Diferencijalne jednadžbe

Zvonimir Šikić

Sadržaj

1 Uvodni primjeri

Diferencijalna jednadžba ona je jednadžba koja nepoznatu funkciju y povezuje s njezinim derivacijama $y', y'', \ldots$. Problem postavljanja i rješavanja diferencijalnih jednadžbi, čije nepoznate funkcije opisuju veze među fizikalnim veličinama koje nas zanimaju, jedan je od najčešćih problema matematičkog modeliranja u prirodnim znanostima i tehnici. U uvodnom poglavlju ilustrirat ćemo ga s nekoliko jednostavnijih primjera, a potom ćemo se sustavno pozabaviti striktno matematičkim problemom rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Najjednostavnije diferencijalne jednadžbe oblika

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

rješavamo neposrednom integracijom

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Zbog toga i rješavanje mnogo složenijih diferencijalnih jednadžbi često zovemo integracijom tih jednadžbi.

Osim ovih najjednostavnijih diferencijalnih jednadžbi vjerojatno poznajete i neke složenije. Ako je brzina rasta veličine y, koja ovisi o veličini t, proporcionalna samoj veličini y, onda ona zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dt} = ky. \tag{1.1}$$

Lako se provjerava da je rješenje te jednadžbe

$$y = y(t_0)e^{k(t-t_0)} \quad \text{ili} \quad y = y(0)e^{kt} \quad \text{ako je} \quad t_0 = 0. \tag{1.2}$$

Primijetimo da za svaku veličinu y, koja eksponencijalno ovisi o t, vrijedi

$$\frac{y(t+s)}{y(t)} = \frac{y(0)e^{k(t+s)}}{y(0)e^{kt}} = e^{ks}, \quad \text{tj.} \quad \frac{y(t+s)}{y(t)} = \frac{y(s)}{y(0)}.$$

To znači da postotak porasta (ili pada) veličine y na intervalu duljine s ne ovisi o početku tog intervala t. Taj tip rasta zovemo uniformnim, pa slijedi da je svaki eksponencijalni rast ujedno i uniformni. Vrijedi i obratno: svaki uniformni rast nužno je i eksponencijalni. Naime, iz uvjeta uniformnosti $y(t+s)/y(t) = y(s)/y(0)$ nakon deriviranja po s slijedi

$$y'(t+s) = \frac{y(t)y'(s)}{y(0)},$$

pa uvrštavanjem $s = 0$ i uvođenjem pokrate $k = y'(0)/y(0)$, dobivamo

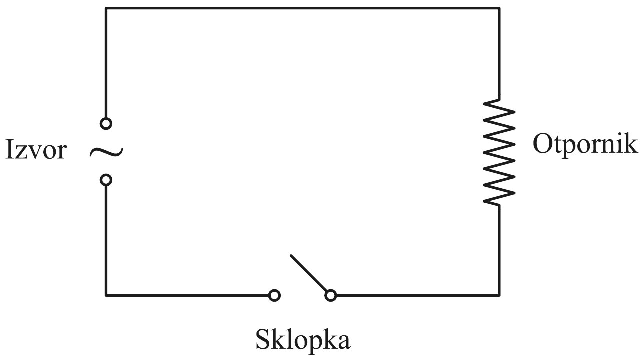
$$y'(t) = ky(t),$$

što znači da y eksponencijalno ovisi o t.

Mnoge fizikalne veličine y zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu (1.1), stoga eksponencijalno (uniformno) rastu u odnosu na t ako je $k > 0$, odnosno eksponencijalno (uniformno) padaju u odnosu na t ako je $k < 0$. S nekim fenomenima opisanim ovom diferencijalnom jednadžbom vjerojatno ste se susreli. Jedan od njih koji se također svodi na rješavanje diferencijalne jednadžbe (1.1), obrađujemo u slijedećem primjeru.

(A) **Jednadžba strujnog kruga**

Najjednostavniji strujni krug sadrži izvor električne energije, npr. generator ili bateriju te otpornik koji se koristi tom energijom, npr. žarulju.



Zatvorimo li sklopku, struja J poteći će otpornikom, što će uzrokovati pad napona (tj. električni potencijali na krajevima otpornika bit će različiti). Eksperimentalno se pokazuje da vrijedi Ohmov zakon:

$$U_R = RJ,$$

tj. pad napona duž otpornika proporcionalan je trenutnoj struji J. Konstanta proporcionalnosti R zove se otporom otpornika.

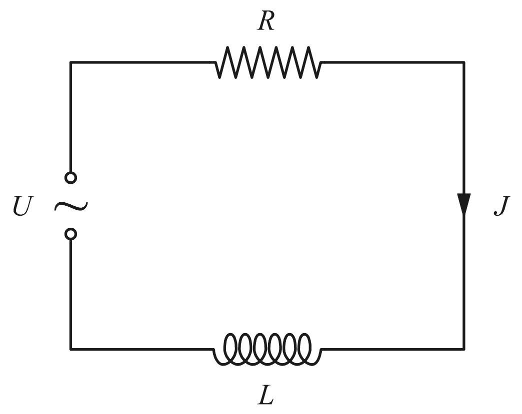
Važan element strujnog kruga može biti induktor. On se opire promjeni struje, analogno masi koja se opire promjeni gibanja. Eksperimentom se pokazuje da vrijedi sljedeći zakon:

$$U_L = L\frac{dJ}{dt},$$

tj. pad napona duž induktora proporcionalan je trenutnoj brzini promjene struje J. Konstanta proporcionalnosti L zove se indukcijom induktora.

