4

Linearna jednadžba drugoga reda s konstantnim koeficijentima

Diferencijalnu jednadžbu drugoga reda zovemo linearnom ako je linearna u y i njezinim derivacijama, tj. ako je oblika

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x).$$

Ako su koeficijenti uz y'', y' i y konstante, onda jednadžbu zovemo linearnom s konstantnim koeficijentima. Pretpostavljamo da je $a \neq 0$, jer se inače radi o linearnoj jednadžbi prvoga reda kojom smo se već bavili. Ako je $f(x) = 0$, linearnu jednadžbu zovemo homogenom.

Najprije ćemo proučiti homogenu:

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{4.1}$$

Potražimo njezina rješenja koja su oblika

$$y = e^{kx}, \qquad \text{za konstantni } k.$$

Uvrštavanjem takve funkcije u jednadžbu (4.1) vidimo da je ona zadovoljava ako je

$$ak^2e^{kx} + bke^{kx} + ce^{kx} = 0,$$
$$(ak^2 + bk + c)e^{kx} = 0$$

što je, zbog $e^{kx} \neq 0$, ekvivalentno sa

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Ovu algebarsku jednadžbu zovemo **karakterističnom jednadžbom** diferencijalne jednadžbe (4.1), a njezine korijene,

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

karakterističnim korijenima te diferencijalne jednadžbe. Dakle, jednadžbu (4.1) zadovoljavaju funkcije $y_1 = e^{k_1x}$ i $y_1 = e^{k_2x}$, gdje su k_1 i k_2 karakteristični korijeni te jednadžbe.

Homogene linearne jednadžbe imaju svojstvo da je **superpozicija** $C_1y_1 + C_2y_2$ njihovih rješenja y_1, y_2 također njihovo rješenje tj. vrijedi princip superpozicije rješenja. To je lako provjeriti:

$$a(C_1y_1 + C_2y_2)'' + b(C_1y_1 + C_2y_2)' + c(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= C_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + C_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0.$$

(Uočite da to vrijedi i ako koeficijenti a, b, c nisu konstante.) Dakle,

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

opće je rješenje diferencijalne jednadžbe (4.1).

Ako je $k_1 \neq k_2$, onda su konstante C_1 i C_2 jednoznačno određene početnim uvjetima $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, jer je tada sustav

$$C_1e^{k_1x_0} + C_2e^{k_2x_0} = y_0, \quad C_1k_1e^{k_1x_0} + C_2k_2e^{k_2x_0} = y_1$$

jednoznačno rješiv po C_1, C_2. (U sljedećem poglavlju dajemo dokaz da jednadžba (4.1) nema drugih rješenja, ako je $k_1 \neq k_2$.)

Primjer 4.1. Nađimo opće rješenje jednadžbe $y'' - y' - 6y = 0$, te partikularno rješenje koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

Rješenje: Karakteristična je jednadžba

$$k^2 - k - 6 = 0, \quad (k-3)(k+2) = 0,$$

pa su njezini korijeni $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, što daje opće rješenje

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}.$$

Početni uvjeti $y(0) = 0$ i $y'(0) = 5$ jednoznačno određuju C_1 i C_2:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad y'(0) = 3C_1 - 2C_2 = 5,$$

što daje $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Traženo je partikularno rješenje

$$y = e^{3x} - e^{-2x}.$$

□

Ako su korijeni karakteristične jednadžbe kompleksni, opće rješenje možemo izraziti pomoću sinusa i kosinusa, koristeći se Eulerovom formulom, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. U tom slučaju ne nalazimo samo realna rješenja jednadžbe (4.1) nego i njezina kompleksna rješenja. Naravno, kada nađemo sva rješenja, uvijek se možemo ograničiti samo na realna.

Primjer 4.2. Nađimo opće rješenje jednadžbe $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Rješenje: Karakteristična je jednadžba $k^2 + 2k + 2 = 0$, a njezini su korijeni

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$$

Dakle, sva su kompleksna rješenja naše jednadžbe dana sa

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x} = \\ &= C_1 e^{-x} e^{ix} + C_2 e^{-x} e^{-ix} = \\ &= e^{-x}(C_1(\cos x + i \sin x) + C_2(\cos x - i \sin x)) = \\ &= e^{-x}(A \cos x + B \sin x), \end{aligned}$$

gdje je $A = C_1 + C_2$ i $B = i(C_1 - C_2)$.

