VEKTORI U PROSTORU

Veličine za čije je određivanje potreban samo jedan broj, kao na primer udaljenost, površina ili zapremina, zovu se skalarne veličine. Međutim, postoje i veličine koje se ne mogu potpuno odrediti brojem, već je potrebno još zadati njihov pravac i smer. Na primer brzina, ubrzanje, strujanje, sila, električna i magnetna polja. Takve veličine nazivamo **vektorskim veličinama.**

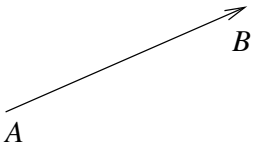
Slobodni vektori su klase ekvivalencije na skupu uređenih parova tačaka prostora, u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ definisanu sa

$$(A,B)\rho(C,D) \iff \text{duž } AB \text{ je paralelna, podudarna i isto orijentisana kao duž } CD.$$

Dakle, jedan vektor je skup svih orijentisanih duži koje imaju isti pravac (paralelne su), dužinu i smer. Kao glavnog predstavnika, najčešće uzimamo vektor čija je početna tačka u koordinatnom početku. Vektor je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom.

Skup svih slobodnih vektora označavaćemo sa V.

Vektor čiji je predstavnik (A,B) označavaćemo sa $\overrightarrow{AB}$, ili kraće sa $\vec{a}$.



- **Intenzitet vektora** $\overrightarrow{AB}$ je merni broj duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Pravac vektora** $\overrightarrow{AB}$ je pravac određen tačkama A i B.
- **Smer vektora** $\overrightarrow{AB}$, $(A \neq B)$ je od tačke A do tačke B.

Dakle, vektor je klasa ekvivalencije usmerenih duži. Kažemo da su dve usmerene duži ekvivalentne, tj. predstavljaju isti vektor, ako imaju isti **pravac, smer i intenzitet**.

Ugao između dva vektora je nenegativan realan broj iz intervala $[0, \pi]$. Ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se označava sa $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Ova mera ugla je definisana na takav način da je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$, što znači znači da kod vektora u 3D prostoru nije definisana orijentacija ugla, već samo nenegativna veličina tog ugla. Pojmovi ortogonalnosti i paralelnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se definišu na sledeći način:

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \vee \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi\Big). \end{aligned}$$

Izdvajamo:

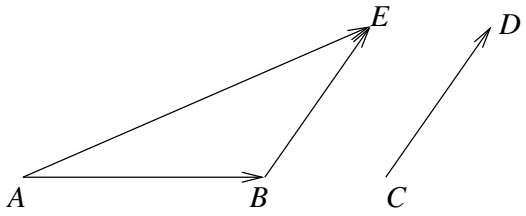
- Vektor čiji je intenzitet jednak 1 naziva se **jedinični vektor**.
- Vektor kod kojeg je $A = B$ zvaćemo **nula vektor** i označavati sa $\vec{0}$ ili 0. Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu.
- Vektor koji ima isti pravac i intenzitet kao vektor $\overrightarrow{AB}$, a suprotan smer, je vektor $\overrightarrow{BA}$ i naziva se **suprotan vektor** vektora $\overrightarrow{AB}$.

Operacije sa vektorima:

U skupu V definišemo operaciju **sabiranja vektora** na sledeći način:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$$

gde je $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.

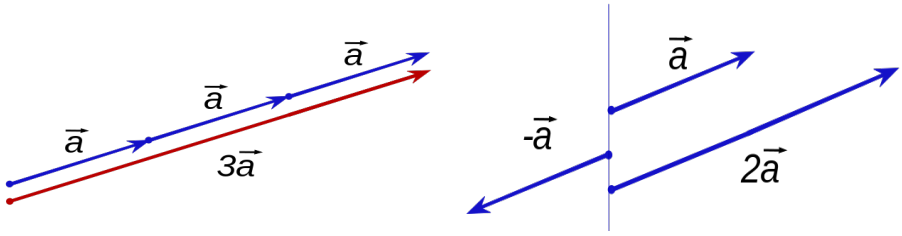


Množenje vektora $\vec{a} \in V$ realnim brojem $\alpha \in \mathbb{R}$ (skalarom), u oznaci $\alpha\vec{a}$, kao rezultat daje nula vektor $\vec{0}$ ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$, a inače vektor koji ima

a) isti pravac kao vektor $\vec{a}$,

b) intenzitet $|\alpha||\vec{a}|$

c) isti smer kao i vektor $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotan ako je $\alpha < 0$.