Drugi Kirchhoffov zakon (o naponima) ustvrđuje da je ukupni pad napona duž zatvorenog strujnog kruga jednak nuli, tj. da je napon izvora kojim se napaja strujni krug jednak zbroju padova napona po ostalim elementima strujnoga kruga. Dakle, tok struje J u strujnom krugu s otporom R, indukcijom L i izvorom konstantnog napona U određen je diferencijalnom jednadžbom

$$U = L\frac{dJ}{dt} + RJ.$$



Ta se diferencijalna jednadžba razlikuje od diferencijalne jednadžbe (1.1), ali uz supstituciju $h = RJ - U$ ona će, zbog $\frac{dh}{dt} = R\frac{dJ}{dt}$, prijeći u jednadžbu

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{L}h,$$

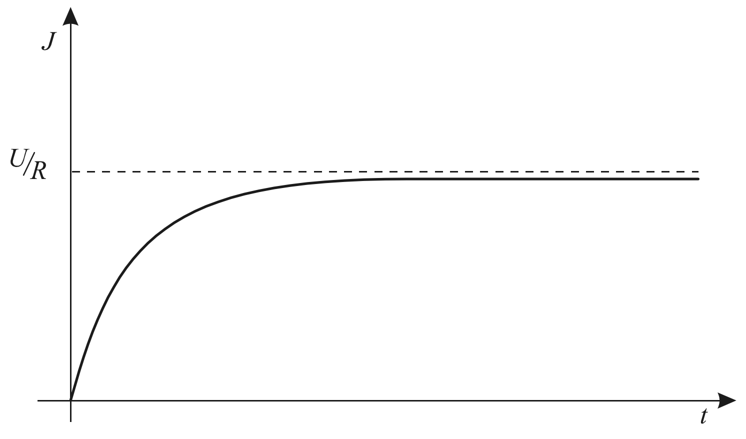
koja je oblika (1.1), uz $k = -\frac{R}{L}$. Njezino je rješenje oblika (1.2)

$$h = h(0)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Ako strujni krug priključujemo na izvor u trenutku $t = 0$, onda je $J(0) = 0$, tj. $h(0) = -U$, pa je

$$h = -Ue^{-\frac{R}{L}t}, \quad RJ - U = -Ue^{-\frac{R}{L}t}, \text{ tj. } J = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Graf funkcije $J(t)$ prikazan je na slici:



Ako je strujni krug priključen na izvor izmjeničnog napona $U = U_0 \cos \omega t$, onda $J(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U_0 \cos \omega t.$$

Ona je nešto složenija, ali se može riješiti upotrebom kompleksnih funkcija realnoga argumenta. Naime, stvarni napon $U_0 \cos \omega t$ možemo shvatiti kao realni dio kompleksnoga "napona"

$$\overline{U} = U_0 e^{i\omega t} = U_0 \cos \omega t + iU_0 \sin \omega t,$$

a stvarnu struju J kao realni dio kompleksne struje

$$\overline{J} = J + iH.$$

Ako je $\overline{J}$ rješenje kompleksne diferencijalne jednadžbe

$$L\frac{d\overline{J}}{dt} + R\overline{J} = \overline{U},$$

onda je

$$L\frac{d(J+iH)}{dt} + R(J+iH) = U_0 \cos \omega t + iU_0 \sin \omega t,$$
$$\left(L\frac{dJ}{dt} + RJ\right) + i\left(L\frac{dH}{dt} + RH\right) = U_0 \cos \omega t + iU_0 \sin \omega t,$$

odakle slijedi

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U_0 \cos \omega t.$$

Realni dio rješenja kompleksne diferencijalne jednadžbe jest rješenje naše početne realne diferencijalne jednadžbe. Dakle, riješimo li kompleksnu diferencijalnu jednadžbu, riješili smo naš problem. No, lako vidimo da je funkcija $\overline{J} = J_0 e^{i(\omega t+\beta)}$ (s još neodređenim realnim parametrima J_0 i β) jedno rješenje naše kompleksne diferencijalne jednadžbe ako je

$$Liw\overline{J} + R\overline{J} = \overline{U}, \text{ tj. ako je } \overline{J} = \frac{\overline{U}}{R + iLw}.$$

To će biti ispunjeno ako je

$$|\overline{J}| = \left|\frac{\overline{U}}{R+iLw}\right| = \frac{|\overline{U}|}{|R+iLw|}, \text{ tj. } J_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}$$

i ako je

$$\arg \overline{J} = \arg \frac{\overline{U}}{R+iLw} = \arg \overline{U} - \arg(R+iLw),$$

tj.

$$\omega t + \beta = \omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}, \quad \beta = -\operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}.$$

Dakle, jedno kompleksno rješenje naše kompleksne diferencijalne jednadžbe je

$$\overline{J} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} e^{i\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{L\omega}{R}\right)},$$

odakle slijedi da je i jedno rješenje polazne realne diferencijalne jednadžbe njegov realni dio

$$J = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{L\omega}{R}\right).$$

Sva ostala rješenja te diferencijalne jednadžbe naći ćemo sustavnim postupkom u sljedećem poglavlju. Ovdje smo samo željeli prikazati prijelaz u kompleksno područje kao značajnu tehniku za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. S njom ćemo se sustavno koristiti u jednom od sljedećih poglavlja.

(B) **Jednažba kosog hica**

Newtonov drugi zakon gibanja

$$\overrightarrow{F} = m\vec{a},$$

koji matematički modelira gibanje čestice u polju sile $\overrightarrow{F}$, sustav je triju diferencijalnih jednadžbi. Naime, razložimo li vektor sile $\overrightarrow{F}$ na njegove Kartezijeve komponente

$$F_x, F_y, F_z,$$

a vektor akceleracije na njegove Kartezijeve komponente

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

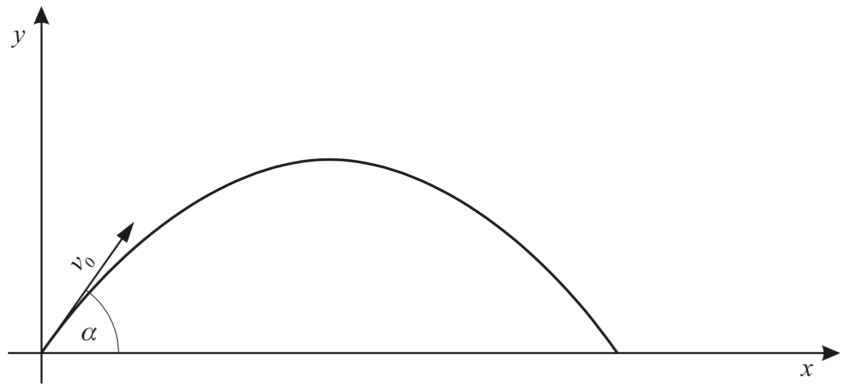
onda iz $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ dobijemo tri diferencijalne jednadžbe

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

koje opisuju kako položaj čestice $((x(t), y(t), z(t))$ ovisi o vremenu t u polju sile (F_x, F_y, F_z). Riješiti problem gibanja čestice u zadanom polju sile $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$, znači riješiti gornji sustav od tri diferencijalne jednadžbe.

