LINEARNO PROGRAMIRANJE

(P1)

LITERATURA:

1) ZORAN STOJAKOVIĆ, DRAGOSLAV HERCEG,
LINEARNA ALGEBRA I ANALITIČKA GEOMETRIJA,
XVI GLAVA, PMF NOVI SAD, 2005.

2) ROBERT J. VANDERBEI, LINEAR PROGRAMMING,
5TH EDITION, SPRINGER, 2020.

(*) SISTEMI LINEARNIH NEJEDNAČINA

SISTEM OD m NEJEDNAČINA I n NEPOZNATIH:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \qquad (m \times n)$$

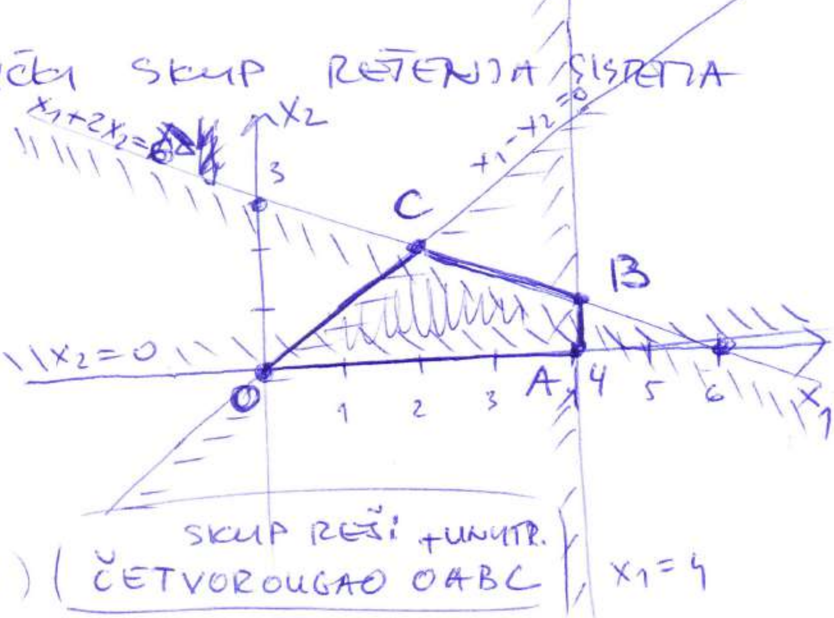
GDE SU $x_1, x_2, \dots, x_n$ NEPOZNATE, A a_{ij} I b_i REALNI BROJEVI.

REŠENJE SISTEMA JE SVAKA UREĐENA n-TORKA $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ KOJA ZADOVOLJAVA SVAKU NEJEDNAČINU SISTEMA. SVA REŠENJA SISTEMA OBRAZUJU SKUP KOJI NAZIVAMO SKUP REŠ. ~~NE~~ SIST. NEJEDNAČINA.

PRIMER 1 ODREDITI GRAFIČKI SKUP REŠENJA SISTEMA

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_1 &\le 4 \\ x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

$x_1 - x_2 = 0$
$x_1 = x_2$



$x_1 + 2x_2 = 6 \to$ PRAVA

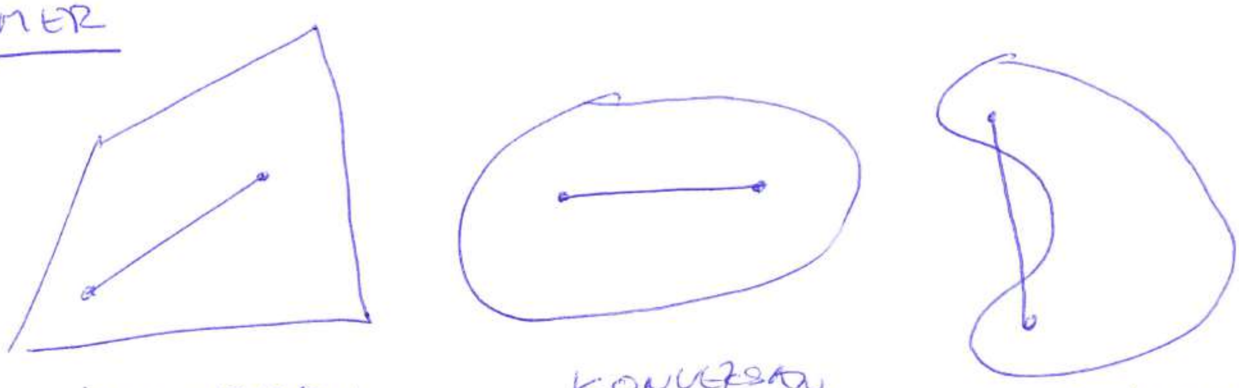
$x_1 = 0 \to x_2 = 3$; $x_2 = 0 \to x_1 = 6$