Želimo li se ograničiti na realna rješenja, A i B moraju biti realni brojevi (tj. C_1 i C_2 moraju biti međusobno konjugirani kompleksni brojevi $\frac{1}{2}(A \pm Bi)$). □

Primjer 4.3. Riješimo jednadžbu harmonijskog oscilatora

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba diferencijalne jednadžbe harmonijskog oscilatora glasi $k^2 + \omega^2 = 0$ i njezina su rješenja $k_{1,2} = \pm i\omega$. Zato je njezino opće rješenje

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} = A \cos \omega x + B \sin \omega x,$$

što nam je (za realne A i B) dobro poznato. □

Ako su karakteristični korijeni jednadžbe (4.1) međusobno jednaki (tj. $b^2 - 4ac = 0$, pa je $k = -b/2a$), onda nam opisani postupak daje reducirano "opće" rješenje $y = Ce^{kx}$. Potpuno opće rješenje nalazimo tzv. varijacijom parametra C:

Svako rješenje y jednadžbe (4.1) može se napisati u obliku

$$y = C(x)e^{kx},$$

gdje je $C(x)$ zasada nepoznata funkcija.
Budući da rješenje y mora zadovoljavati jednadžbu (4.1) i budući da je

$$\begin{aligned} y' &= C' e^{kx} + kCe^{kx}, \\ y'' &= C'' e^{kx} + 2kC' e^{kx} + k^2 C e^{kx}, \end{aligned}$$

uvrštavanjem u (4.1) nalazimo

$$\begin{aligned} \left[a(C'' + 2kC' + k^2 C) + b(C' + kC) + cC\right] e^{kx} &= 0, \\ \left[(ak^2 + bk + c)C + (2ak + b)C' + aC''\right] e^{kx} &= 0, \end{aligned}$$

odakle slijedi $aC'' = 0$. Naime, $ak^2 + bk + c = 0$ (jer je k rješenje karakteristične jednadžbe) i $2ak + b = 0$ (jer je $k = -b/2a$). To znači da je $C(x) = C_1 + C_2 x$. Dakle, svako rješenje jednadžbe (4.1), u slučaju jednog (tzv. dvostrukog) korijena k, ima oblik

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}.$$

Opet se lako vidi da su konstante C_1, C_2 jednoznačno određene početnim uvjetima $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Primjer 4.4. Nađimo opće rješenje jednadžbe $y'' + 4y' + 4y = 0$ i njezino partikularno rješenje koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Rješenje: Karakteristična jednadžba $k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2 = 0$ ima samo jedno (dvostruko) rješenje $k = -2$. Dakle, opće je rješenje zadane jednadžbe

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

Konstante C_1 i C_2 jednoznačno su određene početnim uvjetima:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 1, \\ y'(0) &= C_2 - 2C_1 = 0, \end{aligned}$$

iz kojih slijedi da je $C_1 = 1$ i $C_2 = 2$. Traženo je partikularno rješenje

$$y = (1 + 2x)e^{-2x}.$$

□

HOMOGENA JEDNADŽBA

Homogenu jednadžbu s konstantnim koeficijentima a, b i c,

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.1}$$

rješavamo na sljedeći način.
Ako karakteristična jednadžba $ak^2 + bk + c = 0$ ima različite korijene k_1 i k_2, onda je opće rješenje jednadžbe (4.1)

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Ako su korijeni karakteristične jednadžbe konjugirano kompleksni, $k_{1,2} = A \pm Bi$, onda se to opće rješenje može zapisati u obliku