Jednadžba kosog hica je dobro poznat primjer. Smjestimo koordinatni sustav tako da je os y paralelna sa silom teže mg, dok je os x vodoravna i s osi y tvori ravninu u kojoj se ispaljuje projektil. Ako se on ispaljuje pod kutom α i s početnom brzinom v_0 (za $t = 0$), onda diferencijalne jednadžbe njegova gibanja izgledaju ovako:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg, \quad \text{tj.} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$



Rješenje tih jednadžbi

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad \text{i} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha,$$

koje zadovoljava uvjete $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$, opisuje gibanje projektila. Njegova putanja parametarski je određena tim jednadžbama. Izračunamo li parametar t iz prve jednadžbe i uvrstimo ga u drugu, dobit ćemo eksplicitnu jednadžbu putanje

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\operatorname{tg}\alpha)x,$$

koja je oblika $y = ax^2 + b$, dakle parabola.

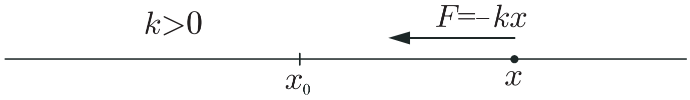
Treća diferencijalna jednadžba za z nije se pojavila u prethodnom slučaju jer je gibanje ravninsko, pa smo koordinatne osi x, y i z mogli postaviti tako da se ravnina xy poklapa s ravninom gibanja, što znači da je $z(t) = 0$. Ako istražujemo pravocrtno gibanje, onda koordinatnu os x možemo postaviti u pravac gibanja, pa u tom slučaju samo jedna diferencijalna jednadžba

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

opisuje gibanje jer je tada $y(t) = z(t) = 0$. Ako intenzitet kojim sila djeluje na česticu ovisi samo o položaju čestice x, a ne ovisi o vremenu t, onda je F funkcija jedne varijable x. Jednostavan slučaj, u kojem je $F = -kx$ ($k > 0$), dobro je poznat:

(C) **Jednadžba harmonijskog oscilatora**

Gibanje harmonijskog oscilatora (npr. opruge) jest gibanje pod utjecajem sile koja je proporcionalna otklonu od ravnotežnog položaja $x = 0$, a usmjerena je prema tom položaju.



Harmonijske oscilacije opisane su stoga jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ (k > 0)$$

ili, uz uobičajenu pokratu $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, jednažbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x. \tag{1.3}$$

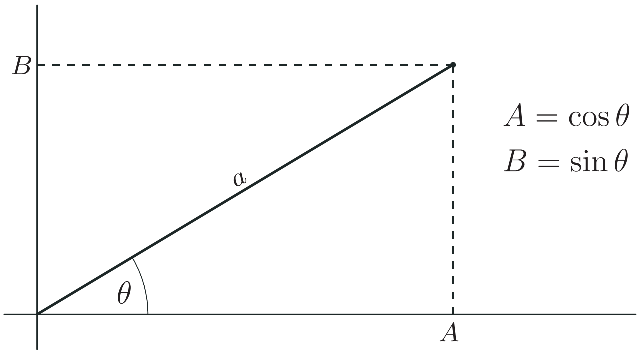
Poznato je da svako rješenje ove jednadžbe ima oblik

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{1.4}$$

gdje su A i B proizvoljne konstante. Rješenja se mogu zapisati i u obliku

$$x = a\cos(\omega t - \vartheta), \tag{1.5}$$

gdje su (a, ϑ) polarne koordinate od (A, B):



Uz početne uvjete $x(0) = x_0$ i $\dfrac{dx}{dt}(0) = v_0$ imamo jedinstveno rješenje

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{1.6}$$

Fizičari očekuju da je gibanje čestice u zadanom polju sile potpuno determinirano ako su određeni početni položaj i početna brzina čestice. Jedinstvenost rješenja (1.6) pokazuje da je taj zahtjev zadovoljen.

Diferencijalnu jednadžbu harmonijskog oscilatora možemo riješiti i na sljedeći način. Napišemo li jednadžbu (1.3) u obliku

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega^2 x = 0$$

i pomnožimo je s $\dfrac{dx}{dt}$, dobit ćemo

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega^2 x\frac{dx}{dt} = 0.$$

Uzmemo li u obzir da je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt}x^2 = 2x\frac{dx}{dt},$$

slijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) = 0,$$

tj.

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E, \tag{1.7}$$

gdje je E (kao zbroj kvadrata) pozitivna konstanta. Jednadžbu (1.7), koju smo izveli iz jednadžbe harmonijskog oscilatora (1.3), zovemo jednadžbom energije harmonijskog oscilatora. Naime,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{i} \quad E_p = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

jesu kinetička i potencijalna energija harmonijskog oscilatora, pa jednadžba (1.7) znači da se ukupna energija harmonijskog oscilatora ne mijenja, $E_k + E_p = E = konstanta$. Zapamtimo da se jednadžba energije (1.7) izvodi iz Newtonove jednadžbe gibanja (1.3) množenjem sa $\frac{dx}{dt}$ te da se gledano matematički radi o svođenju jednadžbe drugog reda (u kojoj se pojavljuje druga derivacija) na jednostavniju jednadžbu prvog reda (u kojoj se pojavljuje samo prva derivacija). Jednadžbu prvoga reda (1.7) lako je riješiti. Iz nje slijedi:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} - \omega^2x^2 = \omega^2\left(\frac{2E}{\omega^2m} - x^2\right),$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{\frac{2E}{\omega^2m} - x^2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{uz} \quad a^2 = \frac{2E}{\omega^2m}.$$

Dakle,

$$t = \frac{1}{\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x}{a} + c,$$

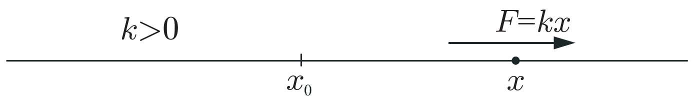
$$\omega(t - c) = \arcsin\frac{x}{a},$$

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t - \omega c),$$

$$x = a\sin(\omega t - \gamma),$$

uz $\gamma = \omega c$ i $a^2 = \frac{2E}{\omega^2m}$. Naravno, to je poznato rješenje (1.5), uz $\gamma = \vartheta - \frac{\pi}{2}$. Uočimo da je kvadrat amplitude oscilacija a^2 proporcionalan energiji harmonijskog oscilatora E.