Vektor

$$\vec{s} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n,$$

gde su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalari, se naziva **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **kolinearna** ako i samo ako imaju isti pravac, tj. ako postoji skalar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je

$$\vec{a} = \alpha\vec{b}.$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0).$$

Za tri nenula vektora kažemo da su **komplanarni** ako i samo ako su paralelni sa jednom ravni tj. ako postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvi da je

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}.$$

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su nekomplanarni ako i samo ako

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0 \ \wedge \ \gamma = 0)$$

Koordinate vektora u prostoru i osnovne operacije

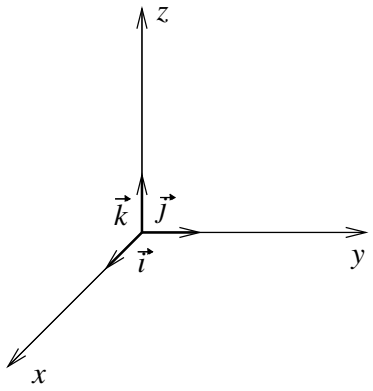
Dekartov (pravougli) koordinatni sistem u prostoru je određen, ako su

- Date tri prave koje se obično nazivaju x, y i z i svake dve se seku pod pravim uglom u tački $O(0, 0, 0)$.
- Na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivan.
- Na pozitivnim smerovima pravih x, y i z izabrane su tačke $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ i $E_3(0, 0, 1)$ redom.

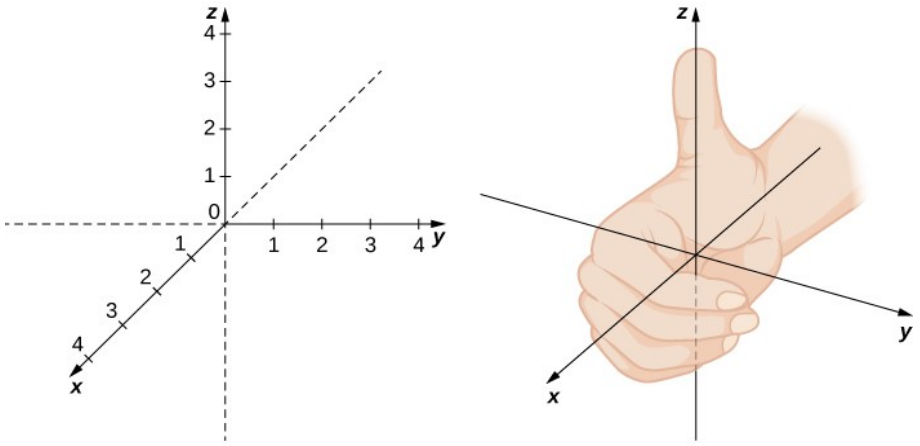
Prava x se naziva x-osa ili **apscisa**. Prava y se naziva y-osa ili **ordinata**. Prava z se naziva z-osa ili **aplikata**. Tačka O se naziva **koordinatni početak**.

Uvedimo oznake

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{OE_1} = (1,0,0)$$
$$\vec{\jmath} = \overrightarrow{OE_2} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = \overrightarrow{OE_3} = (0,0,1)$$



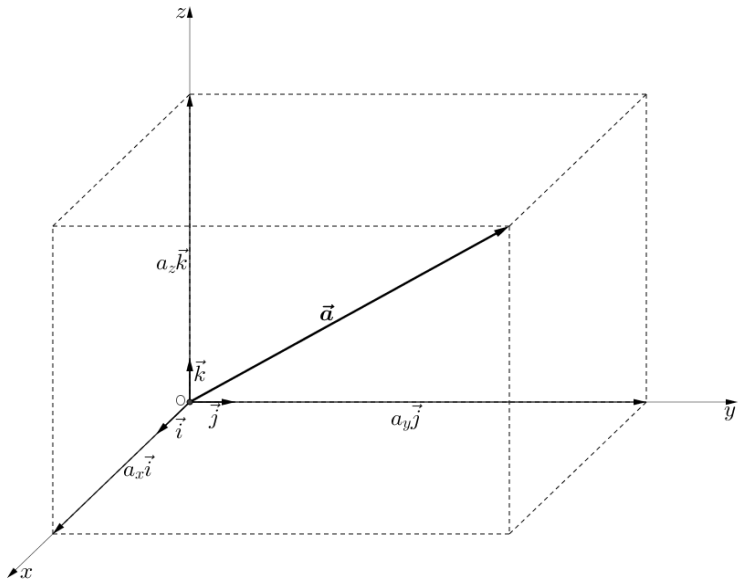
Vektori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ zajedno sa koordinatnim početkom O, čine **desni sistem vektora**, što znači da rotacija vektora $\vec{\imath}$, ka vektoru $\vec{\jmath}$, oko tačke O, u ravni određenoj vektorima $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$, ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora $\vec{k}$.



