SIMPLEKS POSTUPAK

(*) DEFINICIJA POSTUPKA

- SIMPLEKS POSTUPKOM SE REŠAVA SLEDEĆI OPŠTI PROBLEM LINEARNOG PROGRAMIRANJA.

DAT JE SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA

$$
(1)\quad
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m,
\end{cases}
$$

GDE SU $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0$, I LINEARNA FUNK. $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. NAĆI NENEGATIVNO REŠENJE, TJ. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$, DATOG SISTEMA JEDNAČINA ZA KOJE FUNK. f IMA MAKSIMUM.

- VIDELI SMO DA REŠENJE LP (1) MOŽEMO NAĆI TRANSFORMACIJAMA LINEARNOG SISTEMA, TRAŽEĆI OPTIMALNO BAZIČNO DOPUSTIVO REŠENJE (BDR). OVAJ POSTUPAK SE MOŽE POJEDNOSTAVITI AKO SE SVI PODACI RELEVANTNI ZA OVAJ PROCES PIŠU I SREDUJU U OBLIKU TABLICA. TAKVE TABLICE ĆEMO ZVATI SIMPLEKS TABLICAMA.
- KOEFICIJENTE PROBLEMA (1) ZAPISAĆEMO U OBLIKU POČETNE TABLICE:

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	x_{n+m}	
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0	b_1
a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0	b_2
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1	b_m
c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0	0	$\ldots$	0	0

TABLICI ODGOVARA $(0, 0, \ldots 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ BDR

P2

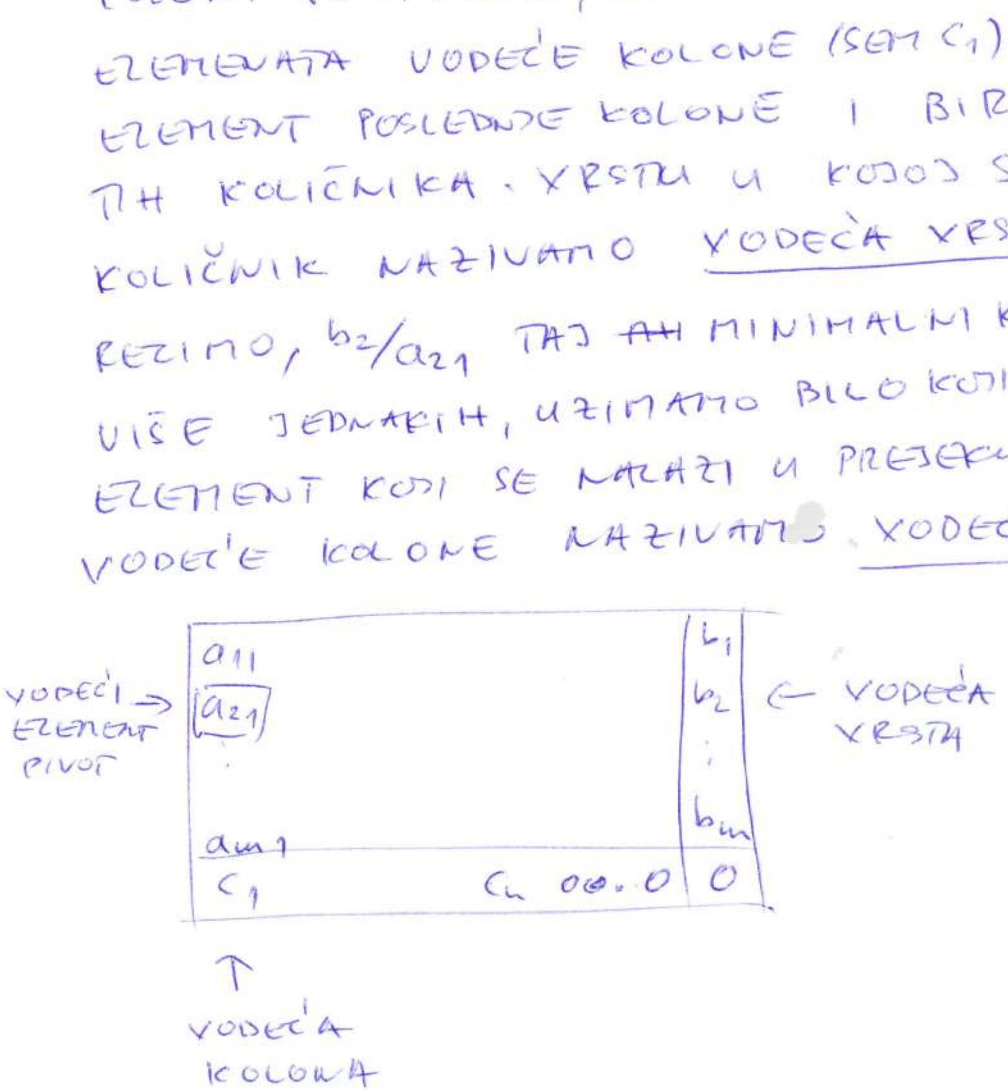
- AKO SU SVI ELEMENTI POSLEDNJE VRSTE (SEM POSLEDNJE) NEPOZITIVNI, - ONDA JE $(0,0,\dots,0,b_1,b_2,\dots,b_m)$ OPITMALNO BDR I MAKSIMUM JE $f_{MAX}=0$, ELEMENT U DONJEM DESNOM UGLU.

- AKO MEĐU ELEMENTIMA POSLEDNJE VRSTE (SEM POSLEDNJEG) IMA POZITIVNIH, BIRAMO JEDAN OD TIH POZITIVNIH ELEMENATA, RECIMO $C_1>0$. KOLONU U KOJOJ SE NALAZI IZABRANI ELEMENT NAZIVAMO VODEĆA KOLONA.

