NUMERIČKO REŠAVANJE JEDNAČINA

(*) ITERATIVNI POSTUPAK I IZLAZNI KRITERIJUMI

POSMATRAJMO JEDNAČINU

$$f(x) = 0,$$

GDE JE $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ FUNKCIJA KOJA JE DEFINISANA I NEPREKIDNA NA KONAČNOM ILI BESKONAČNOM INTERVALU (a,b).

NEKA JE x^* TAČNO REŠENJE JEDNAČINE, TJ.

$$f(x^*) = 0.$$

NUMERIČKI METOD ILI ITERATIVNI METOD REŠAVANJA JEDNAČINE DEFINIŠE ITERATIVNI NIZ $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ TAKAV DA JE $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. ZA PRIBLIŽNO

- REŠENJE JEDNAČINE UZIMA SE ONAJ ČLAN ITERATIVNOG NIZA x_n KOJI PRVI ZADOVOLJI POSTAVLJENI IZLAZNI KRITERIJUM, KOJI MOŽE BITI:

1) GREŠKA APROKSIMACIJE $|x_n - x^*|$, TJ. POSTUPAK SE PREKIDA, AKO JE ZADOVOLJENO $|x_n - x^*| < \varepsilon$, ZA NEKO DATO $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = 10^{-3})$

2) TOLERANCIJA FUNKCIJE $|f(x_n)|$, TJ. POSTUPAK JE ODREĐEN, AKO JE $|f(x_n)| < \varepsilon$, ZA NEKO DATO $\varepsilon > 0$.

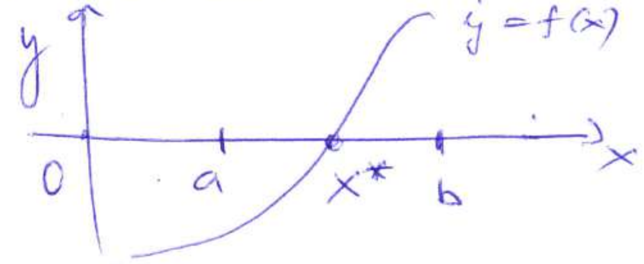
(P2)

3) TOLERANCIJA POSTUPKA $|x_n - x_{n-1}|$, TJ.
POSTUPAK SE PREKIDA, AKO JE $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$,
ZA NEKO MALO $\varepsilon > 0$ (NPR. $\varepsilon = 10^{-3}$)

4) PRISILAN KRAJ, NA PRIMER ZADAJE SE BROJ
ITERATIVNIH KORAKA n

- NUMERIČKO REŠAVANJE JEDNAČINE $f(x)=0$
PODRAZUMEVA DVE FAZE:

1) LOKALIZACIJA KORENA, PODRAZUMEVA ODREĐIVANJE
SVIH INTERVALA U KOJIMA SE NALAZE JEDINSTVENI
KORENI JEDNAČINE.



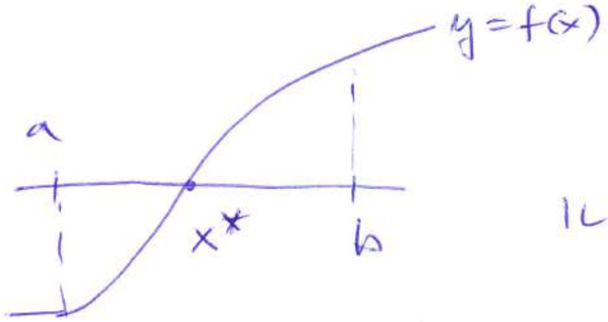
$x^* \in (a,b)$
↑
INTERVAL U KOME
JE TAČNO JEDNA
NULA

2) PRIMENA NEKOG NUMERIČKOG (ITERATIVNOG)
POSTUPKA ZA PRIBLIŽNO ODREĐIVANJE REŠENJA x^*,
PRI TOME POLAZI SE OD INTERVALA KOJI JE
ODREĐEN LOKALIZACIJOM KORENA.