Vektori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ i $\vec{k}$ čine sandardnu bazu trodimenzionalnog prostora, što znači da se svaki vektor iz $\mathbb{R}^3$ može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija ova tri vektora.

Svakoj tački $A(a_x, a_y, a_z)$ u prostoru odgovara vektor $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ koji se zove **vektor položaja** tačke A i on ima oblik

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}.$$



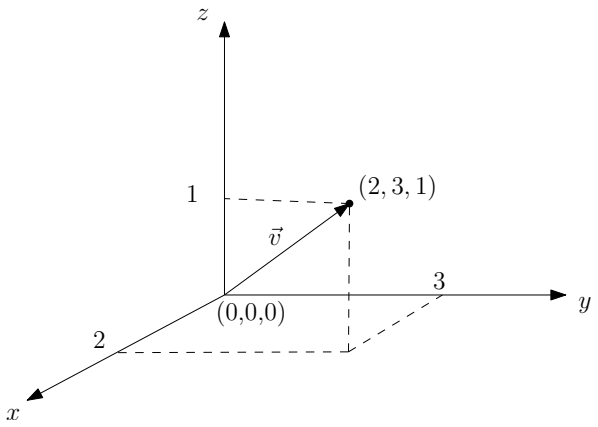
Intenzitet (dužina) vektora $\vec{a}$ je dat sa

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

U daljem tekstu vektor položaja tačke A označavaćemo sa $\overrightarrow{OA} = (a_x, a_y, a_z)$ ili jednostavnije samo $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$.

Vektori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ i $\vec{k}$ su jedinični uzajamno normalni vektori i zovu se još i **ortovi**.

Primer: Vektor položaja tačke $V(2,3,1)$ je vektor $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$.



Koristeći ovakav način predstavljanja vektora, mogu se izvesti formule za sabiranje i oduzimanje vektora $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, kao i množenje $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ skalarom:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 &= (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \\ \alpha\vec{v}_1 &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1). \end{aligned}$$

Jednakost vektora $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \iff x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$$

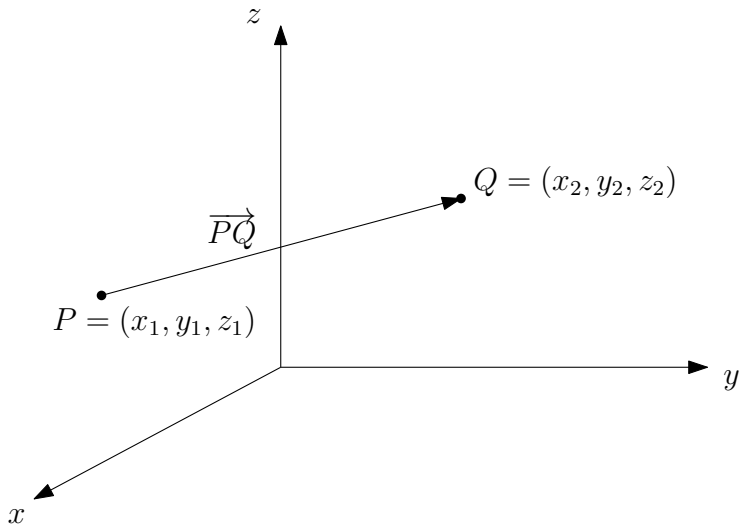
Primer: Dati su vektori $\vec{a} = (2, 1, -1)$ i $\vec{b} = (0, -1, 3)$. Odrediti $|\vec{c}|$, gde je $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

$\vec{c} = (-4, -5, 11),\ |\vec{c}| = \sqrt{162}$

Vektor koji spaja dve tačke i podela duži u datoj razmeri

Vektor $\overrightarrow{PQ}$, određen tačkama $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$ ima oblik

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$



Rastojanje između tačaka P i Q jednako je dužini vektora $\overrightarrow{PQ}$:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Pomoću množenja vektora skalarom možemo odrediti koordinate tačke koja duž $\overrightarrow{PQ}$ deli u datoj razmeri $m : n$.

