# 2

# Separabilna i linearna jednadžba prvog reda

U prethodnom poglavlju pokazali smo da su matematički modeli mnogih fizikalnih sustava diferencijalne jednadžbe. Rješavajući ih, ustanovili smo kako se ponašaju ti sustavi. U ovom poglavlju posvetit ćemo se striktnije matematičkom problemu nalaženja općih metoda za rješavanje nekih jednostavnijih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda.

Redom diferencijalne jednadžbe zovemo red najviše derivacije koja se pojavljuje u jednadžbi. Dakle, diferencijalna jednadžba prvoga reda, uz poznate funkcije od $x$ i nepoznatu funkciju $y$, koja ovisi o $x$, sadrži samo njezinu prvu derivaciju $y'$, pa se može zapisati u obliku

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

a katkada i u jednostavnijem obliku

$$y' = f(x, y).$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (2.1) na intervalu $(a, b)$ svaka je funkcija $y = h(x)$ koja je derivabilna na tom intervalu i koja zadovoljava jednadžbu (2.1) za svaki $x \in (a, b)$. To znači da (2.1) postaje identitet na intervalu $(a, b)$ ako nepoznanicu $y$ zamijenimo sa $h(x)$, a $y'$ sa $h'(x)$. Rješenje može biti zadano i implicitno, jednadžbom $H(x, y) = 0$, koju tada zovemo implicitnim rješenjem diferencijalne jednadžbe (2.1) (za razliku od eksplicitnoga rješenja $h(x)$).

### Primjer 2.1.

a) Provjerimo da je $y = x^3$ rješenje jednadžbe $xy' = 3y$ na čitavom području realnih brojeva.

b) Provjerimo da je $x^2 + y^2 = 1$ implicitno rješenje jednadžbe $yy' = -x$ na intervalu $(-1, 1)$.

### Rješenje:

a) Uvrštavanjem $y = x^3$ i $y' = 3x^2$ u jednadžbu $xy' = 3y$ dobijamo identitet $3x^3 = 3x^3$ na cijelom području $\mathbb{R}$.

b) Jednadžba $x^2 + y^2 = 1$ implicitno definira dvije neprekinute funkcije $y(x)$ na intervalu $(-1, 1)$. Implicitnim deriviranjem nalazimo

$$2x + 2yy' = 0,$$

tj.

$$yy' = -x \text{ za svaki } x \in (-1, 1).$$

Slijedi da obje funkcije $y(x)$, implicitno zadane s $x^2 + y^2 = 1$, zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu $yy' = -x$ na intervalu $(-1, 1)$ što znači da je $x^2 + y^2 = 1$ implicitno rješenje te jednadžbe na tom intervalu.

□

## Primjer 2.2.

Nađimo sva rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = \cos x$ na $\mathbb{R}$.

## Rješenje:

Sve antiderivacije funkcije $\cos x$ razlikuju se za konstantu, pa je svako rješenje naše jednadžbe oblika $y = \sin x + c$ . Za svaki $c \in \mathbb{R}$ dobivamo po jedno rješenje, a time su ujedno obuhvaćena i sva rješenja naše jednadžbe. □

Prethodni primjer tipičan je za većinu diferencijalnih jednadžbi prvoga reda. Sva rješenja takve jednadžbe čine jednoparametarski skup funkcija koji se može predstaviti jedinstvenom formulom koja sadrži proizvoljnu konstantu $c$. Uvrštavanjem raznih vrijednosti za $c$ dobijamo razna rješenja diferencijalne jednadžbe. Uobičajeno je da se takav jednoparametarski skup funkcija, zadan jedinstvenom formulom s jednim parametrom $c$, zove **općim rješenjem** diferencijalne jednadžbe čak i onda ako ne obuhvaća sva njezina rješenja. Opće rješenje koje obuhvaća sva rješenja zovemo **potpunim općim rješenjem**.

Ona rješenja koja nisu obuhvaćena općim rješenjem zovu se **singularna rješenja**. Pojedini primjerci općeg rješenja, koji se dobivaju uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za $c$, zovu se **partikularna rješenja**. Dakle, $\sin x + c$ opće je rješenje jednadžbe $y' = \cos x$, koje je i potpuno. Neka njezina partikularna rješenja jesu $\sin x + 2$, $\sin x - 10$ i $\sin x + 5$ dok singularnih rješenja nema. Ako je uz diferencijalnu jednadžbu zadan i tzv. **početni** ili, ovisno o interpretaciji, **rubni uvjet**, $y(x_0) = y_0$, onda je njime određena konstanta $c$, tj. njime je određeno partikularno rješenje koje zadovoljava jednadžbu i početni (rubni) uvjet.

**Primjer 2.3.** Provjerimo uvrštavanjem da je $y = cx - c^2$ opće rješenje diferencijalne jednadžbe $(y')^2 - xy' + y = 0$ te da je $y = \frac{x^2}{4}$ njezino singularno rješenje. Nađimo partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$.

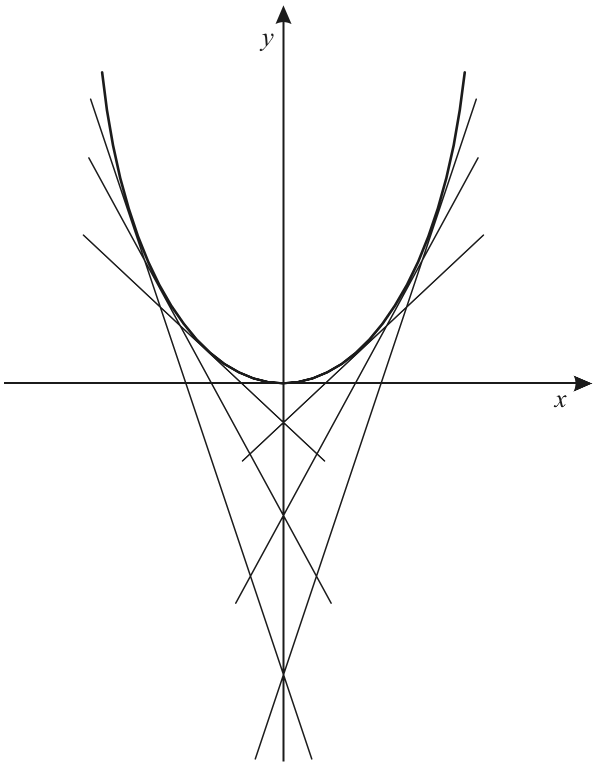
**Rješenje:** Iz $y = cx - c^2$ slijedi $y' = c$ pa uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $c^2 - xc + cx - c^2 = 0$, što je identitet $0 = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki $c$. Dakle, $y = cx - c^2$ opće je rješenje zadane jednadžbe.

Uvrštavanjem $y = \dfrac{x^2}{4}$ i iz njega dobivenog $y' = \dfrac{x}{2}$ dobivamo

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} = 0,$$

tj. $0 = 0$, što dokazuje da je i $y = \dfrac{x^2}{4}$ rješenje zadane diferencijalne jednadžbe. Budući da se ono ni za jednu vrijednost od $c$ ne može dobiti kao partikularno rješenje općeg rješenja $y = cx - c^2$, radi se o singularnom rješenju. Iz $y(1) = 0$ slijedi $0 = c \cdot 1 - c^2$, tj. $c = 0$ ili $c = 1$. Dakle, $y = 0$ i $y = x - 1$ partikularna su rješenja koja zadovoljavaju početni uvjet $y(1) = 0$.