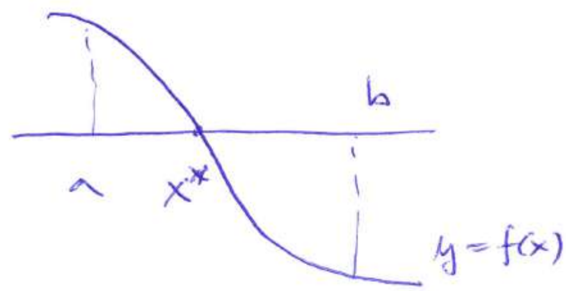
(*) LOKALIZACIJA KORENA

ZA LOKALIZACIJU KORENA KORISTIMO SLEDEĆE
POSTUPKE:

- AKO JE $y = f(x)$ NAD INT. $[a,b]$ MONOTONA I AKO
NA KRAJEVIMA INTERVALA IMA VREDNOSTI RAZLIČITOG
ZNAKA, TADA $[a,b]$ SADRŽI JEDINSTVENO REŠ. $f(x)=0$
JEDN.!



ILI



$f(a)<0 \wedge f(b)>0$

$x^* \in [a,b]$

$f(a)>0 \wedge f(b)<0$

$x^* \in [a,b]$

LOKALIZACIJOM KORENA DOBIJAMO INTERVAL $[a,b]$.

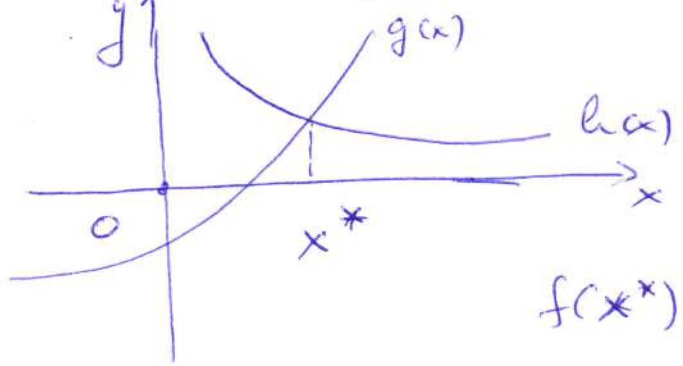
$f(a)f(b)<0$

– GRAFIČKI METOD

PODRAZUMEVA CRTANJE GRAFIKA FUNKCIJE $y=f(x)$. IDEJA:
AKO DATU FUNKCIJU $y=f(x)$ POSMATRAMO U OBLIKU

$$f(x)=g(x)-h(x), \quad \text{TADA}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=h(x)$$



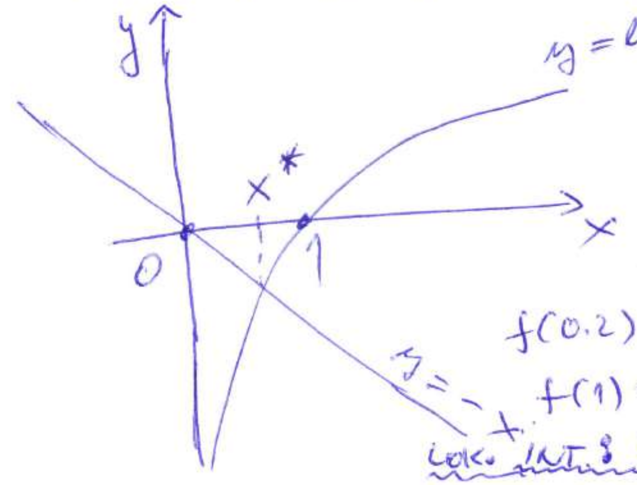
$$f(x^*)=0$$

PRIMER LOKALIZOVATI KOREN JEDNAČINE $x+\ln x=0$.

REŠ.