Na sličan način mogli bismo istražiti gibanje čestice pod utjecajem sile, čiji je iznos proporcionalan otklonu od ravnotežnog položaja $x = 0$, a koja je usmjerena nasuprot tom položaju.



Gibanje je opisano jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx \quad (k>0)$$

ili, uz uobičajenu pokratu $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - m\omega^2 x = 0. \tag{1.8}$$

Jednadžba (1.8) razlikuje se od jednadžbe harmonijskog oscilatora samo u predznaku uz drugi član i može se riješiti na isti način. Množenjem s $\dfrac{dx}{dt}$ dobit ćemo:

$$\begin{aligned}
m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - m\omega^2 x\frac{dx}{dt} &= 0,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right) &= 0,\\
\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 &= E,
\end{aligned}$$

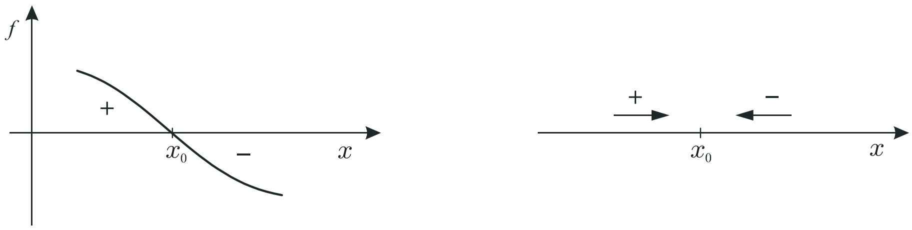
$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \frac{2E}{m} + \omega^2x^2 = \omega^2\left(\frac{2E}{\omega^2 m} + x^2\right),\\
\frac{dx}{dt} &= \omega\sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m} + x^2},\\
\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \text{uz} \quad a^2 = \frac{2E}{\omega^2 m},\\
t &= \frac{1}{\omega}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} + c,\\
\omega(t-c) &= \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a},\\
\frac{x}{a} &= \operatorname{sh}(\omega t - \omega c),\\
x &= a\operatorname{sh}(\omega t - \gamma), \quad \text{uz} \quad \gamma = \omega c \quad \text{i} \quad a^2 = \frac{2E}{\omega^2 m}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

(D) **Linearizirana jednadžba gibanja u točki stabilne ravnoteže**

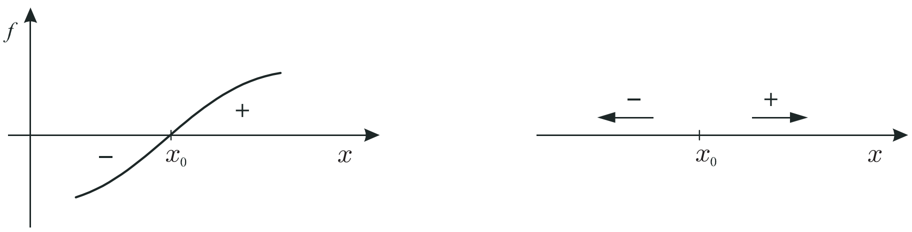
Opći slučaj pravocrtnog gibanja, u polju sile čiji intenzitet ne ovisi o vremenu, matematički se modelira diferencijalnom jednadžbom

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x). \tag{1.10}$$

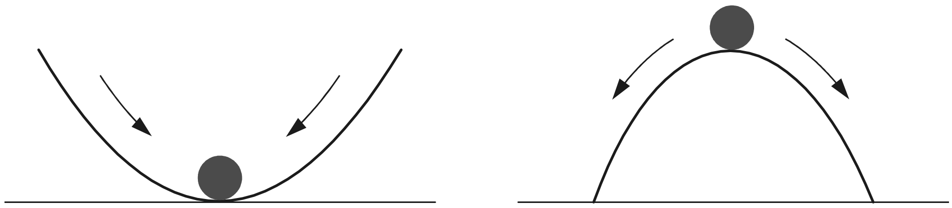
Ako funkcija sile $f(x)$ iščezava u točki x_0, $f(x_0) = 0$, onda tu točku zovemo **ravnotežnim položajem** gibanja. Naime, tada konstantna funkcija $x = x_0$ zadovoljava jednadžbu gibanja, pa u takvom polju sile čestica može mirovati u položaju x_0. Ako je k tome $f'(x_0) < 0$ (f pada u x_0), radi se o **stabilnom ravnotežnom položaju** jer je sila pozitivna za x blizu x_0 i $x < x_0$, dok je negativna za x blizu x_0 i $x > x_0$. Stoga sila gura česticu prema položaju x_0, čim je čestica u blizini tog položaja:



Ako je $f'(x_0) > 0$ (f raste u x_0), radi se o **nestabilnom položaju ravnoteže**, jer sila u tom slučaju gura česticu od položaja x_0, čim se ona imalo odmakne od tog položaja:



Ove dvije mogućnosti lijepo ilustrira čestica na dnu udoline i na vrhu brijega, u polju sile teže.



Jednadžbu (1.10) u općem slučaju nije lako riješiti. Aproksimativno se rješenje može naći tako da funkciju $f(x)$, u ravnotežnom položaju x_0, zamijenimo njezinom linearnom aproksimacijom $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tj. njezinim Taylorovim polinomom prvoga reda. U ravnotežnom je položaju $f'(x_0) = 0$, pa iz jednadžbe (1.10) dobijamo jednadžbu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.11}$$

koju zovemo linearnom aproksimacijom jednadžbe (1.10) oko ravnotežnog položaja x_0. Ako je x_0 položaj stabilne ravnoteže, onda je $f'(x_0) < 0$, pa uvrštavanjem $y = x - x_0$ uz pokratu $k = -f'(x_0) > 0$, dobijamo poznatu jednadžbu harmonijskih oscilacija

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky, \quad k > 0.$$

Dakle, u onoj mjeri u kojoj je točna linearna aproksimacija sile, čestica harmonijski oscilira oko položaja stabilne ravnoteže, u skladu s rješenjem (1.4) linearizirane jednadžbe. Vremenski period jedne linearizirane oscilacije iznosi $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-f'(x_0)/m}}$. Čestica koja se giba po točnom zakonu (1.10) također oscilira oko položaja stabilne ravnoteže x_0, ali s vremenskim periodom koji ovisi o amplitudi oscilacija (kao što ćemo vidjeti na primjeru njihala). Kako amplitude postaju sve manje i teže prema nuli, tako i period teži prema periodu lineariziranih oscilacija.

