTAJ

9 Ekstremne vrednosti funkcija dve promenljive

2013.

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ lok.

Definicija 9.1 *Funkcija $z = f(x,y)$ definisana u oblasti $D \subset \mathcal{R}^2$ ima ekstrem u tački (x_0, y_0) ako je $\Delta f(x,y)$ istog znaka za sve dovoljno male vrednosti Δx i Δy $((x_0, y_0), (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D)$, i to maksimum ako je $\Delta f < 0$, a minimum za $\Delta f > 0$.*



Slika 7

Teorema 9.1 *Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x,y)$ ima ekstrem u tački $(x_0, y_0) \in D$ jeste da je*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Dokaz. Ako funkcija $f(x, y)$ ima ekstrem u (x_0, y_0), onda i krive $z = f(x_0, y)$, $x = x_0$ i $z = f(x, y_0)$, $y = y_0$ imaju ekstrem u tački (x_0, y_0). Potreban uslov da diferencijabilna funkcija jedne promenljive ima ekstrem u nekoj tački jeste da je u toj tački prvi izvod jednak nuli, tj.

$$z_y'(x_0, y_0) = f_y'(x_0, y)|_{(y=y_0)} = f_y'(x_0, y_0) = 0,$$

$$z_x'(x_0, y_0) = f_x'(x, y_0)|_{(x=x_0)} = f_x'(x_0, y_0) = 0.\diamond$$

ξ102

Teorema 9.2 *Ako su svi parcijalni izvodi trećeg reda funkcije $f(x, y)$ neprekidni u nekoj oblasti D, $M_0(x_0, y_0)$ unutrašnja tačka te oblasti, i ako je $f_x'(x_0, y_0) = 0$, $f_y'(x_0, y_0) = 0$, onda u tački M_0 funkcija $f(x, y)$*

1) ima maksimum za $rt - s^2 > 0$ *i* $r < 0$,

2) ima minimum za $rt - s^2 > 0$ *i* $r > 0$,

3) nema ekstrema za $rt - s^2 < 0$,

4) potrebna su dalja ispitivanja za $rt - s^2 = 0$,

gde je

$$r = f_{xx}''(x_0, y_0), \quad s = f_{xy}''(x_0, y_0), \quad t = f_{yy}''(x_0, y_0). \tag{9.1}$$

Dokaz. Kako je po pretpostavci u tački M_0 $f_x' = 0$ i $f_y' = 0$, to važi

$$df = f_x'dx + f_y'dy = 0,$$

pa se (8.6) ovom slučaju svodi na

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + R_3(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Za dovoljno malo dx i dy ostatak R_3 nema uticaja na znak od Δf, pa se znak od Δf poklapa sa znakom od $d^2 f$. Kako je sada

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}(f_{xx}''dx^2 + 2f_{xy}''dxdy + f_{yy}''dy^2)|_{(x_0,y_0)} + R_3,$$

koristeći oznake (9.1), imamo

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) + R_3$$

$$= \frac{1}{2r}[(r^2dx^2 + 2srdxdy + s^2dy^2) + (rt - s^2)dy^2] + R_3,$$

tj.

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2r}[(rdx + sdy)^2 + (rt - s^2)dy^2)] + R_3. \qquad (9.2)$$

Iz (9.2) se vidi da je

$$\Delta f(x_0, y_0) > 0 \quad \text{za} \quad rt - s^2 > 0 \quad \text{i} \quad r > 0,$$

za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$ i tada $f(x, y)$ ima minimum u M_0;

$$\Delta f(x_0, y_0) < 0 \quad \text{za} \quad rt - s^2 > 0 \quad \text{i } r < 0,$$

za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$ i tada $f(x, y)$ ima maksimum u M_0;

Neka je

$$rt - s^2 < 0 \quad \text{i} \quad r \neq 0.$$

Kako su r, t i s fiksni brojevi odredjeni sa (9.1), za neke pravce $(dx, dy) \neq (0, 0)$ izraz u srednjoj zagradi formule (9.2) je pozitivan a za neke negativan bez obzira na znak od r, što znači da za $rt - s^2 < 0$, $\Delta f(x_0, y_0)$ nema stalan znak, tako da u tački $M_0(x_0, y_0)$ funkcija $f(x, y)$ nema ekstrem.