Uočimo da opće rješenje $y = cx - c^2$ predstavlja skup pravaca tangencijalnih na singularno rješenje $y = \dfrac{x^2}{4}$. Naime, pravac $y = cx - c^2$ siječe (zapravo, pokazat ćemo, dodiruje) parabolu $y = \dfrac{x^2}{4}$ u točki čija je $x$ koordinata određena jednadžbom $cx - c^2 = \dfrac{x^2}{4}$, tj. $\dfrac{x^2}{4} - cx + c^2 = 0$. Dakle, $x_{1,2} = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2 - c^2}}{1/2} = 2c$. Nagib parabole u toj točki $y'(2c) = x/2|_{(2c)} = c$ jednak je nagibu pravca $c$, što znači da pravac $y = cx - c^2$ tangira parabolu $y = \dfrac{x^2}{4}$ u dodirnoj točki.




□

Najjednostavnije diferencijalne jednadžbe prvoga reda, čija opća rješenja nemaju singularnih rješenja, a možemo ih naći neposrednom integracijom, jesu tzv. separabilne diferencijalne jednadžbe oblika

$$g(y)y' = f(x). \tag{2.2}$$

Iz jednakosti lijeve i desne strane slijedi da se integrali lijeve i desne strane po $x$ razlikuju samo za konstantu

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + c.$$

Upotrebom pravila za supstituciju u lijevom integralu nalazimo da je

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

Ova jednadžba nakon što izračunamo integrale daje implicitnu vezu $x$ i $y$, tj. implicitno zadaje $y$ kao funkciju od $x$. Ona je implicitno rješenje jednadžbe (2.2). Riješimo li je po $y$ (ako je moguće), dobit ćemo i eksplicitno rješenje jednadžbe (2.2).

Uobičajeno je da se jednadžba (2.2) odmah napiše u obliku

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x),$$

pa se množenjem s $dx$ “separiraju varijable”

$$g(y)dy = f(x)dx$$

te integriranjem dođe do rješenja

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

Naše obrazloženje uz pomoć pravila supstitucije dokazuje da je taj postupak korektan.

## SEPARABILNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Separabilnu jednadžbu oblika

$$g(y)y' = f(x)$$

rješavamo na sljedeći način:

1. Separiramo (razdvojimo) varijable:

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

2. Integriramo obje strane jednadžbe:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

3. Riješimo dobivenu jednadžbu po $y$ i tako nađemo eksplicitno opće rješenje. Ako to nije moguće, 2. daje implicitno opće rješenje.

4. Partikularno rješenje, koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$, nalazimo uvrštavanjem toga uvjeta u opće rješenje.

**Primjer 2.4.** Nađimo opće rješenje diferencijalne jednadžbe

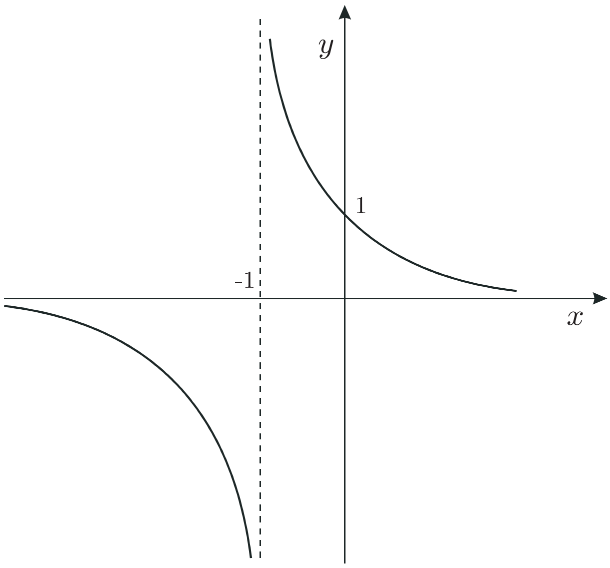
$$y' + 5x^4y^2 = 0$$

te partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$.

## Rješenje:

1. Separiramo varijable
$$\frac{dy}{dx} = -5x^4y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = -5x^4dx,$$
2. integriramo
$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int 5x^4dx + c, \quad -\frac{1}{y} = -x^5 + c,$$
3. te riješimo po $y$
$$y = \frac{1}{x^5 - c}.$$
To je opće rješenje zadane jednadžbe.
4. Uvrštavanjem početnog uvjeta $y(0) = 1$ nalazimo
$$\frac{1}{0 - c} = 1, \quad \text{tj.} \quad c = -1,$$
pa je traženo partikularno rješenje
$$y = \frac{1}{x^5 + 1}.$$

Graf te funkcije skiciran je na sljedećoj slici.




□

**Primjer 2.5.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu $9yy' + 4x = 0$.

**Rješenje:** Iz $9ydy = -4xdx$ integracijom nalazimo opće rješenje $\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + \overline{c}$, tj. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c$ (uz pokratu $c = \overline{c}/18$). Opće rješenje predstavlja familiju (konfokalnih) elipsa. □

**Primjer 2.6.** Riješimo jednadžbu $y' = 1 + y^2$.

**Rješenje:** Iz $dy/(1+y)^2 = dx$ integracijom nalazimo opće rješenje

$$\operatorname{arctg} y = x + c.$$

Odavde lako nalazimo

$$y = \operatorname{tg}(x + c).$$

(Primijetimo koliko je važno odmah pri integraciji uvesti konstantu $c$. Da smo to učinili kasnije, dobili bismo **pogrešno** $y = \operatorname{tg} x + c$.) □

**Primjer 2.7.** Riješimo

a) $yy' = \cos 2x, \quad y(0) = 1;$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y + yx^2}, \quad y(0) = -1;$

c) $y' = x^2y^2 + x^2 - y^2 - 1, \quad y(0) = 0.$

**Rješenje:**

a) $y\,dy = \cos 2x dx, \quad \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \overline{c}, \quad y = \pm\sqrt{\sin 2x + c} \quad (c = 2\overline{c});$

$y(0) = \sqrt{\sin 0 + c} = 1, \quad \sqrt{c} = 1, \quad c = 1, \quad y = \sqrt{\sin 2x + 1}.$

b) $y\,dx = \dfrac{x\,dx}{1+x^2}, \quad \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \overline{c}, \quad y = \pm\sqrt{\ln(1+x^2) + c} \quad (c = 2\overline{c});$

$y(0) = -\sqrt{\ln 1 + c} = -1, \quad -\sqrt{c} = -1, \quad c = 1, \quad y = -\sqrt{\ln(1+x^2) + 1}.$

c) $y' = (x^2-1)(y^2+1), \quad \dfrac{dy}{1+y^2} = (x^2-1)dx, \quad \operatorname{arctg} y = \dfrac{x^3}{3} - x + c,$

$y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x^3}{3} - x + c\right); y(0) = \operatorname{tg}(c) = 0, \quad c = 0,$

$y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right)$

□

Neke od diferencijalnih jednadžbi koje smo ranije razmatrali zapravo su separabilne. Takva je npr. jednadžba eksponencijalnoga rasta

$$y' = ky.$$

Dakle, možemo je riješiti ovako:

$$\frac{dy}{y} = kdx, \quad \ln|y| = kx + \overline{c},$$
$$|y| = e^{kx+\overline{c}} = e^{kx}e^{\overline{c}}, \quad y = ce^{kx},$$

gdje je $c = +e^{\overline{c}}$ za $y > 0$ i $c = -e^{\overline{c}}$ za $y < 0$. Možemo dopustiti i $c = 0$ jer to daje trivijalno rješenje jednadžbe eksponencijalnoga rasta $y = 0$.