U slučaju da je ravnotežni položaj x_0 nestabilan, tj. $f'(x_0) > 0$, uvrštavanjem $y = x - x_0$ uz pokratu $k = f'(x_0) > 0$, dobivamo jednadžbu

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = ky, \quad k > 0,$$

čije je rješenje (usp. (1.9))

$$y = x - x_0 = a \operatorname{sh}\left(\sqrt{f'(x_0)/m}(t-c)\right). \tag{1.12}$$

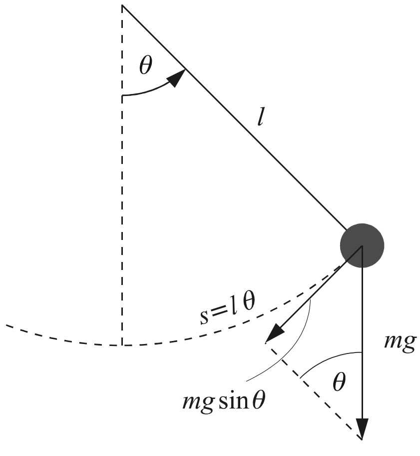
Za većinu početnih uvjeta bit će $a \neq 0$ i rješenje (1.12) težit će k $\pm\infty$, za $t \to \infty$. To pokazuje nestabilnost ravnotežnog položaja $x = x_0$ (tj. $y = 0$). Dakle, linearizacija u slučaju nestabilne ravnoteže nije naročito korisna jer gotovo sva rješenja (1.12) na kraju napuste područje oko x_0 u kojem je linearna aproksimacija valjana.

Ova opća razmatranja ilustrirat ćemo na primjeru jednostavnog njihala.

(E) **Linearizirana jednadžba njihala**

Pretpostavimo da na klatnu duljine l (i zanemarive mase) visi čestica mase m. Gibajući se po kružnici radijusa l, čestica prevaljuje put $s = l\vartheta$. Tangencijalna komponenta sile teže, koja jedina utječe na gibanje po kružnoj putanji, iznosi $mg\sin\vartheta$, pa iz Newtonovog zakona slijedi diferencijalna jednadžba njihala

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mg\sin\vartheta \tag{1.13}$$



(minus zbog suprotne usmjerenosti tangencijalne komponente i kuta ϑ). Funkcija sile $f(\vartheta) = -mg\sin\vartheta$ određuje ravnotežni položaj $\vartheta = 0$, jer je $f(0) = 0$. Radi se o položaju stabilne ravnoteže jer je $f'(0) = -mg < 0$. Linearizirana jednadžba njihala glasi

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\vartheta,$$

a njezino je rješenje oblika (1.6)

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + v_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

gdje je ϑ_0 početni otklon njihala, a v_0 njegova početna brzina. (Ukoliko je početna brzina $v_0 = 0$, tj. ukoliko je klatno slobodno ispušteno iz početnog položaja $\vartheta = \vartheta_0$, gibanje je opisano funkcijom $\vartheta = \vartheta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$.) Dakle, vremenski period jednog punog lineariziranog titraja iznosi

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Gornje jednadžbe za ϑ i T_0 dobro opisuju gibanje njihala i periode njihovih oscilacija, ako je otklon od ravnotežnog položaja malen. Stari zidni satovi s klatnom imaju male otklone klatna upravo zato da bi periodi oscilacija T, koji su vremenske jedinice, bili približno jednaki (konstanti T_0 dakle i međusobno). Ukratko, uz male otklone njihalo može poslužiti kao dobar mehanički sat.

Primijetimo da funkcija sile $f(\vartheta) = -mg\sin\vartheta$ ima još jedan ravnotežni položaj $\vartheta = \pi$. Radi se o položaju nestabilne ravnoteže jer je $f'(\pi) = mg > 0$. Linearizirana jednadžba njihala oko nestabilnog položaja ravnoteže na vrhu glasi

$$\frac{d^2(\vartheta - \pi)}{dt^2} = \frac{g}{l}(\vartheta - \pi),$$

a njezina su rješenja oblika (1.12)

$$\vartheta - \pi = a \operatorname{sh}\sqrt{\frac{g}{l}}(t - c), \quad \text{tj.}$$

$$\vartheta = \pi + a \operatorname{sh}\sqrt{\frac{g}{l}}(t - c).$$

Za većinu početnih uvjeta bit će $a \neq 0$, pa će njihalo napustiti položaj nestabilne ravnoteže na vrhu ($\vartheta = \pi$), odlazeći u područje u kojem ova aproksimacija nije valjana.

(F) **Jednadžba njihala**

Pokušat ćemo riješiti (nelinearizirani) jednadžbu njihala (1.13)

$$m\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -m\frac{g}{l}\sin\vartheta.$$

Primijenit ćemo standardni postupak množenja s $\frac{d\vartheta}{dt}$ kojim snizujemo red diferencijalne jednadžbe, izvodeći odgovarajuću jednadžbu energije njihala (prvoga reda):

$$m\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{mg}{l}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{mg}{l}\cos\vartheta\right) = 0,$$
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{mg}{l}\cos\vartheta = E.$$

Prvi član lijeve strane kinetička je energija kružnoga gibanja njihala, dok je drugi član njegova potencijalna energija. Pretpostavimo li da je njihalo slobodno ispušteno iz početnog položaja ϑ_0 bez početne brzine, slijedi da je $\frac{d\vartheta}{dt}(\vartheta_0) = 0$, pa je $E = -\frac{mg}{l}\cos\vartheta_0$.

Dakle,

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0},$$
$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{\pm\sqrt{\frac{l}{2g}}}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}},$$
$$t = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.$$

Neodređeni integral podintegralne funkcije $(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)^{-\frac{1}{2}}$ nije moguće izraziti uz pomoć elementarnih funkcija, pa ćemo se pri izračunavanju poslužiti beskonačnim redovima. Ograničimo se pritom na izračunavanje četvrtine perioda jedne pune oscilacije T, koja je jednaka vremenu potrebnom da njihalo iz početnog položaja $\vartheta = \vartheta_0$ dođe u ravnotežni položaj $\vartheta = 0$:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.$$

Iz poznatih identiteta

$$\cos\vartheta = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$
$$\cos\vartheta_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2},$$

slijedi

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}.$$

Provedemo li supstituciju

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\vartheta_0}{2}\sin\varphi,$$

tj.