SKUP REŠ: ČETVOROUGAO OABC + UNUTR.

$x_1 = 4$

DEF. SKUP TAČAKA S NAZIVA SE KONVEKSAN (P2) AKO ZA SVAKE DVE TAČKE SKUPA S SVE TAČKE DUŽI ODREĐENE TIM TAČKAMA TAKOĐE PRIPADAJU S. SVAKI SKUP KOJI SADRŽI MANJE OD DVE TAČKE JE KONVEKSAN.

PRIMER



KONVEKSAN KONVEKSAN NIJE KONVEKSAN

(T) PRESEK KONVEKSNIH SKUPOVA JE KONVEKSAN SKUP.

(T) SVAKA POLURAVAN JE KONVEKSAN SKUP.

(T) PRESEK POLURAVNI JE KONVEKSAN SKUP. PRESEK n-DIMENZIONALNIH POLUPROSTORA JE KONVEKSAN SKUP.

DEF. SKUP P TAČAKA ČIJE KOORDINATE ZADOVOLJAVAJU SISTEM NEJEDNAČINA

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$$

NAZIVAMO POLIEDARSKI KONVEKSAN SKUP. TAČKA KOJA KOJA PRIPADA PRESEKU GRANICA n POLUPROSTORA SISTEMA NAZIVA SE EKSTREMNA TAČKA SKUPA P. U SLUČAJU DA $n=2$, POLIEDARSKI KONVEKSAN SKUP NAZIVAMO POLIGONALNI KONVEKSAN SKUP.

(P3)

U PRIMERU 1 ČETVOROUGAO OABC I
NJEGOVA UNUTRAŠNJOST PREDSTAVLJAJU
POLIGONALNI KONVEKSAN SKUP REŠENJA.
TEMENA O, A, B I C PREDSTAVLJAJU EKSTREMNE TAČKE.

<u>DEF.</u> FUNKCIJU $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DEFINISANU SA

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

GDE SU $c_1, c_2, \dots, c_n$ REALNI BROJEVI, NAZIVAMO
<u>LINEARNA FUNKCIJA</u>.

. ZA LINEARNU FUNKCIJU f VAŽI:

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y), \quad X, Y \in \mathbb{R}^n, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

LINEARNA FUNKCIJA, GRAFIČKA METODA

POSMATRAJMO SLEDEĆI PROBLEM:
NAĆI MAKSIMUM ILI MINIMUM LINEARNE FUNK.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

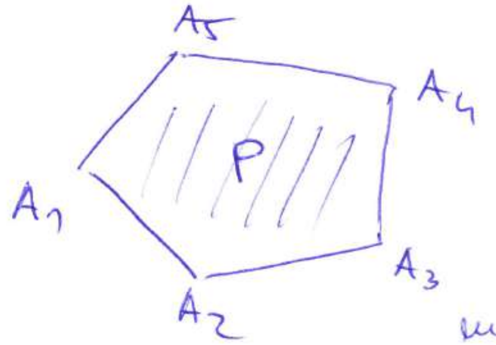
GDE NEPOZNATE ZADOVOLJAVAJU SISTEM NEJEDNAČINA

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\le b_m, \end{aligned}$$

TJ. NAD POLIEDSKOM KONVEKSNOM ~~SKUPOM~~ SKUPOM.