Jednadžba strujnoga kruga s konstantnim naponom (primjer A iz prethodnog poglavlja)

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U$$

također je separabilna, pa je možemo riješiti ovako:

$$L\frac{dJ}{dt} = U - RJ, \quad \frac{L}{U - RJ}dJ = dt,$$
$$\int \frac{LdJ}{U - RJ} = \int dt + c, \quad -\frac{L}{R}\ln|U - RJ| = t + c,$$
$$|U - RJ| = e^{-\frac{R}{L}(t+c)}, \quad U - RJ = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

gdje je $A = \pm e^{-\frac{R}{L}c}$. Ako je $J = J_0$ u početnom trenutku $t = 0$, onda je $A = U - RJ_0$, pa nakon uvrštavanja te vrijednosti i sređivanja dobivenoga izraza nalazimo rješenje jednadžbe u obliku

$$J = \frac{U}{R} + \left(J_0 - \frac{U}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

U sljedećim primjerima pozabavit ćemo se s još nekoliko problema čiji je matematički model separabilna diferencijalna jednadžba.

**Primjer 2.8.** Olovna kugla malih dimenzija zagrijana je na 100 °C. U trenutku $t = 0$ uronimo je u vodenu kupku velikih dimenzija čiju temperaturu konstantno održavamo na 30 °C. Toplinska vodljivost olova izuzetno je velika, pa možemo pretpostaviti da je temperatura kugle jednaka u svim njezinim točkama u svakom pojedinom trenutku. Prema Newtonovom zakonu hlađenja brzina promjene temperature uronjene kugle proporcionalna je razlici temperatura kugle i vodene kupke u kojoj se ona hladi. Na kraju treće minute hlađenja temperatura kugle smanjena je na 70 °C. Koliko će vremena proći dok se ona smanji na 31 °C?

**Rješenje:** Matematički model procesa hlađenja prema Newtonovom zakonu predstavlja separabilna diferencijalna jednadžba

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 30).$$

Separacija varijabli i neposredna integracija dovode nas do njezinoga općeg rješenja

$$\frac{dT}{T-30} = kdt, \quad \ln|T-30| = kt - \bar{c},$$
$$T(t) = ce^{kt} + 30,$$

gdje je $c = +e^{\bar{c}}$ (jer je $T > 0$). Iz početnog uvjeta $T(0) = 100$ odredit ćemo vrijednost nepoznatog parametra $c$:

$$T(0) = ce^0 + 30 = 100, \quad c = 70.$$

Dakle,

$$T(t) = 70e^{kt} + 30.$$

Konstantu $k$ odredit ćemo iz poznatog podatka da je $T(3) = 70$:

$$T(3) = 70e^{k\cdot 3} + 30 = 70, \quad k = \frac{1}{3}\ln\frac{70-30}{70} = -0.1865.$$

Dakle,

$$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30.$$

Odavde lako slijedi odgovor na naše pitanje:

$$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30 = 31,$$
$$-0.1865t = \ln(1/70), \quad t = 22.78.$$

Temperatura će se smanjiti na 31° C za nešto manje od 23 minute. □

**Primjer 2.9.** Padobranac otvara svoj padobran u trenutku $t = 0$, kada je dosegao brzinu $v_0$. Njegovu masu, zajedno s opremom, označimo s $m$. Otpor kojim se zrak opire njegovom padu proporcionalan je kvadratu brzine, $F_{otp} = kv^2$ (konstanta $k$ ovisi o veličini i obliku padobrana). Kako se mijenja brzina padobranca ovisno o vremenu proteklom nakon otvaranja padobrana?

**Rješenje:** Prema drugom Newtonovom zakonu

$$F = ma = m\frac{dv}{dt},$$

No, ukupna sila $F$ koja djeluje na padobranca jednaka je razlici sile težine $mg$ i njoj suprotno usmjerene sile otpora $F_{otp} = kv^2$. Dakle,

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt},$$

odnosno, nakon dijeljenja s $m$ i uz pokratu $b^2 = mg/k$,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}(v^2 - b^2).$$

Ova separabilna diferencijalna jednadžba matematički je model našega problema. Riješimo je.

$$\frac{dv}{v^2 - b^2} = -\frac{k}{m}\,dt,$$
$$\int \frac{dv}{v^2 - b^2} = -\frac{k}{m}t + \overline{c}.$$

Iz poznatog nam rastava na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{v^2 - b^2} = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{v-b} - \frac{1}{v+b}\right)$$

lako nalazimo

$$\int \frac{dv}{v^2 - b^2} = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{v-b}{v+b}\right| = -\frac{k}{m}t + \overline{c}.$$

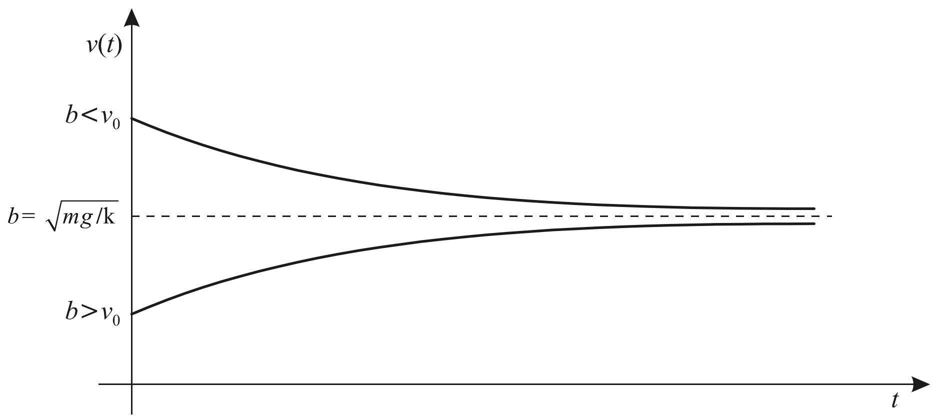
Uz pokratu $p = 2kb/m$ slijedi

$$\frac{v-b}{v+b} = ce^{-pt},$$

gdje je $c = +e^{2b\overline{c}}$ ili $c = -e^{2b\overline{c}}$ ovisno o tome je li gornji razlomak pozitivan ili negativan. Uvrštavanjem početnog uvjeta $v(0) = v_0$ u gornju jednadžbu, nalazimo da je $c = (v_0 - b)/(v_0 + b)$. Riješimo li gornju jednadžbu po $v$, naći ćemo