Ako je

$$rt - s^2 = 0,$$

onda (9.2) postaje

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2r}(rdx + sdy)^2 + R_3.$$

Za pravac $(dx, dy) = (-s, r)$ je $\Delta f(x_0, y_0) = R_3$, pa su potrebna dalja ispitivanja trećeg diferencijala (što izlazi iz okvira ovog kursa). ◇

2006

Zadatak 9.1 Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Rešenje. Koordinate stacionarnih tačaka zadovoljavaju jednačine

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0,$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Realna rešenja datog sistema jednačina su

$$M_1(x_1, y_1) = (1, 1) \quad \text{i} \quad M_2(x_2, y_2) = (0, 0).$$

Kako je

$$r = z''_{xx} = 6x, \quad s = z''_{xy} = -3, \quad t = z''_{yy} = 6y,$$

to je u M_1

$$r = 6 > 0, \quad rt - s^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0,$$

pa u M_1 funkcija z ima minimum ($z_{min} = -1$), dok je u M_2

$$r = 0, \quad rt - s^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0,$$

pa u M_2 funkcija z nema ekstrem.□

+ pomoću TOT. DIF. DODATAK (*)

Zadatak 9.2 Naći ekstremne vrednosti funkcije

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Rešenje. Koordinate stacionarnih tačaka nalazimo rešavajući sistem

$$z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0$$

$$z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0,$$

tj.

$$\begin{array}{rcl} 2x^3 & = & x + y \\ 2y^3 & = & x + y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 \Rightarrow x = y \\ 2y^3 & - & 2y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0. \end{array}$$

Rešenja ovog sistema su tačke $M_1(1,1), M_2(-1,-1), M_3(0,0)$.

$$r = z''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad s = z''_{xy} = -2, \quad t = z''_{yy} = 12y^2 - 2$$

i u tačkama M_1 i M_2

$$r = 10 > 0, \quad rt - s^2 = 96 > 0,$$

pa z u M_1 i M_2 ima minimum, $z_{min} = -2$.
U tački $M_3, rt - s^2 = 0$, pa ispitujemo dalje predznak funkcije z u okolini M_3. Na primer, na pravi $y = 0$ je z negativno:

$$z = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0 \quad \text{za} \quad 0 < x < 1 \quad \text{i} \quad -1 < x < 0,$$

dok je na pravi $y = -x$ z pozitivno:

$$z = 2x^4 > 0 \quad \text{za} \quad x > 0.$$

Kako je $z(M_3) = 0$ i u okolini tačke M_3 menja znak, u toj tački nema ekstrema.

10 Ekstremne vrednosti funkcija više promenljivih

Posmatramo funkciju n promenljivih $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definisanu na nekoj oblasti $D \subset \mathcal{R}^n$. Neka tačke

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \text{i} \quad (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)$$

pripadaju oblasti D. Parcijalni izvodi f'_{x_i}, $i = 1, 2, ..., n$ su definisani sa (3.3) i (3.4).

Može se dokazati, slično kao i za funkcije dve promenljive, da važi

Teorema 10.1 *Ako su funkcija f i svi njeni parcijalni izvodi do zaključno m-tog reda neprekidne funkcije u nekoj okolini tačke $M_0(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $M(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \in U$ (U pripada oblasti definisanosti funkcije f), onda važi Tejlorova [Taylor] formula:*

$$f(M) - f(M_0) = \Delta f = df(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + ... + \frac{d^{m-1} f(M_0)}{(m-1)!} + \frac{d^m f(\bar{M})}{m!}$$

gde je $\bar{M}$ je tačka na duži M_0 i M

$$d^k f(M_0) = (\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n)^k f(M_0).$$

Teorema 10.2 *Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ u nekoj tački $M_0(x_1, x_2, ..., x_n)$ ima ekstrem je da važi*

$$f'_{x_1}(M_0) = 0, \;\; f'_{x_2}(M_0) = 0, ..., \;\; f'_{x_n}(M_0) = 0,$$

tj. da je

$$df(M_0) = f'_{x_1}(M_0) dx_1 + f'_{x_2}(M_0) dx_2 + ... + f'_{x_n}(M_0) dx_n = 0.$$

Dokaz je sličan dokazu teoreme za funkcije dve promenljive.

Tačka M_0 za koju važe ove jednakosti zove se stacionarna tačka funkcije f.

12'

Teorema 10.3 *Funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, čiji su svi parcijalni izvodi do zaključno trećeg reda neprekidni u okolini neke stacionarne tačke M_0, će u toj tački imati:*