LAGRANŽOV INTERPOLACIONI POLINOM

* POLINOMNA INTERPOLACIJA

OZNAČIMO SA Π_n SKUP SVIH REALNIH POLINOMA STEPENA NE VEĆEG OD n:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

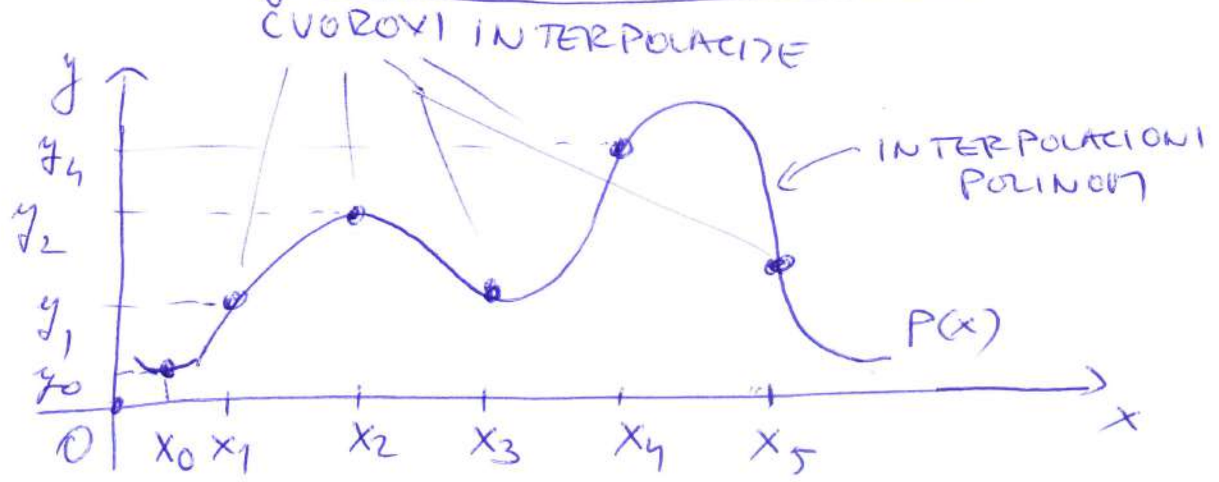
$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

NEKA JE DATA TABELA VREDNOSTI

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2		y_n

POD INTERPOLACIJOM PODRAZUMEVAMO ODREĐIVANJE INTERPOLACIONOG POLINOMA $P(x) \in \Pi_n$ ZA KOJI VAŽI DA JE

$$\boxed{P(x_i) = y_i \quad ; \; i = 0, 1, \dots, n}$$



(T) AKO SU $x_0, x_1, \dots, x_n$ MEĐUSOBNO RAZLIČITE VREDNOSTI, ONDA ZA PROIZVOLJNE VREDNOSTI $y_0, y_1, \dots, y_n$ POSTOJI JEDINSTVEN POLINOM $P(x) \in \Pi_n$ TAKAV DA JE

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

DOKAZ NEKA JE $P(x) \in \Pi_n$, TADA JE

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 .$$

POTREBNO JE DA ODREDIMO KOEFICIJENTE $a_0, a_1, \dots, a_n$. IZ USLOVA $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ ~~HA~~ DOBIJAMO SLEDEĆE JEDNAČINE

$$\begin{aligned}
a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0 \\
a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_1 &= y_1 \\
&\vdots \\
a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_n &= y_n .
\end{aligned}$$

AKO GORNJI SISTEM NAPIŠEMO U MATRIČNOM OBLIKU, DOBIJAMO

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}}_{= A} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

A

DETERMINANTA OVOG LINEARNOG SISTEMA, DET(A), JE RAZLIČITA OD NULE JER SU VREDNOSTI x_i MEĐUSOBNO RAZLIČITE.

$$Det(A)=\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)\neq 0$$

DET(A) JE POZNATA VANDERMONDOVA DETERMINANTA.

POŠTO JE DET(A)$\neq 0$, DOBIJENI LINEARNI SISTEM IMA JEDINSTVENO REŠENJE, TJ. KOEFICIJENTI POLINOMA, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ SU JEDINSTVENO ODREĐENI. DAKLE, POLINOM $P(x)$ POSTOJI I JEDINSTVEN JE.

- INTERPOLACIONI POLINOM, KOJI PROLAZI KROZ ZADATE <u>ČVORNE TAČKE</u> (x_i, y_i) ZA $i=0,1,2,\ldots,n$, SLEDEĆEG OBLIKA

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} =$$

$$= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}+\cdots+y_n\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots}$$

NAZIVA SE <u>LAGRANŽOV POLINOM</u> n-TOG STEPENA.

SPECIJALNO, ZA $n=3$ IMAMO

$$L_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

(*) INTERPOLACIJA FUNKCIJE

KAŽEMO DA POLINOM $P_n(f,x)$ INTERPOLIRA (APROKSIMIRA) FUNKCIJU f U ODNOSU NA MEĐUSOBNO RAZLIČITE ČVOROVE $x_0, x_1, \dots, x_n$, AKO VAŽI DA JE

$$P_n(f, x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$P_n(f,x)$ MOŽEMO ODREDITI ODREĐIVANJEM LAGRANŽOVOG INTERPOLACIONOG POLINOMA ZA ČVOROVE $(x_i, \underset{y_i}{f(x_i)})$ ZA $i = 0, 1, \dots, n$.

- <u>GREŠKA PRI INTERPOLACIJI</u> FUNKCIJE $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ INTERPOLACIONIM POLINOMOM $P_n(f,x)$ SE MOŽE ODREDITI NA SLEDEĆI NAČIN:

AKO JE M KONSTANTA ZA KOJU VAŽI

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M \quad \text{ZA } x\,[a,b], \text{ TADA JE}$$

$$|f(x) - P_n(f,x)| \le \frac{M}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right|$$

- <u>PRIMER</u> LAGRANŽOVIM POLINOMOM INTERPOLIRATI FUNKCIJU $f(x) = \sin x$ U ČVORNIM TAČKAMA $x = 0.4$, $x = 0.7$ I $x = 1$. OCENITI GREŠKU INTERPOLACIJE.

<u>REŠ.</u> ČVOROVI INTERPOLACIJE:

0.4	0.7	1
$\sin(0.4)$	$\sin(0.7)$	$\sin 1$

$$\Rightarrow \quad L_2(x) = \sin(0.4) \cdot \frac{(x-0.7)(x-1)}{(-0.3)\cdot(-0.6)} + \sin(0.7) \cdot \frac{(x-0.4)(x-1)}{0.3 \cdot (-0.3)} + \sin(1) \cdot \frac{(x-0.4)(x-0.7)}{0.6 \cdot 0.3}$$

P5

$$L_2(x) = -0.31970026x^2 + 1.20100144x - 0.03983019$$

TRAŽENI LAG. POLINOM

OCJENA GREŠKE INTERPOLACIJE:

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{M}{(2+1)!} \left| \prod_{j=0}^{2} (x - x_j) \right|$$

$n = 2$

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

$$|f'''(x)| = |\cos x| \leq 1 = M, \text{ DAKLE}$$

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \left| (x-0.4)\cdot(x-0.7)\cdot(x-1) \right|$$

za $x \in [0.4, 1]$.

NACRTATI U WOLFRAM ALPHA...