$$v(t) = b\frac{1 + ce^{-pt}}{1 - ce^{-pt}},$$

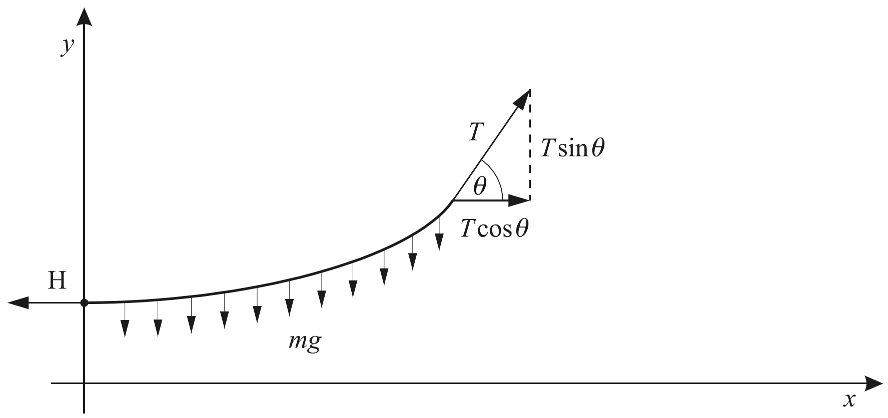
gdje je $b = \sqrt{mg/k}$, $p = 2\sqrt{kg/m}$ i $c = (v_0 - \sqrt{mg/k})/(v_0 + \sqrt{mg/k})$ . Primijetimo da je $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = b = \sqrt{mg/k}$. To znači da se brzina padobranca nakon otvaranja padobrana smanjuje, težeći prema graničnoj vrijednosti $\sqrt{mg/k}$ koja ne ovisi (!) o brzini $v_0$ pri kojoj je otvoren padobran. Dva tipična grafa brzine $v(t)$, za $v_0 > \sqrt{mg/k}$ i $v_0 < \sqrt{mg/k}$, prikazana su na sljedećoj slici




□

**Primjer 2.10.** Odredimo ravnotežni oblik koji u polju sile teže poprima na dva kraja obješeni lanac specifične duljinske mase $m$ ( za koji pretpostavljamo da je idealno savitljiv). Krivulju toga oblika zovemo lančanicom.

**Rješenje:** Lanac očito leži u vertikalnoj ravnini i osno je simetričan u odnosu na vertikalu koja prolazi njegovom najnižom točkom. Promotrimo desnu polovicu lančanice:




Sila napetosti lanca $T$ mora izbalansirati horizontalnu silu napetosti $H$ i vertikalnu težinu lanca $mgs$, gdje je $s$ duljina lanca od najniže točke, u kojoj djeluje $H$, do točke u kojoj djeluje $T$. Dakle,

$$T\cos\vartheta = H,$$
$$T\sin\vartheta = mgs,$$

odakle dijeljenjem dobivamo

$$\frac{T\sin\vartheta}{T\cos\vartheta} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{mg}{H}s.$$

S druge strane, $tg\vartheta$ nagib je lančanice $y = y(x)$, tj. $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{dy}{dx}$. Slijedi da lančanica zadovoljava jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mg}{H}s.$$

Budući da je

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

slijedi da lančanica $y = y(x)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{mg}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{mg}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

To je diferencijalna jednadžba drugoga reda za $y$, ali prvoga reda (i to separabilna) za $u = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{mg}{H}\sqrt{1+u^2}, \\ \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} &= \frac{mg}{H}dx, \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$\mathrm{Ar\,sh}\, u = \frac{mg}{H}x + c.$$

Lančanica je horizontalna za $x = 0$, tj. $\dfrac{dy}{dx}(0) = u(0) = 0$, što znači da je $c = 0$. Dakle,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ar\,sh}\, u &= \frac{mg}{H}x, \quad u = \mathrm{sh}\,\frac{mg}{H}x, \\ u = \frac{dy}{dx} &= \mathrm{sh}\,\frac{mg}{H}x, \quad y = \frac{H}{mg}ch\frac{mg}{H}x. \end{aligned}$$

Lančanica je graf dobro nam poznatog kosinusa hiperbolnog. □

Neke diferencijalne jednadžbe, iako nisu separabilne, mogu to postati primjenom jednostavnih supstitucija. Takve su sve jednadžbe oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

gdje je $f$ proizvoljna funkcija od $y/x$, npr. $(y/x)^2$, $\sin(y/x)$, $e^{y/x}$, itd. Uvedemo li supstituciju

$$\frac{y}{x} = u, \quad \text{tj.} \quad y = xu,$$

slijedi da je

$$y' = u + xu',$$

pa naša polazna jednadžba prelazi u separabilnu jednadžbu

$$\begin{aligned} u + xu' &= f(u), \\ \frac{du}{f(u)-u} &= \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Nju rješavamo na poznati način, a kada nađemo funkciju $u$, uvrstimo je u jednadžbu naše supstitucije, $y = xu$, i tako nađemo traženu funkciju $y$. Evo jednog konkretnog primjera.

**Primjer 2.11.** Riješimo jednadžbu $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$.

**Rješenje:** Dijeljenjem s $x^2$ dobijemo

$$2\frac{y}{x}y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Uz supstituciju $y = xu$, $y' = u + xu'$ jednadžba prelazi u separabilnu jednadžbu

$$2u(u + xu') - u^2 + 1 = 0.$$

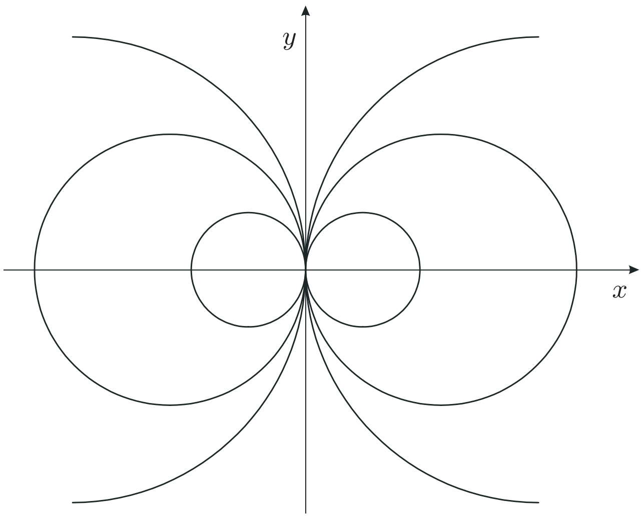
Riješimo je za $u$:

$$\begin{aligned} 2xu\frac{du}{dx} + u^2 + 1 = 0, &\qquad \frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}, \\ \ln(1+u^2) = -\ln x + \overline{c}, &\qquad \ln(1+u^2) = \ln\frac{c}{x}, \\ 1 + u^2 = \frac{c}{x}, & \end{aligned}$$

gdje je $c = e^{\overline{c}}$. Uvrštavanjem $u = \dfrac{y}{x}$ dolazimo do (implicitno zadanog) općeg rješenja polazne jednadžbe:

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x}, \quad x^2 + y^2 = cx,$$
$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Opće rješenje predstavlja familiju kružnica kojima je središte na osi $x$, a sve prolaze ishodištem.




□

Oblik diferencijalne jednadžbe katkada sugerira neku drugu jednostavnu supstituciju, što ilustrira sljedeći primjer.