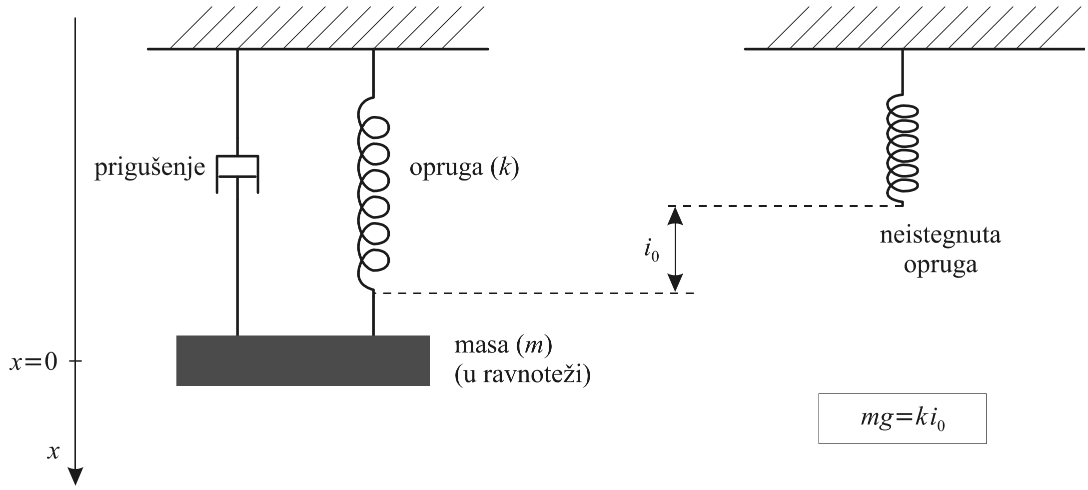
$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Ako karakteristična jednadžba ima samo jedno rješenje k, onda je opće rješenje jednadžbe (4.1)

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}.$$

Konstante C_1 i C_2 u svim su slučajevima jednoznačno određene početnim uvjetima $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Jednadžba nema singularnih rješenja.

Koristeći se gornjim postupkom, proučit ćemo gibanje harmonijskog oscilatora s prigušenjem. Razmatramo dakle uteg, koji se giba pod utjecajem elastične sile opruge, u viskoznom mediju koji se opire gibanju.



Sila opruge proporcionalna je i suprotno usmjerena otklonu $x: F_0 = -kx$, ($k > 0$). Konstantu opruge k možemo odrediti iz vrijednosti i_0 za koju masa m istegne oprugu (usp. desni dio sl.). Sila prigušenja, kojom se viskozni medij opire gibanju, proporcionalna je i suprotno usmjerena brzini gibanja $F_p = -c\dfrac{dx}{dt}$($c > 0$ je konstanta prigušenja). Dakle, jednadžba slobodnih (bez utjecaja vanjskih sila) prigušenih oscilacija glasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0 + F_p = -kx - c\frac{dx}{dt},$$

tj.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{4.2}$$

To je homogena linearna jednadžba s konstantnim koeficijentima, čiji su karakteristični korijeni

$$k_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\alpha \pm \beta,$$

uz pokrate

$$\alpha = \frac{c}{2m} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}. \tag{4.3}$$

Rješenja jednadžbe (4.2) ovisi o prigušenju c, pa imamo tri moguća slučaja:

I $c^2 > 4km$. Dva realna korijena. JAKO (NADKRITIČNO) PRIGUŠENJE.

II $c^2 = 4km$. Jedan dvostruki korijen. GRANIČNO (KRITIČNO) PRIGUŠENJE.