AKO LINEARNA FUNKCIJA f IMA MAKSIMUM ILI MINIMUM NA POLIEDARSKOM KONVEKSNOM SKUPU P, ONDA f POSTIŽE TAJ MAKSIMUM ILI MINIMUM U EKSTREMNIM TAČKAMA P.

(T) NEKA JE f LINEARNA FUNKCIJA DEFINISANA NA OGRANIČENOM POLIEDARSKOM KONVEKSNOM SKUPU (POLIGONALNOM KONV. SKUPU), TADA f POSTIŽE SVOJU MAKSIMALNU I MINIMALNU VREDNOST U NEKIM OD EKSTREMNIH TAČAKA TOG SKUPA. (P4)



$(n=2)$

$A_1, A_2 A_3, A_4$ I A_5 KANDIDATI ZA EKSTREMNU VREDNOST FUNKCIJE f

$$\max_P f = f(A_i) \quad i,j \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\min_P f = f(A_j)$$

(T) NEKA JE P NEOGRANIČEN POLIEDARSKI KONVEKSAN SKUP (POLIGONALNI KONVEKSAN SKUP). AKO LINEARNA FUNKCIJA POSTIŽE MAKSIMUM (ILI MINIMUM) NA SKUPU P, ONDA JE TAJ MAKSIMUM (MINIMUM) DOSTIGNUT U EKSTREMNOJ TAČKI.

- <u>GRAFIČKA METODA</u> ZA NALAŽENJE EKSTREMA LINEARNE FUNKCIJE

KORISTI SE ZA REŠAVANJE <u>2D</u> (2 NEPOZNATE) I 3D (3 NEPOZNATE) PROBLEMA ZA NALAŽENJE EKSTREMA.

1) NACRTATI U KOORDINATNOM SISTEMU SKUP REŠENJA DEFINISAN NEJEDNAČINAMA, TJ. POLIGONALNI KONVEKSAN SKUP P (ILI DOPUSTIV SKUP)

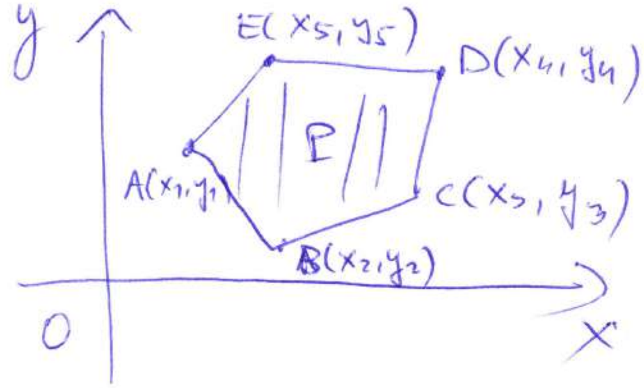
2) NAĆI EKSTREMNE TAČKE SKUPA P (TEMENA POLIGONA)

3) IZRAČUNATI VREDNOSTI FUNKCIJE f U SVAKOJ OD EKSTREMNIH TAČAKA.

4) MAKSIMUM VREDNOSTI FUNKCIJE f IZRAČUNATIH POD 3) JE MAKSIMUM f NA CELOM SKUPU P, A MINIMUM IZRAČUNATIH VREDNOSTI POD 2) JE MINIMUM f NAD P.

PRIMER

(P5)