**Primjer 2.12.** Riješimo jednadžbu

$$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0.$$

**Rješenje:** Supstituiramo li $x - 2y = v$, slijedi $y' = \frac{1}{2}(1 - v')$, što dovodi do separabilne jednadžbe koju lako rješavamo:

$$(2v+5)\frac{1}{2}(1-v') + v + 3 = 0,$$
$$4v + 11 = (2v+5)v',$$
$$\frac{2v+5}{4v+11}\,dv = dx, \quad \frac{4v+10}{4v+11}\,dv = 2\,dx,$$
$$\left(1 - \frac{1}{4v+11}\right)dv = 2\,dx,$$
$$v - \frac{1}{4}\ln|4v+11| = 2x + \bar{c}.$$

Uvrštavanjem $v = x - 2y$ nalazimo opće (implicitno) rješenje polazne jednadžbe,

$$4x + 8y + \ln|4x - 8y + 11| = c.$$

□

Separabilne diferencijalne jednadžbe uspijevamo rješiti običnom integracijom. Rješavanje nekih drugih tipova diferencijalnih jednadžbi može se svesti na običnu integraciju upotrebom odgovarajućih transformacija. Sada ćemo se pozabaviti takvim tipom jednadžbi.

Diferencijalnu jednadžbu zovemo linearnom ako predstavlja linearnu vezu nepoznate funkcije $y$ i njezinih derivacija, s koeficijentima koji su zadane funkcije od $x$. Dakle, linearna diferencijalna jednadžba prvoga reda ima oblik

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.3}$$

gdje su $p(x)$ i $q(x)$ zadane funkcije.

Pomnožimo jednadžbu (2.3) zasad još neodređenom funkcijom $z = z(x)$:

$$y'z + p(x)yz = q(x)z.$$

Lijeva strana dobivene jednadžbe bit će integrabilna ako je

$$y'z + yp(x)z = \frac{d}{dx}(yz) = y'z + yz',$$

tj. ako je $p(x)z = z'$. No ta je jednadžba separabilna, pa lako nalazimo jedan takav integrirajući faktor $z$:

$$\frac{dz}{dx} = p(x)z, \quad \frac{dz}{z} = p(x)dx,$$
$$\ln|z| = \int p(x)dx, \quad z = e^{P(x)},$$

gdje je $P(x) = \int p(x)dx$. Uvrstimo li integrirajući faktor $z = e^{P(x)}$ u početnu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} y'e^{P(x)} + yp(x)e^{P(x)} &= q(x)e^{P(x)} \\ \frac{d}{dx}\left(ye^{P(x)}\right) &= q(x)e^{P(x)}, \\ ye^{P(x)} &= c + \int q(x)e^{P(x)}dx, \\ y &= e^{-P(x)}\left(c + \int q(x)e^{P(x)}dx\right), \end{aligned}$$

gdje je $c$ proizvoljna konstanta integracije.

## LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Linearnu jednadžbu oblika

$$y' + p(x)y = q(x)$$

rješavamo na sljedeći način:

1. Izračunamo integrirajući faktor $z$

$$z = e^{P(x)}, \quad P(x) = \int p(x)dx.$$

2. Pomnožimo jednadžbu s tim faktorom i zatim integriramo, koristeći se činjenicom da je integral lijeve strane **uvijek** $ye^{P(x)}$.
   Dobiveno je opće rješenje

$$y = e^{-P(x)}\left(c + \int q(x)e^{P(x)}dx\right).$$

3. Partikularno rješenje, koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$, nalazimo uvrštavanjem toga uvjeta u opće rješenje.

**Primjer 2.13.** Riješimo linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$y' + xy = x,$$

uz početni uvjet $y(0) = 3$.

## Rješenje:

1. Nađimo integrirajući faktor $z$:

$$P(x) = \int p(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2},$$
$$z = e^{x^2/2.}$$

2. Pomnožimo jednadžbu s tim faktorom:

$$y'e^{x^2/2} + yxe^{x^2/2} = xe^{x^2/2},$$
$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^2/2}\right) = xe^{x^2/2},$$

pa zatim integriramo

$$ye^{x^2/2} = \int xe^{x^2/2}dx = e^{x^2/2} + c.$$

Slijedi da je opće rješenje naše jednadžbe

$$y = 1 + ce^{-x^2/2}.$$

3. Iz početnog uvjeta, $y(0) = 3$, uvrštavanjem slijedi

$$y(0) = 1 + c = 3, \quad c = 2,$$

pa je traženo partikularno rješenje

$$y = 1 + 2e^{-x^2/2}.$$

□

Neke diferencijalne jednadžbe, koje smo riješili drugim metodama, linearne su, pa ih sada možemo riješiti kao takve. Na primjer, jednadžba $RL$-strujnoga kruga s izmjeničnim naponom (primjer A iz prethodnog poglavlja)

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = U_0 \cos \omega t,$$

linearna je. Napišemo li je u obliku

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L}J = \frac{U_0}{L}\cos \omega t,$$

vidimo da je u tom slučaju $p(t) = \dfrac{R}{L}$, tj. $P(t) = \dfrac{R}{L}t$ i $q(t) = \dfrac{U_0}{L}\cos \omega t$, pa je njezino opće rješenje

$$J = e^{-\frac{R}{L}t}\left(c + \frac{U_0}{L}\int \cos \omega t e^{\frac{R}{L}t}dt\right).$$

Dvostrukom parcijalnom integracijom možemo izračunati

$$\int \cos \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{L e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2\omega^2} (R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t),$$

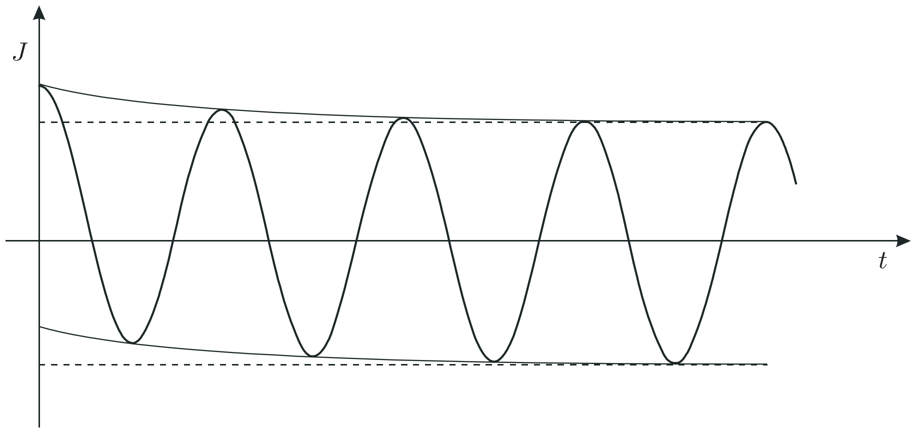
odakle slijedi

$$J = \frac{U_0}{R^2 + L^2\omega^2} (R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t) + c e^{-\frac{R}{L}t},$$

odnosno, uz $\vartheta = \operatorname{arctg} L\omega/R$ (prema pravilu za superponiranja oscilacije iste frekvencije),

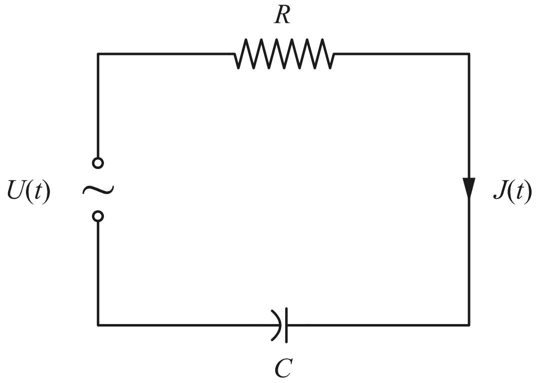
$$J = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \vartheta) + c e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Vrijednost konstante $c$ određena je jakošću struje $J$ u trenutku $t = 0$. Primijetimo da $J$ sadrži oscilatorni, stacionarni dio, čija je frekvencija $\omega$ jednaka frekvenciji izvora kojim se napaja strujni krug (usp. primjer  u prethodnom poglavlju) i prelazni, nestacionarni dio $ce^{-\frac{R}{L}t}$ koji s vremenom nestaje.