Primer: Date su tačke $P(3, 0, 5)$ i $Q(-2, 5, 0)$. Treba odrediti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao i tačku $T(x, y, z)$ koja duž PQ deli u odnosu $PT : TQ = 2 : 3$.

Traženi vektor je $\overrightarrow{PQ} = (-2, 5, 0) - (3, 0, 5) = (-5, 5, -5)$.

Tačka T se dobija iz uslova

$$\overrightarrow{PT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ} \iff (x-3, y, z-5) = \frac{2}{5}(-5, 5, -5)$$
$$\iff (x-3, y, z-5) = (-2, 2, -2).$$

Dakle, sledi $x - 3 = -2,\ y = 2,\ z - 5 = -2$, tj. $T(1, 2, 3)$.

U **opštem slučaju**, ako su $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$, a duž PQ treba podeliti tačkom $T(x, y, z)$ u odnosu $PT : TQ = m : n$, onda važi

$$\overrightarrow{PT} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{PQ}.$$

Ako uvedemo oznaku $\lambda = \dfrac{m}{m+n}$, sledi

$$\overrightarrow{PT} = \lambda\overrightarrow{PQ} \iff (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Rešavanjem jednačina

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1),$$

dolazimo do koordinata tražene tačke $T(x, y, z)$:

$$x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1, \quad y = \lambda y_2 + (1-\lambda)y_1, \quad z = \lambda z_2 + (1-\lambda)z_1.$$

U specijalnom slučaju, za $\lambda = \frac{1}{2}$, dobijamo sredinu duži PQ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Primer: Odrediti sredinu duži AB gde su $A(1, -5, 3)$ i $B(-1, 3, -7)$.

$S(0, -1, -2)$

Pojam i osobine skalarnog proizvoda

Skalarni proizvod

Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **je skalar (realan broj)**, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, koji je definisan je sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Osobine skalarnog proizvoda:

a) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$,

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

c) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, (uslov normalnosti, ortogonalnosti),

d) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b})$,

e) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Na osnovu definicije skalarnog proizvoda imamo da se ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može računati na sledeći način

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \qquad 0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi.$$

Za ortove važi

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Neka su dati vektori $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Na osnovu distributivnosti operacije skalarnog množenja prema operaciji sabiranja vektora (os-

obina e)) i osobine komutativnosti skalarnog množenja (osobina b)) sledi

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\ &= x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k}+y_1x_2\vec{i}\cdot\vec{j}+y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j}\\ &\quad+y_1z_2\vec{j}\cdot\vec{k}+z_1x_2\vec{i}\cdot\vec{k}+z_1y_2\vec{j}\cdot\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k}\\ &= x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

Dakle, za vektore $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ i $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, skalarni proizvod se računa na sledeći način

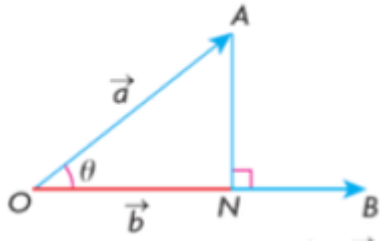
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Primer: Odrediti ugao između vektora $\vec{a}=(4,-3,0)$ i $\vec{b}=(1,2,2)$.

$\angle(\vec{a},\vec{b})=\arccos(-\frac{2}{15})$

Skalarna projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}\neq 0$ definisana sa:

$$proj_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\ \cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$



Takođe važi

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Vektorska projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b} \neq 0$ je vektor

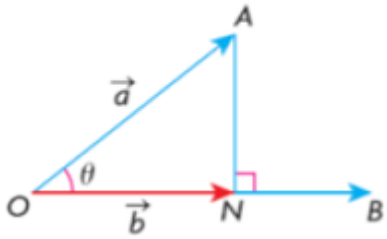
$$Proj_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\ \cos\angle(\vec{a},\vec{b})\ \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

čiji je

- intenzitet $|proj_{\vec{b}}\vec{a}|$
- pravac jednak pravcu vektora $\vec{b}$
- smer jednak smeru vektora $\vec{b}$ ako je $\angle(\vec{a},\vec{b}) < \frac{\pi}{2}$, a suprotan ako je $\angle(\vec{a},\vec{b}) > \frac{\pi}{2}$.

