⊛ OPŠTI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA

- NAĆI MAKSIMUM (ILI MINIMUM) LINEARNE FUNK.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

TAKO DA NEPOZNATE ZADOVOLJAVAJU SISTEM NEJEDNAČINA

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_n \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

SVAKO REŠ. SISTEMA (1) ZA KOJE f DOSTIŽE MAKSIMUM (ILI MINIMUM) NAZIVA SE <u>OPTIMALNO REŠ.</u>

SVAKO REŠENJE SISTEMA (1) NAZIVA SE <u>DOPUSTIVO REŠ.</u>

JEDNA OD METODA ZA REŠAVANJE OVOG PROBLEMA JE GRAFIČKA METODA, GDE TREBA ODREDITI SVE EKSTREMNE TAČKE POLIEDARSKOG KONVEKSNOG SKUPA. ~~REŠENJA~~. TO MOŽE BITI OBIMAN ZADATAK ...

- ~~NJE~~ NEJEDNAČINA

$$(*) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$$ SE MOŽE ZAMENITI JEDNAČINOM

$$\downarrow$$

$$(**) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$ GDE ZAHTEVAMO DA $x_{n+1} \geq 0$.

x_{n+1} JE <u>DOPUNSKA NEPOZNATA</u>

MOŽE SE POKAZATI DA JE $(*)$ „$\Longleftrightarrow$" $(**)$.

P2

PRIMER. SISTEM NEJEDNAČINA

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 \le 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

SE MOŽE ZAMENITI SA SLEDEĆIM „EKVIVALENTNIM"

SISTEMOM JEDNAČINA

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0 .$$

- OPŠTI OBLIK LIN. PROG. SE MOŽE ZAPISATI NA SLEDEĆI NAČIN: DAT JE SISTEM JEDNAČINA:

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0, \dots, x_{n+m} \ge 0 \end{cases}$$

I DATA JE LINEARNA FUNKCIJA

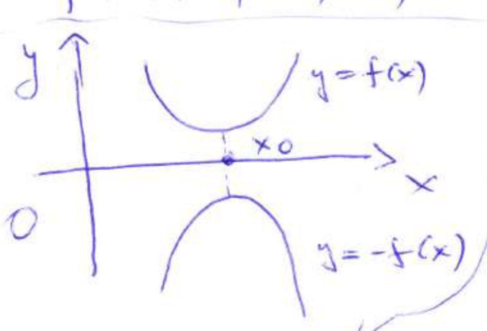
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = $$
$$= (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0\cdot x_{n+1} + \dots + 0\cdot x_{n+m}).$$

SVAKO REŠENJE SISTEMA (2) JE DOPUSTIVO REŠENJE.

SVAKO DOPUSTIVO REŠ. ZA KOJE f POSTIŽE MAKSIMUM (ILI MINIMUM) JE OPTIMALNO REŠ.

• S'OBZIROM DA VAŽI:

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\max\left(-f(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)$$



$$\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{x} f(x) = f(x_0) \\ \max\limits_{x} -f(x) = -f(x_0) \end{array}\right.$$

$$\min_{x} f(x) = -\max_{x} -f(x)$$

DOVOLJNO JE ~~POSMATRATI~~ ODREDITI POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE MAKSIMUMA, JER MINIMUM SE MOŽE DOBITI IZ MAKSIMUMA FUNKCIJE $-f$.

• BAZIČNE I SLOBODNE PROM. SISTEMA JEDNAČINA

POSMATRAJMO SISTEM (PRIMER) NEODREĐENOG TIPA

$$(*)\ \left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right. .$$

REŠAVANJEM OVOG SISTEMA PO x_1 I x_2 DOBIJAMO

$$x_1 = -5x_3 + x_4 - 1$$
$$x_2 = -3x_3 + 2x_4 - 3,$$

GDE ZA PROMENLJIVE x_1 I x_2 KAŽEMO DA SU BAZIČNE, A ZA ~~x_3 x_4~~ x_3 I x_4 DA SU SLOBODNE PROM. REŠENJE $(-1, -3, 0, 0)$ ~~je~~ JE JEDNO MOGUĆE BAZIČNO REŠENJE (SLOBODNE PROM. $= 0$) POLAZNOG SISTEMA (*). PRIMETIMO DA POLAZNI SISTEM SE MOŽE TRANSFORMISATI I NA DRUGI NAČIN:

$$\begin{array}{l} x_2 = 2x_1 + 7x_3 - 1 \\ x_4 = x_1 + 5x_3 + 1 \end{array} \longrightarrow (0, -1, 0, 1) \text{ JE NEKO DRUGO BAZIČNO REŠ.}$$

(*) BAZIČNO DOPUSTIVO REŠENJE (P4)

POSMATRAĆEMO SLEDEĆI OPŠTI PROBLEM L. P.

NEKA JE DAT SISTEM JEDNAČINA:

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \\ b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \dots, b_m \geq 0. \end{cases}$$

I NEKA JE DATA LINEARNA FUNKCIJA

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

NAĆI MAKSIMUM FUNKCIJE f, TAKO DA PROMENLJIVE ZADOVOLJAVAJU USLOVE (*).