Ako je $c = 0$, dobivamo partikularno stacionarno rješenje, koje smo našli u prethodnom odjeljku, prijelazom u kompleksno područje. Oscilacija struje i napona bit će u fazi ako je $\vartheta = \operatorname{arctg} L\omega/R = 0$, tj. ako je $L = 0$.

Linearna diferencijalna jednadžba modelira i $RC$-strujni krug, s otpornikom otpora $R$ i kondenzatorom kapaciteta $C$.



Već smo spomenuli da je pad napona duž otpornika proporcionalan trenutnoj struji $J$ (Ohmov zakon)

$$U_R = RJ,$$

a eksperimentalno se također pokazuje da je pad napona na kondenzatoru proporcionalan trenutnom naboju $Q$ kondenzatora

$$U_C = \frac{1}{C}Q,$$

gdje je $C$ kapacitet kondenzatora. Budući da je $J(t) = \dfrac{dQ}{dt}$, to možemo zapisati i u obliku

$$U_C = \frac{1}{C}\int J(t)dt,$$

pa iz drugog Kirchhoffovog zakona (o naponima) slijedi

$$U = RJ + \frac{1}{C}\int J(t)dt.$$

Nakon deriviranja lijeve i desne strane dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu $RC$ - kruga:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= R\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C}J, \\ \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{RC}J &= \frac{1}{R}\frac{dU}{dt}. \end{aligned}$$

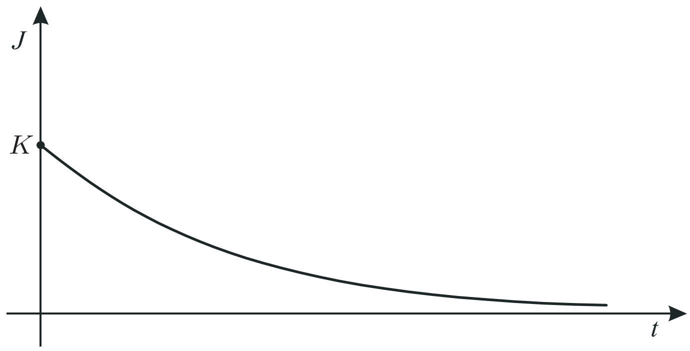
u kojoj je $p(t) = 1/RC$, tj. $P(t) = t/RC$ i $q(t) = (1/R)dU/dt$.

Njezino opće rješenje je

$$J(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left(K + \frac{1}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\frac{dU}{dt}dt\right).$$

Konstantu integracije označili smo s $K$ da je razlikujemo od kapaciteta $C$. Ako je strujni krug priključen na izvor konstantnog napona $U$, onda je $\dfrac{dU}{dt} = 0$, pa je jakost struje u tom slučaju

$$J(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$



Ako je strujni krug priključen na izvor izmjeničnog napona $U(t) = U_0 \sin \omega t$, onda je $\frac{dU}{dt} = \omega U_0 \cos \omega t$, pa je jakost struje u tom slučaju

$$\begin{aligned} J(t) &= Ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega U_0 C}{1+\omega^2 R^2 C^2}(\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t) = \\ &= Ke^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega U_0 C}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t + \vartheta), \end{aligned}$$

gdje je $\vartheta = \operatorname{arctg} \omega RC$ (prema pravilu za superponiranje oscilacija). Jakost struje $J$ opet se sastoji od stacionarnog dijela frekvencije $\omega$ i nestacionarnog dijela $Ke^{-\frac{t}{RC}}$, koji s vremenom nestaje.

$RLC$ - strujni krugovi koji sadrže sve tri komponente, otpornik, induktor i kondenzator, matematički se modeliraju linearnom diferencijalnom jednadžbom drugoga reda. Naime, iz drugog Kirchhoffova zakona (o naponima) slijedi

$$RJ + L\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C}\int J(t)dt = U,$$

pa deriviranjem dobivamo linearnu jednadžbu drugog reda

$$L\frac{d^2J}{dt^2} + R\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C}J = \frac{dU}{dt}.$$

Takve ćemo jednadžbe rješavati u sljedećem poglavlju.

U primjerima 2.14, 2.15 i 2.16 pozabavit ćemo se s još nekoliko problema čiji je matematički model linearna diferencijalna jednadžba prvoga reda.

**Primjer 2.14.** Sila teže, koja djeluje na tijelo mase $m$ što slobodno pada kroz zrak, iznosi $mg$, gdje je $g$ gravitacijska konstanta. Pretpostavit ćemo da je sila kojom se zrak opire padu proporcionalna $\vartheta$ brzini tijela, $\gamma v$, gdje je $\gamma$ konstanta proporcionalnosti. Nađimo ovisnost brzine tijela o vremenu $t$ (prije no što tijelo udari u tlo).

**Rješenje:** Iz drugog Newtonovog zakona slijedi

$$\begin{aligned} ma &= m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v, \\ \frac{dv}{dt} &+ \frac{\gamma}{m}v = g, \end{aligned}$$

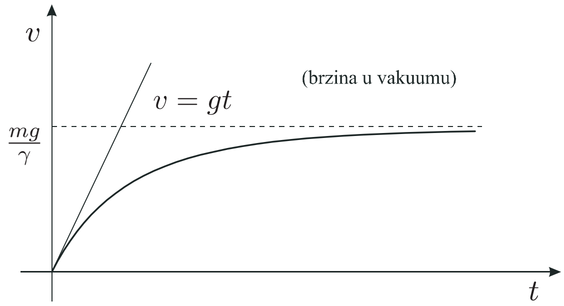
što je linearna jednadžba s $p(t) = \gamma/m$, $P(t) = \gamma t/m$ i $q(t) = g$, pa je njezino rješenje

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\gamma t/m}\left(K + \int g e^{\gamma t/m} dt\right) = \\ &= e^{-\gamma t/m}\left(K + \frac{mg}{\gamma}e^{\gamma t/m}\right). \end{aligned}$$

Ako je $v = 0$ u trenutku ispuštanja $t = 0$, onda je $K = -mg/\gamma$, pa je

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t/m}).$$

Za $t \to \infty$, $e^{-\gamma t/m} \to 0$, što znači da je brzina tijela omeđena graničnom brzinom $mg/\gamma$.