$Proj_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{0}$ ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Takođe važi

$$Proj_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\ \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\ \vec{b}.$$



Primer: Naći vektorsku projekciju $\vec{a} = (0, 1, -3)$ na $\vec{b} = (2, -1, 2)$.

$Proj_{\vec{b}}\vec{a} = (-\frac{14}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{14}{9})$

Vektorski proizvod i njegove osobine

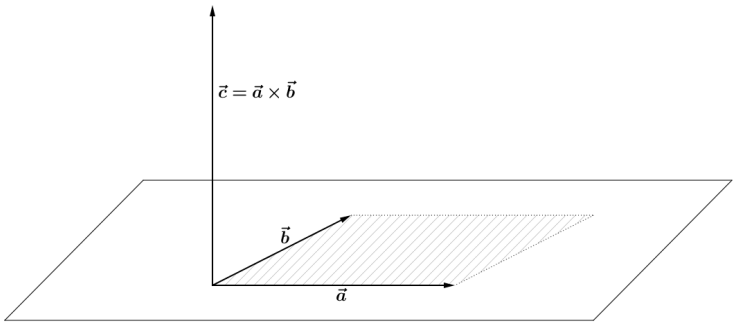
Vektorski proizvod

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **je vektor**, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, čiji je

a) intenzitet: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,

b) pravac: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$,

c) smer: takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ čine desni sistem vektora.



Osobine vektorskog proizvoda:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,

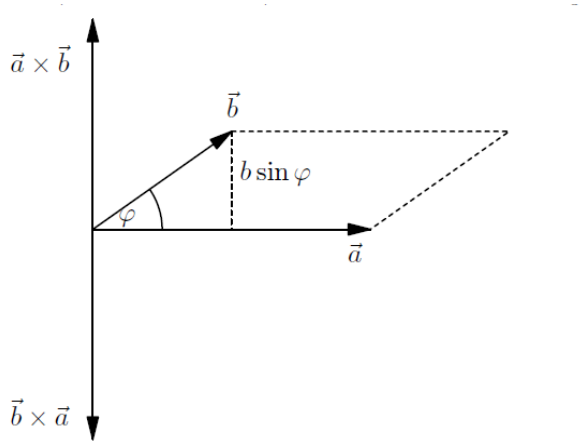
b) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \qquad \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$,

c) Za $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\qquad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni vektori.

d) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,

e) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$,

e) Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora jednak je površini paralelograma koji je konstruisan nad tim vektorima.



Na osnovu definicije vektorskog proizvoda sledi:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Tako da se vektorski proizvod vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ izračunava na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{\imath} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - y_2x_1)\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Dakle, za vektore $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, vektorski proizvod se računa na sledeći način

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_2 x_1)\vec{k}.$$

Primer: Odrediti vektorski proizvod vektora $\vec{a} = (1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (0, 1, -1)$.

$\vec{a} \times \vec{b} = (-1, 1, 1)$

Mešoviti proizvod i njegove osobine

Mešoviti proizvod

Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ je skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$, tj.

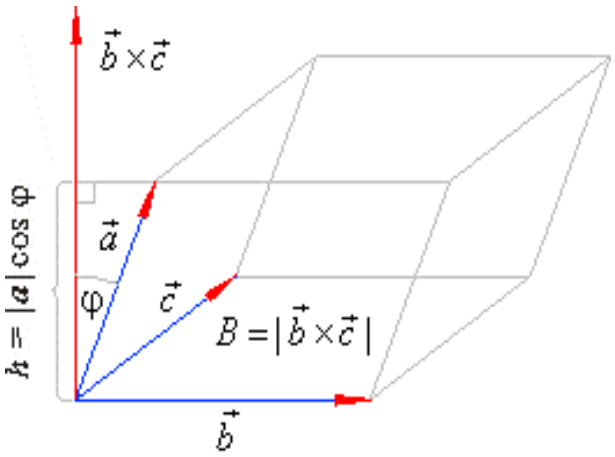
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Osobine mešovitog proizvoda:

a) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

b) Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora jednaka je zapremini paralelopipeda koji je konstruisan nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kao ivicama

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$



c) Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1), \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ i $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ se računa na sledeći način

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3.$$

Primer: Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(0,1,-1)$ i $\vec{c}=(2,1,0)$.

$V=1$