NEKA JE $f(x)=x+\ln x$, TADA JE $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-x$

$$\underbrace{\ln x}_{g(x)} = \underbrace{-x}_{h(x)}$$



$f'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

$f'(x)>0$ ZA $x>0$

$f\uparrow$ ZA $x>0$

VAŽI:

$f(0.2)=0.2+\ln(0.2)<0$

$f(1)=1+\ln 1=1>0$

LOK. INT.: $(0.2, 1)$ $\leq$!

(P4)

(*) METOD POLOVLJENJA

POSMATRAJMO JEDNAČINU

$$f(x)=0$$

I NEKA JE $[a,b]$ ODREĐEN POSTUPKOM LOKALIZACIJE KORENA, TJ. INT. SADRŽI JEDINSTVENO REŠENJE, $x=x^*$.

NEKA JE $[a_0,b_0]=[a,b]$, $n=0$.

OVIM POSTUPKOM FORMIRAMO NIZ SUŽAVAJUĆIH INTERVALA

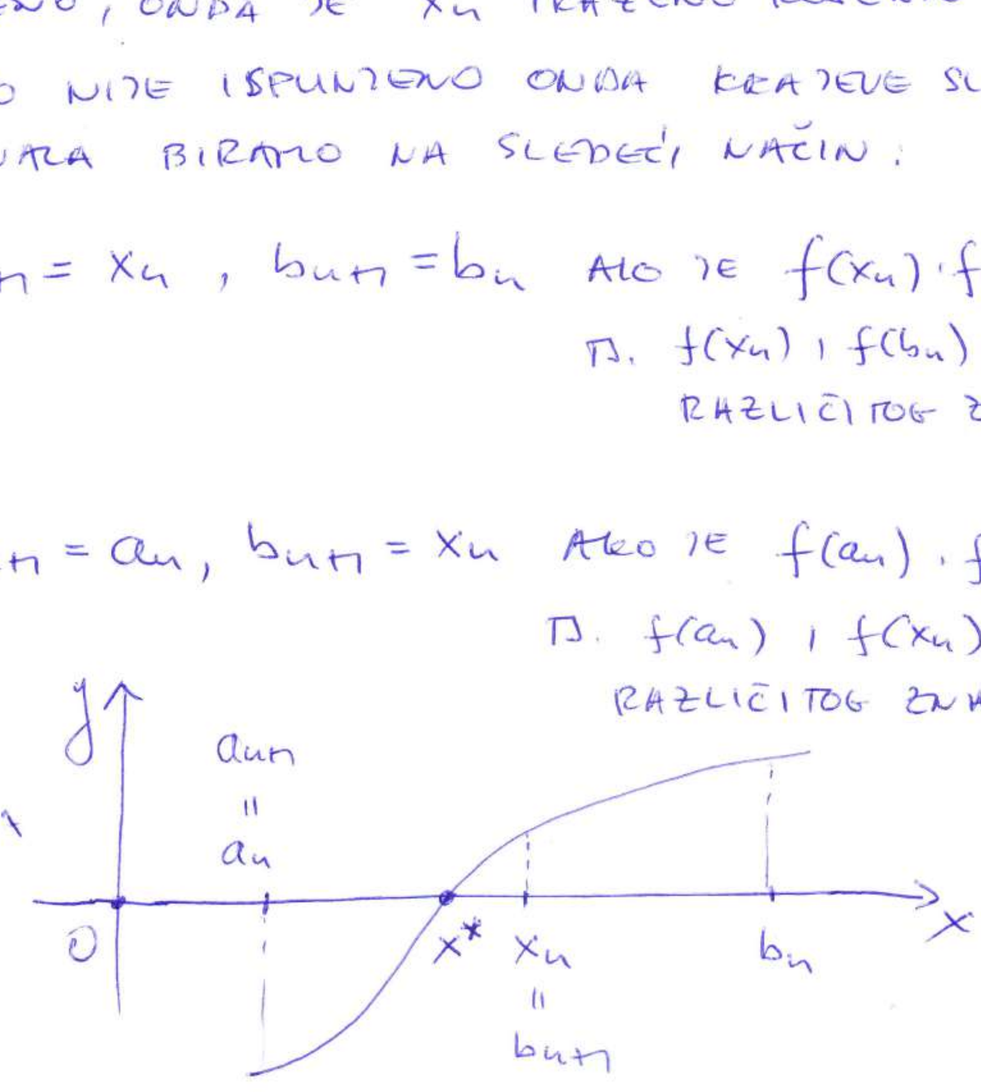
$$[a,b]=[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$$