Za male $t$ vrijedi $e^{-\gamma t/m} \approx 1-\gamma t/m$. Tada je $v(t) \approx gt$, što je iznos brzine u vakuumu (dakle, bez otpora zraka). Kako $t$ raste, otpor zraka usporava rast brzine tijela do granične brzine $mg/\gamma$. □

Nešto općenitiji od prethodnog problema jest problem kosoga hica u mediju koji se opire gibanju projektila (npr. u zraku).

**Primjer 2.15.** Nađimo parametarske jednadžbe gibanja projektila u polju sile teže (kroz zrak koji se opire gibanju silom koja je proporcionalna brzini gibanja).

**Rješenje:** Projektil se giba u vertikalnoj ravnini $xy$. Pretpostavimo da je iz početnog položaja (0,0) ispaljen brzinom $v_0$ pod kutom $\alpha$.


U horizontalnom smjeru $x$ na projektil djeluje samo sila zračnoga otpora, koja je proporcionalna brzini, pa je prema drugom Newtonovom zakonu

$$m\ddot{x} = -K\dot{x}, \quad \ddot{x} = -k\dot{x}, \quad (k = K/m).$$

U vertikalnom smjeru $y$ na projektil djeluje sila teže i sila otpora, pa je

$$m\ddot{y} = -mg - K\dot{y}, \quad \ddot{y} = -g - k\dot{y} \quad (k = K/m).$$

(minus $mg$, jer je $y$ os usmjerena **gore**, u smjeru suprotnom sili teže).

Prva, $x$-jednadžba, linearna je za $v_x = \dot{x}$ ($\dot{v}_x = -kv_x$) i njezino nam je rješenje dobro poznato:

$$\dot{x} = v_x = Ce^{-kt}.$$

Iz početnog uvjeta $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ slijedi $C = v_0 \cos\alpha$, pa je

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos\alpha e^{-kt}.$$

Integracijom nalazimo

$$x = -\frac{v_0 \cos\alpha}{k} e^{-kt} + D,$$

a iz početnog uvjeta $x(0) = 0$ slijedi $D = v_0 \cos\alpha / k$, tj.

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad (i)$$

Druga, $y$-jednadžba, linearna je za $\dot{y} = v_y$, $\dot{v}_y + kv_y = -g$ i njezino je rješenje

$$\dot{y} = v_y = \frac{1}{k}(Ce^{-kt} - g).$$

Iz početnog uvjeta $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$ slijedi $C = kv_0 \sin\alpha + g$ pa je

$$\dot{y} = v_y = v_0 \sin\alpha e^{-kt} + \frac{g}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Integracijom nalazimo

$$y = -\frac{v_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k^2} e^{-kt} - \frac{gt}{k} + D.$$

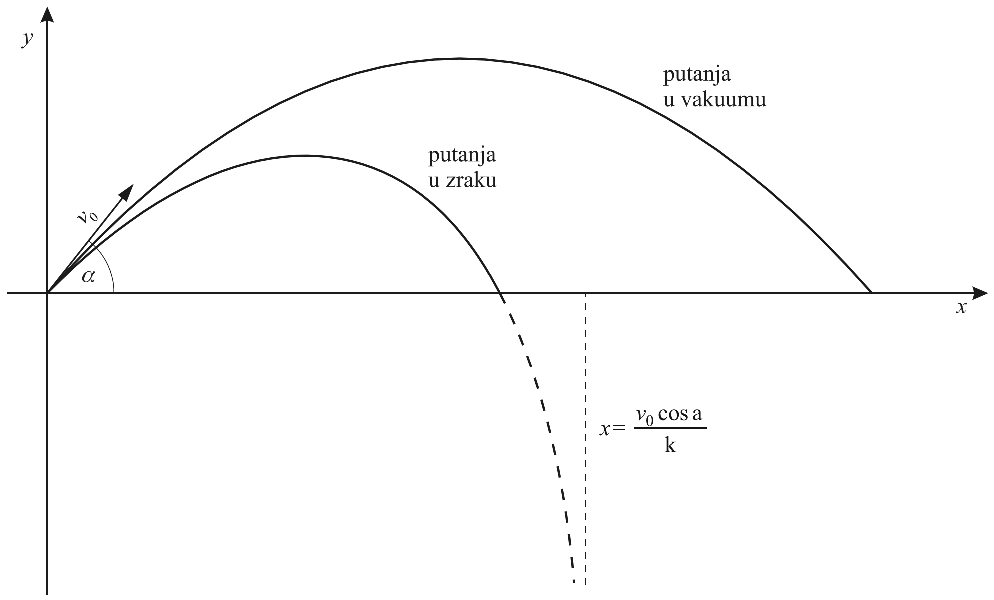
Iz početnog uvjeta $y(0) = 0$ slijedi

$$D = (v_0 \sin\alpha / k) + (g/k^2),$$

tj.

$$y = -\frac{gt}{k} + \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{k} + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}). \qquad (ii)$$

Graf putanje projektila, koji je određen parametarskim jednadžbama putanje $(i)$ i $(ii)$, dan je na sljedećoj slici. Radi usporedbe dan je i graf parabolične putanje u vakuumu (usp. primjer B u prethodnom poglavlju).



U prvom dijelu putanja u zraku položenija je od putanje u vakuumu, dok je u drugom dijelu strmija od one u vakuumu. Projektil udara u zemlju pod oštrijim kutom i s manjom brzinom od one pod kojom je ispaljen. Variranjem kuta ispaljivanja lako bismo ustanovili da se uz zadanu početnu brzinu maksimalni doseg projektila postiže uz kut ispaljivanja manji od 45° (što je kut maksimalnog dosega u vakuumu). □

**Primjer 2.16.** Bure početno sadrži 100 l vode u kojoj je otopljeno 50 dag soli. U njega brzinom od 10 l/min utječe slana voda s koncentracijom 2 dag/l, ali voda iz njega i istječe jednakom brzinom. (Miješanjem se održava jednolika koncentracija soli u buretu.) Nađimo kako se koncentracija soli u buretu mijenja s vremenom.

**Rješenje:** Trenutnu količinu soli u buretu označimo s $y(t)$. Brzina kojom se ona mijenja jednaka je brzini ulaza soli, $10 \cdot 2 = 20$ dag/min, umanjenoj za brzinu izlaza soli, $(10/100)y = 0.1y$ dag/min ($y$ je ukupna količina soli u buretu, a 10/100 dio je slane vode koji izlazi iz bureta u jednoj minuti). Dakle,

$$y' = 20 - 0.1y,$$

uz početni uvjet

$$y(0) = 50.$$

Opće rješenje linearne jednadžbe koja modelira naš problem glasi:

$$\begin{aligned} y &= e^{-0.1t}\left(C + \int e^{0.1t} 20dt\right) = \\ &= e^{-0.1t}\left(C + \frac{20}{0.1}e^{0.1t}\right) = \\ &= Ce^{-0.1t} + 200. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta nalazimo

$$y(0) = C + 200 = 50, \quad C = -150,$$

pa je trenutna količina soli u buretu

$$y(t) = 200 - 150e^{-0.1t} \text{ dag }.$$

Koncentraciju $\gamma(t)$ dobijemo dijeljenjem sa 100 (količina je vode u buretu 100 l):

$$\gamma(t) = 2 - 1.5e^{-0.1t} \text{ dag/l}.$$

Vidimo da koncentracija soli u buretu monotono raste prema koncentraciji soli u vodi koja ulazi u bure, što i očekujemo. □