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = k\sin\varphi, \quad k = \sin\frac{\vartheta_0}{2},$$

lako nalazimo da je

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\frac{d\vartheta}{d\varphi} = k\cos\varphi,$$
$$d\vartheta = \frac{2k\cos\varphi}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\,d\varphi,$$
$$d\vartheta = \frac{2k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi.$$

pa naš integral postaje

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{k^2-k^2\sin^2\varphi}}\frac{2k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k\cos\varphi}\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k = \sin\frac{\vartheta_0}{2}.\end{aligned}$$

Primjenom Newtonove binomne formule nalazimo

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi + \dots$$

Taj red konvergira za $k^2\sin^2\varphi < 1$, dakle za svaki $\varphi \in [0, 2\pi]$, jer je $k^2 < 1$. Integracijom nalazimo:

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}1d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi\,d\varphi + \right. \\ &\qquad\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi\,d\varphi + \dots\right] \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k^2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^2\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2} + \dots\right],\end{aligned}$$

zato što je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\frac{\pi}{2}.$$

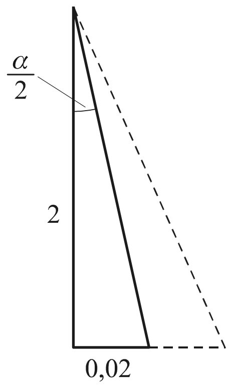
Dakle

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\ldots\right].$$

To je točna vrijednost vremenskog perioda njihala, odnosno jedinica vremena zidnog sata s klatnom. Vidimo da ona ovisi o $k = \sin\dfrac{\vartheta_0}{2}$, tj. o amplitudi njihala ϑ_0. Kako se smanjuje amplituda, smanjuje se i jedinica vremena, što znači da sat nije savršeno precizan. Ako je maksimalni otklon njihala α, onda je njegov maksimalni period upravo gore izračunati T uz $k = \sin\frac{\alpha}{2}$. Minimalni period jest granični period, koji se realizira kada otklon njihala teži prema nuli, tj. kada k teži prema nuli. On je jednak lineariziranom periodu $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. To znači da je razlika najveće i najmanje jedinice vremena, koju realizira njihalo s maksimalnim otklonom α, jednaka $T_\alpha - T_0$. Maksimalna relativna promjena, u odnosu na standardnu lineariziranu jedinicu T_0, iznosi:

$$\begin{aligned}
\frac{T_\alpha - T_0}{T_0} &= \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\ldots\right]-2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \\
&= \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\ldots\right]}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\cdots < \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^6+\ldots = \frac{\frac{1}{4}k^2}{1-k^2} = \\
&= \frac{\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da zidni sat s klatnom duljine 2 m, koje se odmiče od ravnotežnog položaja za ± 4 cm, što približno odgovara vrijednosti $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 0.01$ (vidi sliku), ima relativnu pogrešku koja iznosi $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}0.01^2 = \dfrac{1}{40000}$. To znači da je njegova pogreška u toku 1 sata, tj. 3600 sekundi, manja od $\dfrac{1}{40000}\cdot 4000 = \dfrac{1}{10}$ sekunde.

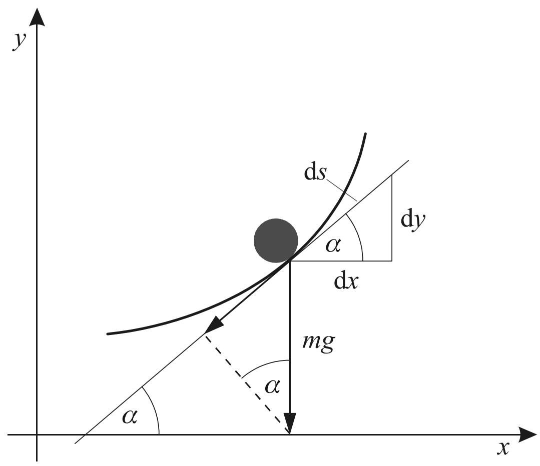


$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{0.02}{2} = 0.01$$

(G) **Jednadžba gibanja u polju sile teže (po zadanoj krivulji)**

Gibanje čestice njihala po kružnoj putanji samo je jedan posebni slučaj gibanja čestice po zadanoj krivulji u polju sile teže. Mjerimo li duljinu luka krivulje s tako da je $s > 0$ za $x > 0$, opću jednadžbu gibanja izvodimo ovako:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\alpha = -mg\frac{dy}{ds}. \tag{1.14}$$



Standardnim postupkom izvest ćemo iz jednadžbe (1.14) odgovarajuću jednadžbu energije:

$$m\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = -mg\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mgy\right) = 0,$$
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mgy = E.$$

Prvi je član kinetička energija dok je drugi član potencijalna energija u polju sile teže $\vec{g}$. Iz jednadžbe energije lako ćemo izračunati brzinu čestice, $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - 2gy}$. Ako je čestica ispuštena s visine y_0 bez početne brzine, $\frac{ds}{dt}(y_0) = 0$, onda je $\frac{E}{m} = gy_0$, pa je

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{y_0 - y}. \tag{1.15}$$

Primijetimo da brzina čestice ne ovisi o putanji nego samo o visinskoj razlici $y_0 - y$. Daljnje rješavanje jednadžbe (1.15) ovisi o zadanoj krivulji $y = y(x)$.

U slučaju njihala vrijedi $s = l\vartheta$ i $\alpha = \vartheta$, pa imamo jednadžbu njihala (1.13) kao posebni slučaj opće jednadžbe (1.14).