INTERVAL $[a_n,b_n]$ DELIMO TAČKOM $x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$ I PROVERAVAMO DA LI JE $f(x_n)=0$. AKO JE TO ISPUNJENO, ONDA JE x_n TRAŽENO REŠENJE $x_n=x^*$. AKO TO NIJE ISPUNJENO ONDA KRAJEVE SLEDEĆEG INTERVALA BIRAMO NA SLEDEĆI NAČIN:

- $a_{n+1}=x_n$, $b_{n+1}=b_n$ AKO JE $f(x_n)\cdot f(b_n)<0$, TJ. $f(x_n)$ I $f(b_n)$ SU RAZLIČITOG ZNAKA;

ILI

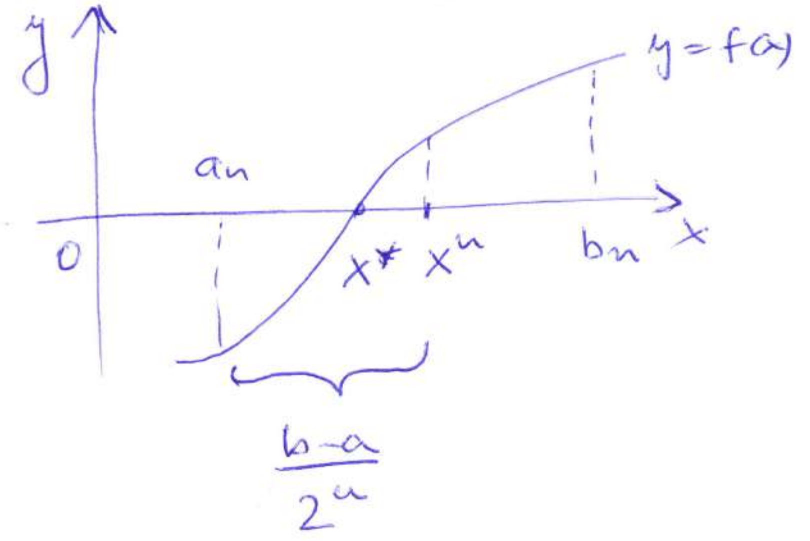
- $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=x_n$ AKO JE $f(a_n)\cdot f(x_n)<0$, TJ. $f(a_n)$ I $f(x_n)$ SU RAZLIČITOG ZNAKA.



- OCENA GREŠKE METODE POLOVLJENJA

POSLE n KORAKA (ITERACIJA):