(T) AKO POSTOJI OPTIMALNO REŠENJE PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA, ONDA POSTOJI I BAZIČNO DOPUSTIVO OPTIMALNO REŠENJE.

POSTUPAK REŠAVANJA:

1) ODREDI SE BAZ. DOP. REŠ. (*) $(0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$ $\xrightarrow{\text{IZRAČUNAM}}$ $f = f_0$ ~~[illegible]~~

2) ODREDI SE NOVO BAZ. DOP. REŠ. (*) TAKO DA BUDE $f = f_1 \geq f_0$

$\vdots$

k) POSLE KONAČNOG BROJA KORAKA DOLAZIMO DO BAZIČNO DOPUSTIVOG I OPTIMALNOG REŠ. ILI SE UTVRDI DA OPTIMALNO REŠENJE NE POSTOJI

PRIMER REŠITI SLEDEĆI PROBLEM L.P. P5

$$\max f = x_1 + x_2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - 3x_2 + x_4 = 6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

REŠ.

ODREDIMO PRVO BAZ. DOP. REŠ. (BDR)

1) $x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$ $\quad x_1, x_2$ – SLOB. PROM.

$x_4 = 6 - x_1 + 3x_2$

$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 4,\ x_4 = 6 \Rightarrow (0,0,4,6)$ BDR

$f_1 = 0 + 0 = 0$ $\quad \boxed{f_1 = 0}$ $\qquad f = x_1 + x_2$

AKO JE $x_2 = 0$ $\quad x_1 \uparrow \rightarrow x_1 = 6$, JER TADA JE $x_4 = 0$

2) $x_2 = 0$ I $x_4 = 0$ $\quad x_2, x_4$ – SLOB. PROM.

$x_1 = 6,\ x_3 = 16$

$(6, 0, 16, 0)$ – NOVO BDR

$$\boxed{f_2 = 6}$$

$x_1 = 3x_2 + 6 - x_4$

$x_3 = 16 + 5x_2 - 2x_4$ $\quad (= 4 + 2(3x_2 + 6 - x_4) - x_2)$

$f = x_1 + x_2 = 3x_2 + 6 - x_4 + x_2 = 6 - x_4 + 4x_2$

$x_2 \uparrow$ (OSTAVLJAMO DA JE $x_4 = 0$) $\longrightarrow$ MOŽE SE POVEĆAVATI $\infty \Rightarrow f$ MAX NE POSTOJI!

PRIMER NAĆI MAKSIMUM LINEARNE FUNKCIJE (P6)

$f = -x_1 + x_2$ POD USLOVOM

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

$-2x_1 + x_2 + x_4 = 2$

$3x_1 + x_2 + x_5 = 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$.

REŠ.

1) $x_3 = 1 - x_1 + 2x_2$

$x_4 = 2 + 2x_1 - x_2$ $\quad x_1, x_2$ - SLOB. PROM

$x_5 = 3 - 3x_1 - x_2$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$

$(0, 0, 1, 2, 3)$ - PRVO BAZIČNO REŠENJE ~~BDR~~ (BDR)

$f_1 = 0$

$f = -x_1 + x_2 \rightarrow x_2 \uparrow \quad (x_1 = 0) \rightarrow \quad x_2 = 2$

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5, x_4 = 0, x_5 = 1$

2) $(0, 2, 5, 0, 1)$ - DRUGO BAZIČNO DOP. REŠENJE

$f_2 = 0 + 2 = 2 > f_1$

x_1, x_4 - SLOBODNE PROM.

$x_2 = 2 + 2x_1 - x_4$

$x_3 = 1 - x_1 + 2x_2 = 1 - x_1 + 2(2 + 2x_1 - x_4) = 5 + 3x_1 - 2x_4$

$x_5 = 3 - 3x_1 - x_2 = 3 - 3x_1 - (2 + 2x_1 - x_4) = 1 - 5x_1 + x_4$

$f = -x_1 + x_2 = -x_1 + 2 + 2x_1 - x_4 = 2 + x_1 - x_4$

$x_1 \uparrow \quad (x_4 = 0) \rightsquigarrow x_1 = \frac{1}{5}$ (ZBOG $1 - 5x_1 \geq 0$)

$x_1 = \frac{1}{5},\ x_4 = 0,\ x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{5},\ x_3 = \frac{28}{5},\ x_5 = 0$

3) $\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0\right)$ — TREĆE BAZIČNO REŠ. (BDR)

$f = 2 + \frac{1}{5} - 0 = \frac{11}{5},\ f_3 = \frac{11}{5} > 2 = f_2$

x_4 I x_5 — SLOBODNE PROM.

$$x_1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5$$

$$x_2 = 2 + 2x_1 - x_4 = 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5\right) = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5$$

$$x_3 = 5 + 3x_1 - 2x_4 = 5 + 3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5\right) = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5$$

$$f = 2 + x_1 - x_4 = 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 - x_4$$

$$f = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5$$

KOEFICIJENTI UZ x_4 I x_5 SU NEGATIVNI, PA DALJE POVEĆANJE VREDNOSTI FUNK. f NIJE MOGUĆE.

DAKLE, BAZIČNO DOPUSTIVO REŠENJE $\left(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0\right)$ JE UJEDNO I OPTIMALNO, I $f_{MAX} = \frac{11}{5}$.