- AKO SU SVI ELEMENTI IZNAD C_1 U VODEĆOJ KOLONI NEPOZITIVNI, SLEDI DA f MOŽE UZIMATI PROIZVOLJNO VELIKE VREDNOSTI, TJ. NEMA MAKSIMUM.

- AKO JE BAR JEDAN ELEMENAT, SEM C_1, U VODEĆOJ KOLONI POZITIVAN, ONDA SVAKIM OD POZITIVNIH ELEMENATA VODEĆE KOLONE (SEM C_1) DELIMO ODGOVARAJUĆI ELEMENT POSLEDNJE KOLONE I BIRAMO NAJMANJI OD TIH KOLIČNIKA. VRSTU U KOJOJ SE NALAZI TAJ KOLIČNIK NAZIVAMO VODEĆA VRSTA. NEKA JE, RECIMO, b_2/a_{21} TAJ ~~AH~~ MINIMALNI KOLIČNIK (AKO IMA VIŠE JEDNAKIH, UZIMAMO BILO KOJI OD NJIH). ELEMENT KOJI SE NALAZI U PRESEKU VODEĆE VRSTE I VODEĆE KOLONE NAZIVAMO VODEĆI ELEMENT (PIVOT).

U NAŠEM SLUČAJU a_{21} JE VODEĆI EL.



- VODEĆU (DRUGU) VRSTU MNOŽIMO SA $\frac{1}{a_{21}}$ TAKO DA VODEĆI ELEMENT POSTANE 1.

- OSTALE ELEMENTE (SEM VODEĆEG, a_{21}) ĆEMO PRETVORITI U NULE TRANSFORMACIJAMA: OSTALIM VRSTAMA ĆEMO DODATI UMNOŠKE VODEĆE VRSTE, TAKO DA SVI ELEMENTI U VODEĆOJ KOLONI, SEM VODEĆEG, BUDU JEDNAKI NULI.

TAKO DOBIJAMO NOVU TABLICU:

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & 1 & a'_{1n+2} & 0 & \dots\ 0 & b'_1 \\
1 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & 0 & a'_{2n+2} & 0 & \dots\ 0 & b'_2 \\
0 & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & 0 & a'_{3n+2} & 1 & \dots\ 0 & b'_3 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} & 0 & a'_{mn+2} & 0 & \dots\ 1 & b'_m \\
\hline
0 & c'_2 & c'_3 & \dots & c'_n & 0 & c'_{n+2} & 0 & \dots\ 0 & -f_2 \\
x_1 & x_2 & x_3 & & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & & x_{n+m} &
\end{array}
$$

← JEDNO BDR

1 BAZIČNA PROM. ⟷ 1 SLOBODNA PROM.

OVOJ TABLICI ODGOVARA SLEDEĆE BDR:

$(b'_2, 0, 0, \dots, 0, b'_1, 0, b'_3, \dots, b'_m)$,

A VREDNOST FUNKCIJE JE f_2.

- POSTUPAK SE PONAVLJA SA NOVOM TABLICOM. POSTUPAK JE ZAVRŠEN AKO SU SVI ELEMENTI POSLEDNJE VRSTE (SEM POSLEDNJEG) NEPOZITIVNI, TJ. NEMA VIŠE POZITIVNIH ELEMENATA ZA NOVU VODEĆU KOLONU. TADA ČITAMO OPTIMALNO BDR.

P4

PRIMER SIMPLEKS METODOM REŠITI SLEDEĆI PROBLEM. NAĆI MAKSIMUM FUNKCIJE

$$f = -x_1 + x_2, \quad \text{POD USLOVOM}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$
$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 2,$$
$$3x_1 + x_2 + x_5 = 3,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

REŠENJE. I TABLICA

	1	-2	1	0	0	1	
VODEĆA VRSTA →	-2	1	0	1	0	2	$\frac{2}{1}$
$\cdot(+2)$, $\cdot(-1)$, $\cdot(-1)$	3	1	0	0	1	3	$\frac{3}{1}$
	-1	1	0	0	0	0	

NAJMANJI KOLIČNIK

$2/1 < 3/1 \Rightarrow$ VODEĆA VRSTA

VODEĆI ELEMENT (PIVOT)

VODEĆA KOLONA

$\Downarrow$

II TABLICA

-3	0	1	2	0	5	
-2	1	0	1	0	2	
5	0	0	-1	1	1	← VODEĆA VRSTA $/ \cdot \frac{1}{5}$
1	0	0	-1	0	-2	

VODEĆA KOLONA

	-3	0	1	2	0	5
	-2	1	0	1	0	2
$\cdot(+3)$, $\cdot(+2)$	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\cdot(-1)$	1	0	0	-1	0	-2

$\Rightarrow$

III TABLICA (P5)

0	0	1	$7/5$	$3/5$	$\frac{28}{5}$
0	1	0	$3/5$	$2/5$	$12/5$
1	0	0	$-1/5$	$1/5$	$\frac{1}{5}$
0	0	0	$-4/5$	$-1/5$	$-11/5$

POSTUPAK JE ZAVRŠEN $(-4/5 < 0 \, , \, -\frac{1}{5} < 0)$, JER NEMA POZITIVNIH ELEMENATA U POSLEDNJOJ VRSTI

OPTIMALNO BDR JE $(\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0)$, A MAKSIMUM FUNKCIJE $f_{MAX} = \frac{11}{5}$ (POSTIGNUTO ZA $x_1 = \frac{1}{5}$ I $x_2 = \frac{12}{5}$).