(H) **Jednadžba tautohrone**

Njihalo možemo koristiti kao sat zato što je jednadžba gibanja po kružnoj putanji

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\vartheta,$$

za male ϑ, dobro aproksimirana jednadžbom harmonijskih oscilacija

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -m\frac{g}{l}l\vartheta = -m\frac{g}{l}s,$$

koja ima konstantne vremenske periode, neovisne o amplitudi oscilacija. Za razliku od kružne putanje koja ima **približno** jednake vremenske periode, putanja $y = y(x)$ imat će uistinu jednake periode ako se njena jednadžba

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\frac{dy}{ds}$$

točno poklapa s jednadžbom harmonijskog oscilatora

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s.$$

Takva se putanja zove tautohrona (grč. "isto vrijeme") i usporedbom gornjih jednadžbi vidimo da je to svaka krivulja $y = y(x)$ koja zadovoljava jednadžbu

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{a}s$$

za neku pozitivnu konstantu $\frac{1}{a}$. Zbog $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$, iz te jednadžbe slijedi i odgovarajuća jednadžba za x:

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - s^2}.$$

Integriramo li jednadžbe za x i y po s, dobit ćemo

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}\int \sqrt{a^2-s^2}ds = \frac{1}{a}\left(\frac{s}{2}\sqrt{a^2-s^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{s}{a}\right)+c_1 = \\ &= \frac{a}{2}\frac{s}{a}\sqrt{1-\left(\frac{s}{a}\right)^2}+\frac{a}{2}\arcsin\frac{s}{a}+c_1, \\ y &= \frac{1}{2a}s^2+c_2. \end{aligned}$$

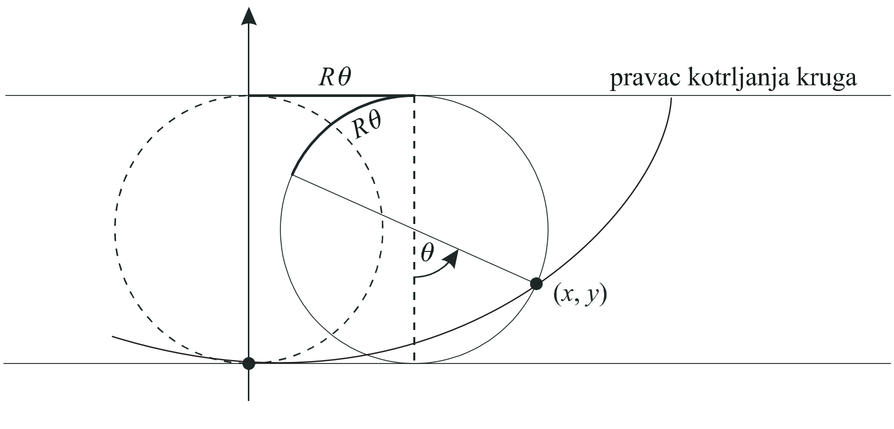
To su parametarske jednadžbe tautohrone (s parametrom s). Prećemo li na novi parametar ϑ, supstitucijom $\frac{s}{a}=\sin\frac{\vartheta}{2}$, dobit ćemo

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}+\frac{a}{2}\frac{\vartheta}{2}+c_1 = \frac{a}{4}(sin\vartheta+\vartheta)+c_1, \\ y &= \frac{a}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}+c_2 = \frac{a}{4}(1-\cos\vartheta)+c_2, \end{aligned}$$

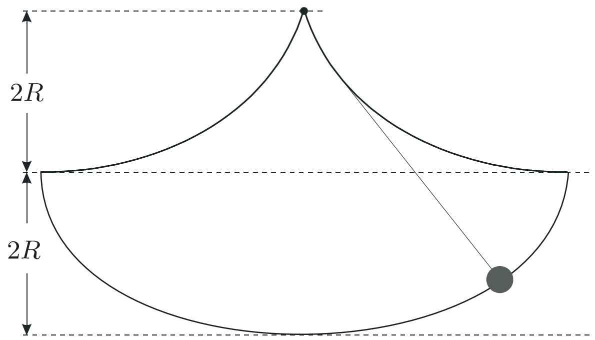
jer je $\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}=\frac{\sin\vartheta}{2}$ i $\sin^2\frac{\vartheta}{2}=\frac{1-\cos\vartheta}{2}$.

Uvedemo li pokratu $R=\frac{a}{4}$ i postavimo točku s parametrom $\vartheta=0$ u ishodište (tako da je $c_1=c_2=0$, vidimo da je tautohrona zapravo cikloida (usp. sliku):

$$x = R\vartheta + R\sin\vartheta, \quad y = R - R\cos\vartheta.$$

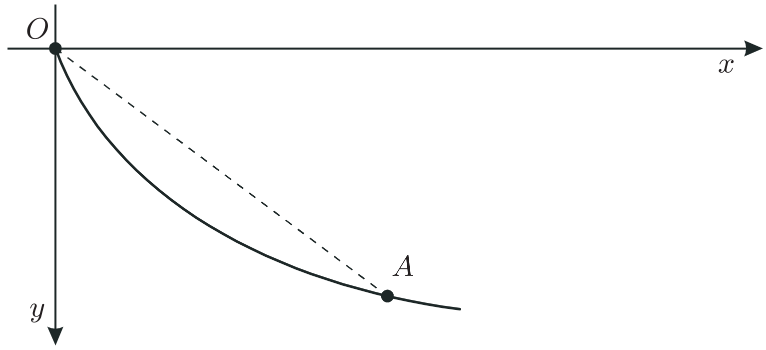


Dakle, teorijski savršen sat realizira se gibanjem čestice po cikloidi. Zanimljiva je Huygensova konstrukcija njihala, čiji se uteg giba točno po cikloidi. Uteg pričvrstimo na kraj uzice duljine $4R$, a nju objesimo o spojnicu dvaju krutih cikloida S, kao na donjoj slici. Dok se njihalo klati lijevo-desno, uzica će se priljubljivati uz lijevu i desnu cikloidu. Huygens je pokazao da se uteg pritom giba po trećoj cikloidi, pa takvo cikloidno njihalo predstavlja teorijski savršen sat.



(I) **Jednadžba brahistohrone**

Pretpostavimo da česticu ispustimo u točki O te da ona pod utjecajem sile teže klizi po zadanoj krivulji od točke O do točke A. Kakva mora biti zadana krivulja da čestica najbrže stigne od točke O do točke A? Traženu krivulju zovemo brahistohrona (grč. “najkraće vrijeme”).