Neke nelinearne diferencijalne jednadžbe mogu se svesti na linearne. Najpoznatija je među njima Bernoullijeva jednadžba

$$y' = p(x)y + q(x)y^a, \tag{2.4}$$

gdje je eksponent $a$ bilo koji realan broj. Ako je $a = 0$ ili $a = 1$, jednadžba je linearna. Ako nije, uvodimo supstituciju

$$u = y^{1-a}.$$

Deriviranjem i uvrštavanjem $y'$ iz (2.4) dolazimo do linearne jednadžbe za $u$:

$$\begin{aligned} u' &= (1-a)y^{-a}y' = (1-a)y^{-a}(py + qy^a) = \\ &= (1-a)(py^{1-a} + q) = (1-a)(pu + q), \\ u' &= (1-a)pu + (1-a)q. \end{aligned}$$

Ovu jednadžbu riješimo na uobičajeni način, pa kada smo našli $u$, lako nalazimo i $y$ iz $u = y^{1-a}$.

## BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA

Bernoullijeva jednadžba, oblika

$$y' = p(x)y + q(x)y^a,$$

svodi se supstitucijom $u = y^{1-a}$ na linearnu jednadžbu za $u$.

**Primjer 2.17.** Riješimo Bernoullijevu jednadžbu

$$y' = y + y^2.$$

**Rješenje:** Supstitucija $u = y^{1-2} = y^{-1}$ daje

$$\begin{aligned} u' &= -y^{-2}y' = -y^{-2}(y + y^2) = -y^{-1} - 1 = -u - 1, \\ u' &= -u - 1 \end{aligned}$$

Rješenje je ove linearne jednadžbe

$$u = e^{-x}\left(C - \int e^x\, dx\right) = Ce^{-x} - 1.$$

Iz $u = y^{-1}$ slijedi $y = u^{-1} = 1/u$, pa je traženo opće rješenje zadane Bernoullijeve jednadžbe

$$y = \frac{1}{1 - Ce^{-x}}.$$

□

**Primjer 2.18.** Mnoge populacije rastu po tzv. logističkom zakonu; brzina rasta populacije proporcionalna je veličini same populacije (npr. zbog razmnožavanja), dok je brzina njezinoga opadanja proporcionalna kvadratu njezine veličine (npr. zbog smrtnosti uvjetovane ograničenim količinama hrane). Dakle,

$$y' = Ay - By^2,$$

što je Bernoullijeva jednadžba. Izračunajmo kakav je rast populacije po logističkom zakonu.

**Rješenje:** Uvedemo li supstituciju $u = y^{1-2} = y^{-1}$, Bernoullijeva jednadžba za $y$ svodi se na linearnu za $u$:

$$\begin{aligned} u' &= -y^{-2}y' = -y^{-2}(Ay - By^2) = B - Ay^{-1}, \\ u' &= -Au + B. \end{aligned}$$

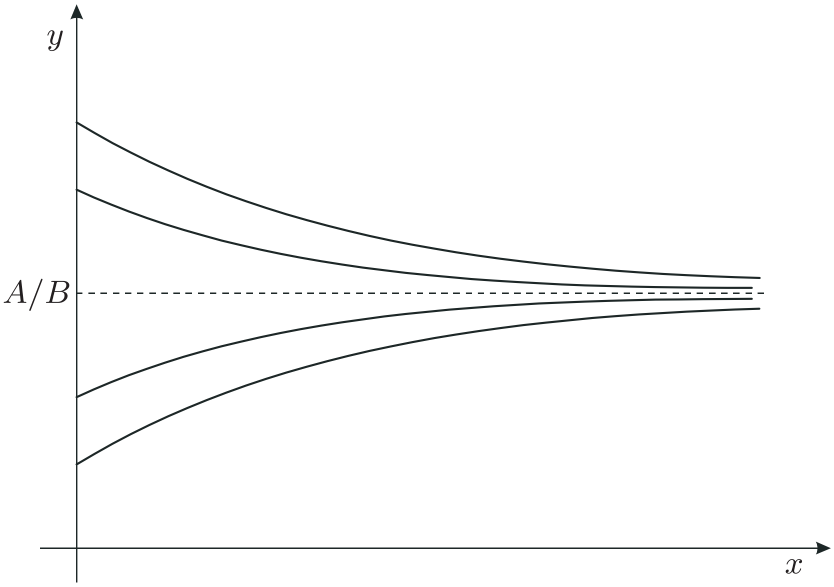
Njezino je opće rješenje

$$u = e^{-Ax}\left(C + \int Be^{Ax}dx\right) = e^{-Ax}\left(C + \frac{B}{A}e^{Ax}\right) = \frac{B}{A} + Ce^{-Ax},$$

pa je opće rješenje zadane Bernoullijeve jednadžbe

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{(B/A) + Ce^{-Ax}}.$$

To nam rješenje pokazuje da početno male populacije $(y(0) < A/B)$ monotono rastu prema $A/B$, dok početno velike populacije $(y(0) > A/B)$ monotono padaju prema istom ravnotežnom stanju.




□

# 3

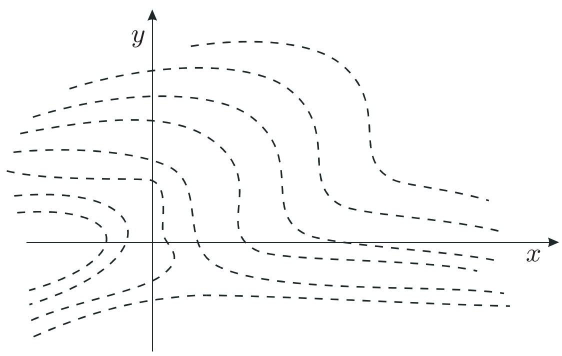
# Općenito o diferencijalnim jednadžbama prvoga reda

Diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$F(x, y, y') = 0$$

najčešće nije ni separabilna ni linearna niti se može svesti na takve jednadžbe. Zato je ne možemo eksplicitno riješiti, osim u ponekom posebnom slučaju (poput separabilnog ili linearnog). Općenito, moramo se poslužiti numeričkim ili kakvim drugim aproksimativnim metodama. Pritom je korisno imati jasnu sliku o geometrijskom značenju diferencijalne jednadžbe prvoga reda.

Pretpostavimo da je zadana jednadžba $F(x, y, y') = 0$ rješiva po $y'$. Tada je možemo napisati u obliku $y' = f(x, y)$ koji nam kaže koliki je nagib $y'$ traženoga rješenja $y = y(x)$, u svakoj točki $(x, y)$. Zamislimo stoga da je u svakoj točki $(x, y)$ povučena mala crtica nagiba $f(x, y)$. Dobit ćemo **polje smjerova** zadano jednadžbom $y' = f(x, y)$.




Riješiti tu jednadžbu, znači pronaći put kroz zadano **polje smjerova**, koji ide krivuljom tangencijalnom na zadani smjer u svakoj točki. Takvu krivulju, koja je graf rješenja naše diferencijalne jednadžbe, zovemo **integralnom krivuljom** te jednadžbe.