$f(A) =$

$f(B) =$

$f(C) =$

$f(D) =$

$f(E) =$

$\max\limits_{P} f = \max$

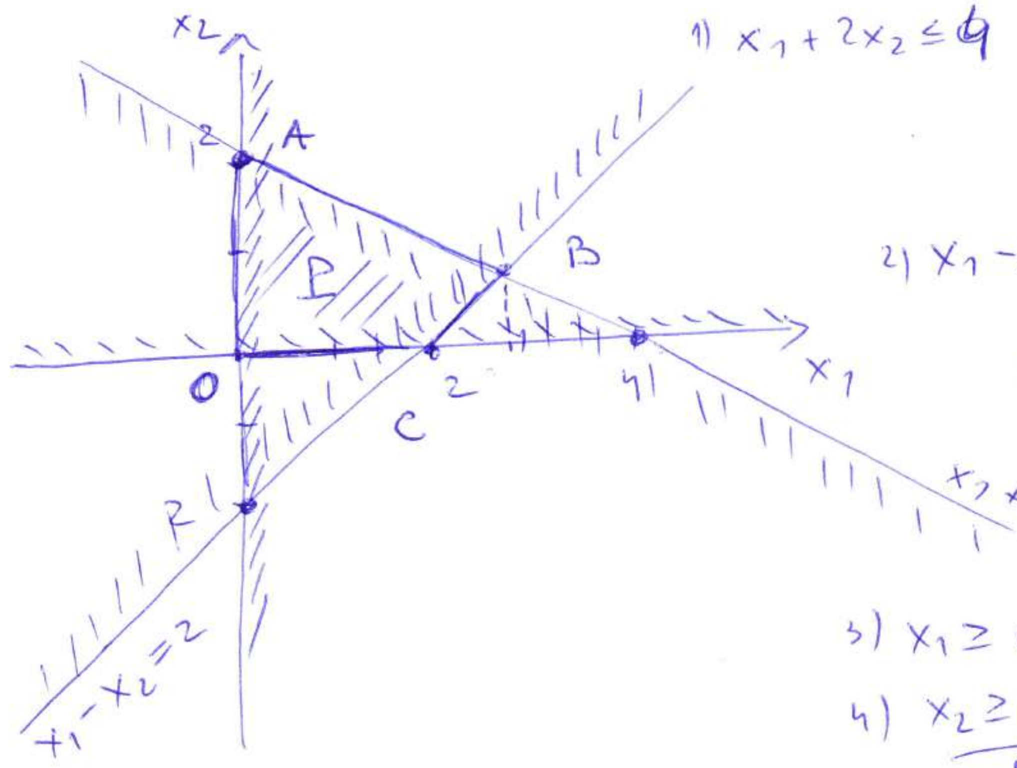
$$\max_{P} f = \max\{ f(x_i, y_i) \mid i = 1,2,3,4,5 \}$$

$$\min_{P} f = \min\{ f(x_i, y_i) \mid i = 1,2,3,4,5 \}$$

PRIMER ODREDITI MAKSIMUM I MINIMUM LINEARNE FUNKCIJE $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, AKO NEPOZNATE ZADOVOLJAVAJU SLEDEĆI SISTEM NEJEDNAČINA:

$$x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 - x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0.$$

REŠ.



1) $x_1 + 2x_2 \le 4 \to x_1 + 2x_2 = 4$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$x_2 = 0,\ x_1 = 4$

2) $x_1 - x_2 \le 2$

$\Downarrow$

$x_1 - x_2 = 2$

$x_1 = 0,\ x_2 = -2$

$x_2 = 0,\ x_1 = 2$

3) $x_1 \ge 0$

4) $x_2 \ge 0$

B

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{8}{3} \\ x_2 &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

EKSTREMNE TAČKE SU A, B, C I O

$A(0,2)$, $B(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$, $C(2,0)$, $O(0,0)$

$$f(A) = f(0,2) = 2\cdot 0 + 2 = 2$$
$$f(B) = f\left(\tfrac{8}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = 6$$
$$f(C) = f(2,0) = 4$$
$$f(O) = f(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \max\limits_{P} f = 6 = f(B) \\ \min\limits_{P} f = 0 = f(O) \end{cases}}$$

<u>DEF</u> OPŠTI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA:
NAĆI MAKSIMUM (ILI MINIMUM) LINEARNE FUNKCIJE

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

TAKO DA NEPOZNATE ZADOVOLJAVAJU SLEDEĆI SISTEM NEJEDNAČINA

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0. \end{cases}$$

SVAKO REŠENJE SISTEMA (1) ZA KOJE f DOSTIŽE MAKSIMUM (ILI MINIMUM) NAZIVAMO <u>OPTIMALNO REŠENJE</u>. SVAKO REŠENJE SISTEMA (1) NAZIVA SE <u>DOPUSTIVO REŠENJE</u>.