$$|x_n - x^*| \le \frac{b-a}{2^n}.$$

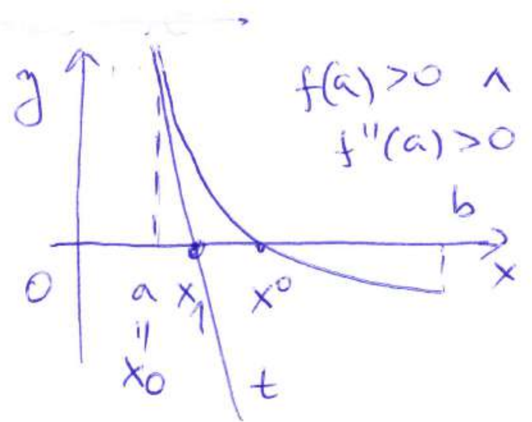


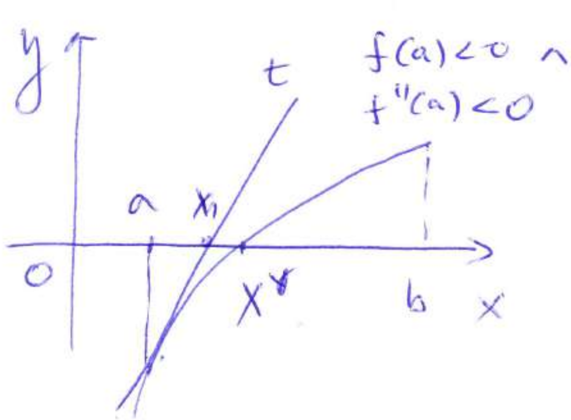
PRIMER ZBIRKA 279 STR. ...

(*) NJUTNOVA METODA TANGENTE

NEKA JE ZA JEDNAČINU $f(x)=0$ LOKALIZOVAN KOREN x^* U INTERVALU $[a,b]$ I NEKA SU FUNKCIJE $f'(x)$ I $f''(x)$ NEPREKIDNE I STALNOG ZNAKA NAD INTERVALOM $[a,b]$.
RAZLIKUJEMO DVA SLUČAJA:

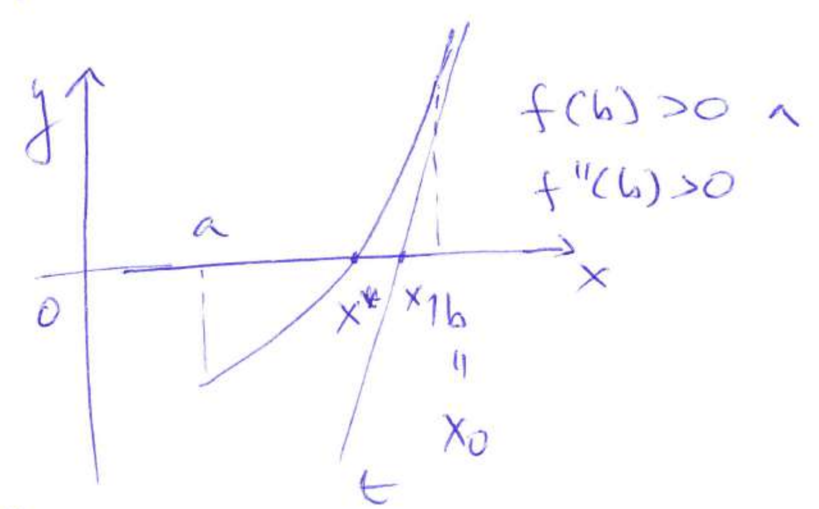
1° AKO JE $f(a)\cdot f''(a) > 0$, ONDA ZA POČETNU ITERACIJU UZIMAMO $x_0 = a$;

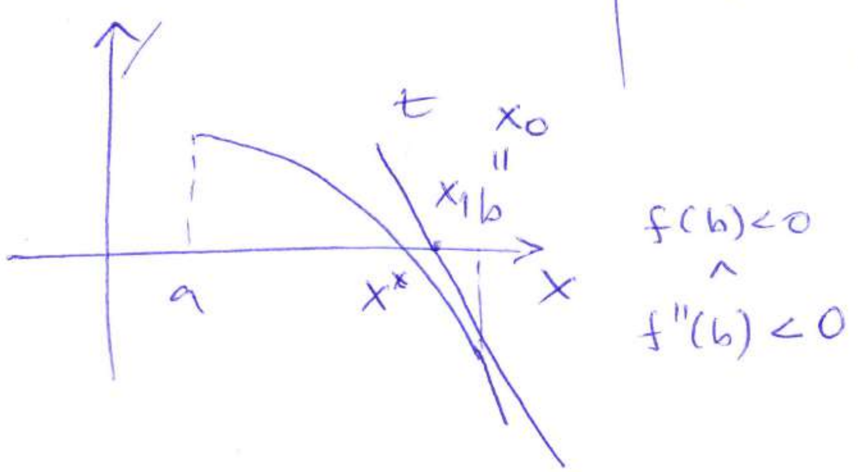




(P6)

2^0 AKO JE $\underline{f(b)\cdot f''(b)>0}$, ONDA ZA POČETNU ITERACIJU UZIMAMO $\underline{x_0=b}$.