Prva je misao da bi to trebala biti najkraća krivulja koja spaja O i A, dakle dužina OA. Međutim, mi želimo postići najkraće vrijeme, a moguće je da se najkraće vrijeme ne postiže na najkraćem putu. Naime, upotrijebimo li put koji kreće iz O strmije od spojnice OA, čestica će zbog visinske razlike postići veću brzinu (usp. (1.15)) od one na spojnici OA, barem u početku, pa će možda zakrivljeni put prijeći brže no kraći nezakrivljeni.

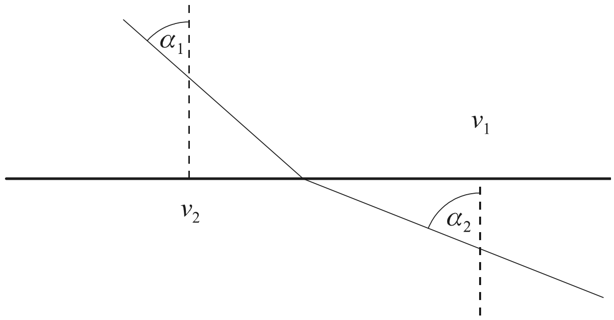
Razmotrimo dakle putanju od O do A. Odabrali smo koordinatni sustav s ishodištem u početnoj točki gibanja O i sa osi y u smjeru sile teže. Iz (1.15) slijedi da je brzina čestice u točki s koordinatama (x, y)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{y}. \tag{1.16}$$

jer je $y_0 = 0$, a y mijenja predznak u odnosu na (1.15) zbog suprotne usmjerenosti osi y. To vrijedi za svaku krivulju. Što je karakteristika brahistohrone, vremenski najkraće krivulje? Brzina čestice mijenja se na svakoj razini y prema zakonu (1.16). No poznato je (Snellov zakon loma) da čestica koja na određenoj razini promijeni brzinu v_1 u v_2 ide vremenski najkraćom putanjom ako je

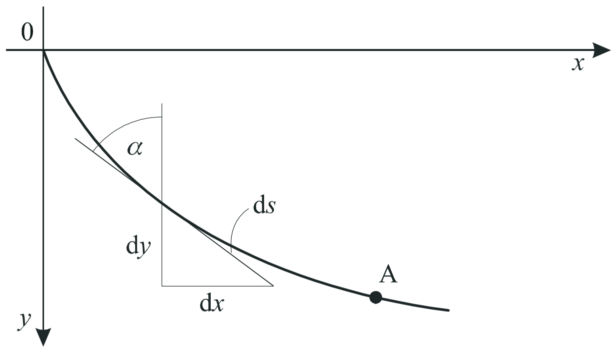
$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2},$$

$$\frac{\sin a_1}{v_1} = \frac{\sin a_2}{v_2}$$



tj. ako se omjer $\dfrac{\sin\alpha}{v}$ ne promijeni s promjenom brzine v i kuta α. To znači da na vremenski najkraćoj putanji, brahistohroni, vrijedi

$$\frac{\sin\alpha}{v} = k,$$



gdje je k neka konstanta. Budući da je

$$\sin\alpha = \frac{dx}{ds} \text{ i } v = \frac{ds}{dt}$$

slijedi da brahistohrona zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dx}{ds} = k\frac{ds}{dt}, \text{ tj. } \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = k\frac{ds}{dt}.$$

Iz (1.16) i činjenice da je $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{\dfrac{dx^2+dy^2}{dx^2}} = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = k\sqrt{2g}\sqrt{y},$$

što uz pokratu $K = \dfrac{1}{2k^2g}$ daje

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{K}{y}}.$$

Riješimo li jednadžbu po $\dfrac{dx}{dy}$, dobit ćemo

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{K}{y},$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{K}{y}-1}=\sqrt{\frac{K-y}{y}}$$

ili

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{K-y}}.$$

Integracijom po y lako nalazimo kako x ovisi o y:

$$x=\int\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{K-y}}dy.$$

Taj ćemo integral najlakše riješiti supstitucijom

$$y=K\sin^2 u.$$

Tada je

$$\begin{aligned}x&=\int\frac{\sqrt{K}\sin u}{\sqrt{K}\sqrt{1-\sin^2 u}}2K\sin u\cos u du=\\&=\int 2K\sin^2 u du=\int 2K\frac{1}{2}(1-\cos 2u)du=\\&=K\int(1-\cos 2u)du=\frac{K}{2}(2u-\sin 2u)+c.\end{aligned}$$

Budući da je $x=0$ za $y=0$ (tj. za $u=0$), slijedi da je $c=0$, pa je

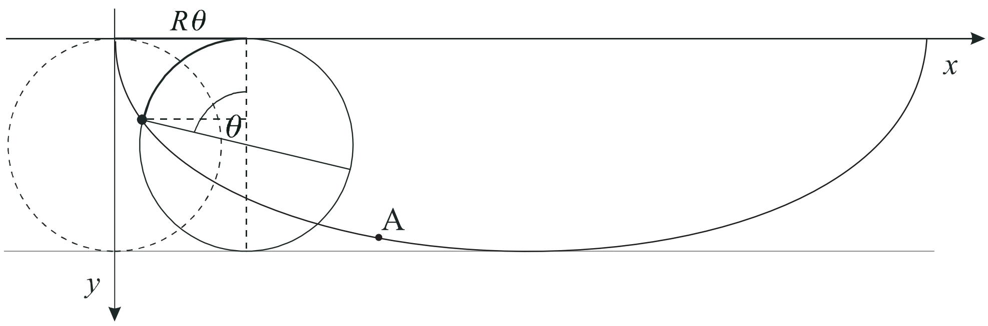
$$x=\frac{K}{2}(2u-\sin 2u),$$

uz

$$y=K\sin^2 u=\frac{K}{2}(1-\cos 2u).$$

To su parametarske jednadžbe tražene krivulje. Prijeđemo li na novi parametar $\vartheta=2u$, uz pokratu $\dfrac{K}{2}=R$, vidimo da je brahistohrona zapravo cikloida (usp. sliku)

$$x=R\vartheta-R\sin\vartheta,\quad y=R-R\cos\vartheta.$$



Konstanta R određena je točkom A. Naime, ako su (x_1, y_1) koordinate od A, onda je

$$x_1 = R(\vartheta_1 - \sin\vartheta_1),$$
$$y_1 = R(1 - \cos\vartheta_1)$$

za neki parametar ϑ_1. Ove dvije jednadžbe određuju kako parametar ϑ_1, tako i konstantu R.