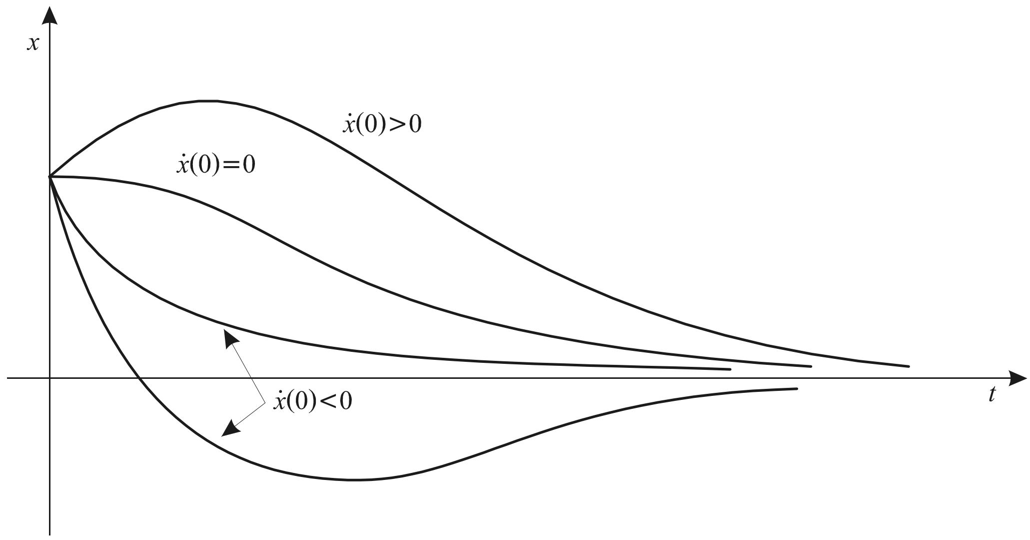
III $c^2 < 4km$. Konjugirano kompleksni korijeni. SLABO (POTKRITIČNO) PRIGUŠENJE.

I JAKO PRIGUŠENJE

Konstanta prigušenja c tako je velika da je $c^2 > 4km$. Korijeni k_1 i k_2 različiti su i realni, pa je opće rješenje jednadžbe (4.2):

$$x(t) = C_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha+\beta)t}. \tag{I}$$

Masa u tom slučaju ne oscilira. Za $t > 0$ oba su eksponenta u gornjem izrazu za $x(t)$ negativni, jer je (usp. (4.3)) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ i $\beta^2 = \alpha^2 - k/m < \alpha^2$, pa $x(t) \to 0$ za $t \to \infty$. Praktično to znači da će se masa nakon dovoljno dugo vremena umiriti u ravnotežnom položaju $x = 0$, što i očekujemo kod jakog prigušenja.



II GRANIČNO PRIGUŠENJE

Ako je $c^2 = 4km$, onda je $\beta = 0$ i $k_1 = k_2 = -\alpha$, pa je opće rješenje jednadžbe (4.2)

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}. \tag{II}$$

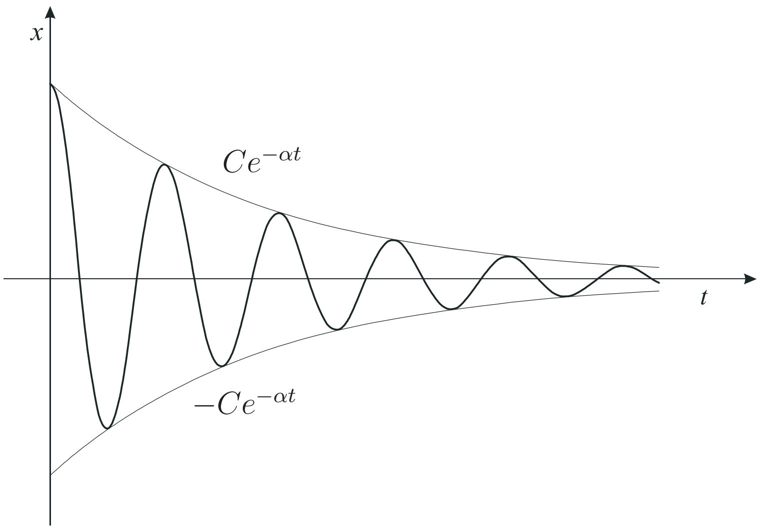
Masa i u ovom slučaju ne oscilira, a graf funkcije pomaka $x(t)$ kvalitativno izgleda kao i u prethodnom slučaju.