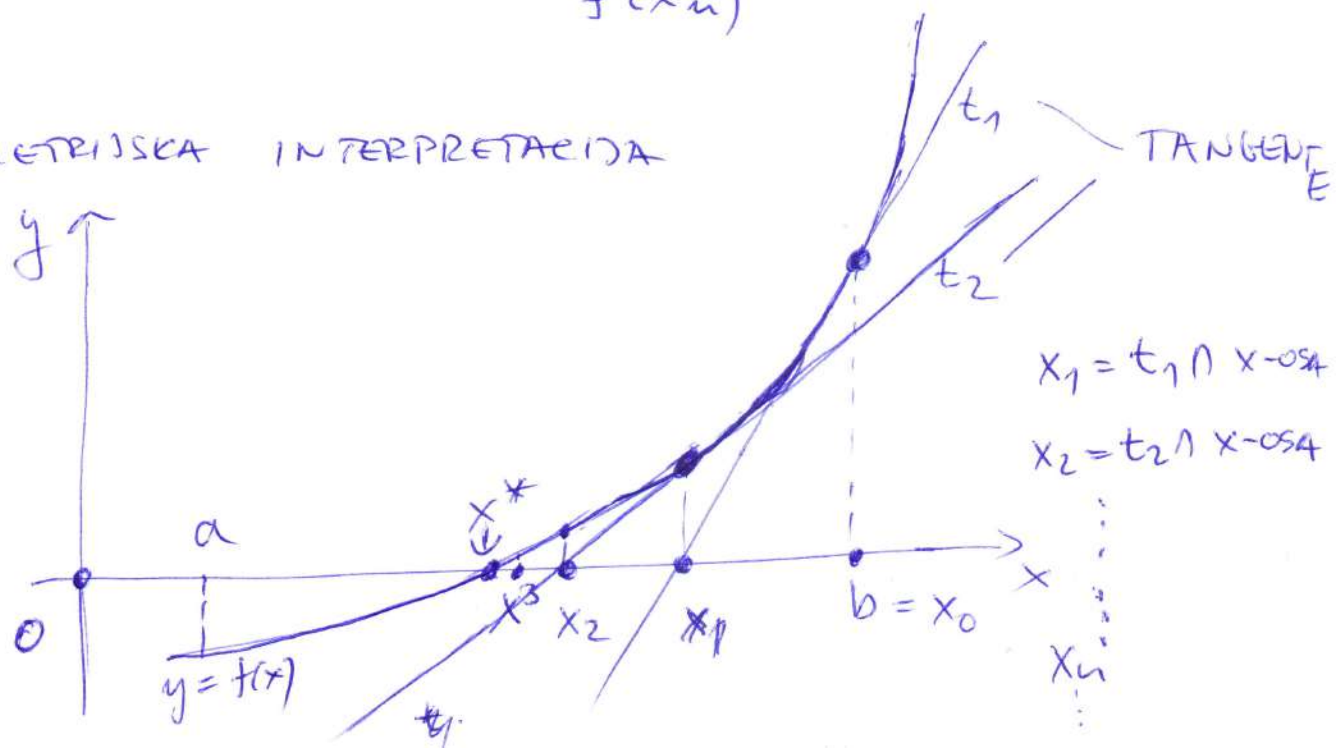




ITERATIVNI NIZ FORMIRAMO KORISTEĆI SLEDEĆU FORMULU:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\dots$$

GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA



• OCENA GREŠKE NJUTNOVOG POSTUPKA

POSLE n KORAKA (ITERACIJA):

$$|x_n - x^*| \le \frac{|f(x_n)|}{m},$$

GDE JE $m = \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

PRIMER ZBIRKA 290 STR.