III SLABO PRIGUŠENJE

To je najzanimljiviji slučaj. Konstanta prigušenja c tako je mala da je $c^2 < 4km$, tj. β je imaginaran broj $i\sqrt{4km - c^2}/(2m) = i\omega$, pa su $k_{1,2} = -\alpha \pm i\omega$ konjugirano kompleksni korijeni. Rješenje je jednadžbe (4.2)

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = \\ &= Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t - \vartheta), \\ \alpha &= \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}, \end{aligned} \tag{III}$$

gdje je $C^2 = C_1^2 + C_2^2$ i $\operatorname{tg} \vartheta = C_2/C_1$. To rješenje predstavlja prigušene oscilacije. Budući da $\cos(\omega t - \vartheta)$ prima vrijednosti između -1 i 1, krivulja rješenja leži između eksponencijalnih krivulja $y = Ce^{-\alpha t}$ i $y = -Ce^{-\alpha t}$, dodirujući ih kada je $\omega t - \vartheta$ višekratnik od π. Frekvencija oscilacija jest $\nu = \omega/(2\pi)$. Iz $\omega = \sqrt{(k/m) - (c/2m)^2}$ slijedi da je frekvencija oscilacija to veća što je konstanta prigušenja c manja. Granična frekvencija $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$, koju dobijemo za $c \to 0$, poklapa se s frekvencijom (neprigušenih i slobodnih) harmonijskih oscilacija $\nu_0 = \omega_0/(2\pi) = \sqrt{k/m}/(2\pi)$ (usp. pogl. 1 C).



Primjer 4.5. Kugla mase $m = 9.082$ kg rastegne čeličnu oprugu za 10 cm. Ako kuglu pokrenemo iz ravnotežnog položaja, kojom će ona frekvencijom oscilirati oko tog položaja (bez prigušenja)? Opišimo njezino gibanje nakon što je istegnemo prema dolje za 15 cm i potom je ispustimo iz mirujućeg položaja. Kako se mijenja frekvencija i gibanje kugle ako je ono prigušeno viskoznim medijem s konstantom prigušenja

(i) $c = 200$ kg/s,

(ii) $c = 100$ kg/s?

Rješenje: Konstanta opruge ima vrijednost

$$k = \frac{mg}{i_0} \doteq \frac{9.082 \cdot 9.8}{0.1} \doteq 890 \text{N/m}.$$

To daje frekvenciju harmonijskih oscilacija

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \doteq \frac{\sqrt{890/9.082}}{2\pi} \doteq \frac{9.899}{2\pi} \doteq 1.576\text{Hz},$$

što je 94.6 ciklusa u minuti.

Gibanje kugle dano je općim rješenjem jednadžbe harmonijskog oscilatora $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 98.067x = 0$

$$x(t) = A\cos 9.903t + B\sin 9.903t$$

i početnim uvjetima $y(0) = A = 0.15$ i $y'(0) = 9.903B = 0$. Ono je, dakle,

$$x(t) = 0.15\cos 9.903t \ \text{(metara)}\ .$$

(i) U slučaju prigušenja $c = 200$ kg/s problem je modeliran sa

$$9.082\ddot{x} + 200\dot{x} + 891x = 0, \quad x(0) = 0.15, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Karakteristična jednadžba ima korijene

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \beta = 11.01 \pm 4.814 = -6.197, -15.82.$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$x(t) = C_1 e^{-6.197t} + C_2 e^{-15.82t}.$$

Iz početnih uvjeta slijedi $C_1 + C_2 = 0.15$ i $k_1C_1 + k_2C_2 = 0$, tj. $C_1 \doteq 0.2466$ i $C_2 \doteq -0.0966$. Dakle, jako prigušeno gibanje kugle opisano je sa

$$x(t) \doteq 0.2466e^{-6.197t} - 0.0966e^{-15.82t}.$$

Nakon par sekundi $x(t)$ praktički je nula, tj. kugla se smiri u ravnotežnom položaju.

(ii) U slučaju prigušenja $c = 100$ kg/s problem je modeliran sa

$$9.082\ddot{x} + 100\dot{x} + 891 = 0, \quad x(0) = 0.15, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Karakteristični korijeni su $k_{1,2} = -\alpha \pm i\omega = -5.505 \pm 8.231i$. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe ima oblik

$$x(t) = e^{-5.505t}(A\cos 8.231t + B\sin 8.231t).$$

Iz početnih uvjeta slijedi $A = 0.15$ i $-5.505A + 8.231B = 0$, tj. $B \doteq 0.1003$.
Dakle, slabo prigušeno gibanje kugle opisano je sa

$$x(t) \doteq e^{-5.505t}(0.15\cos 8.231t + 0.1003\sin 8.231t).$$

Prigušene su oscilacije za oko 17% sporije od neprigušenih harmonijskih oscilacija jer je $\omega/\omega_0 \doteq 8.231/9.899 \doteq 0.83$. $\square$

I mnogi drugi fizikalni sustavi modelirani su homogenom diferencijalnom jednadžbom (4.1). U mehanici to su male oscilacije njihala (usp. pogl.1 E), torzione oscilacije elastične niti itd. Istu jednadžbu susrećemo i u teoriji strujnih krugova. Razmotrimo npr. problem pražnjenja kondenzatora kapaciteta C, duž strujnog kruga s otporom R i samoindukcijom L. Prema drugom Kirchhoffovom zakonu o naponima (usp. pogl. 1A) vrijedi

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C}\int J(t)dt = 0,$$

pa zbog $J = dQ/dt$, tj. $Q = \int J(t)dt$, jednadžba koja opisuje pražnjenje kondenzatora glasi

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0.$$

Ono što su masa m, otpor viskoznog medija c i elastičnost opruge k za mehanički sustav, to su indukcija L, otpor R i recipročna vrijednost kapaciteta kondenzatora $1/C$ za električki sustav. Slučaj jakog prigušenja nastupa kada je $R^2 > 4L/C$ i tada se kondenzator jednosmjerno prazni do potpunoga ispražnjenja. Slučaj slabog prigušenja nastupa kada je $R^2 < 4L/C$ i tada dolazi do oscilacija naboja u krugu, tj. u krugu se pojavljuje izmjenična struja koja polako nestaje kako se kondenzator prazni. Kritično prigušenje granični je slučaj između ova dva.

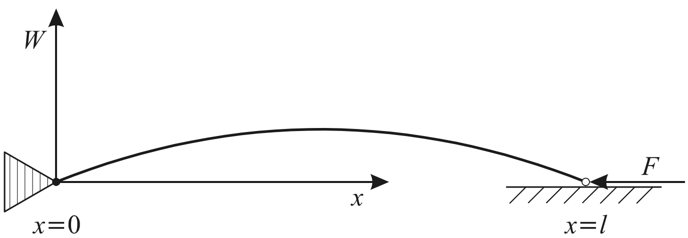
U svim dosadašnjim primjenama bavili smo se problemima u kojima je partikularno rješenje, koje rješava problem, izdvojeno iz općeg pomoću početnih uvjeta, koji određuju vrijednosti nepoznate funkcije y i njezine derivacije y' na jednoj vrijednosti argumenta $x = x_0$. U mnogim se problemima partikularno rješenje izdvaja iz općeg pomoću tzv. rubnih uvjeta, koji određuju vrijednosti nepoznate funkcije y na dvije vrijednosti argumenta $x = x_0$ i $x = x_1$. Tim zahtjevima, međutim, rješenje nije uvijek jednoznačno određeno, što ilustrira problem stabilnosti elastične grede pod djelovanjem uzdužne sile.

Postavimo os x duž homogene elastične grede zanemarive mase. Pretpostavimo da je greda stisnuta duž svoje osi djelovanjem sile F u tom smjeru (v. sl.). Naraste li sila F do neke kritične vrijednosti F_{kr}, greda će se saviti (v. sl.). U okviru teorije čvrstoće dokazuje se da transverzalni otkloni $w(x)$ zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu elastične linije

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} + Fw = 0,$$

gdje je E modul elastičnosti grede, a I moment inercije njezinog poprečnog presjeka. Naravno, otkloni $w(x)$ zadovoljavaju i rubne uvjete

$$w(0) = w(l) = 0.$$



Opće rješenje jednadžbe elastične linije je

$$w(x) = C_1 \cos \sqrt{F/EI}x + C \sin \sqrt{F/EI}x$$

(zato što su njezini karakteristični korijeni $k_{1,2} = \pm i\sqrt{F/EI}$). Uvrštavanjem rubnih uvjeta nalazimo:

$$\begin{aligned} w(0) &= C_1 = 0, \\ w(l) &= C_1 \cos \sqrt{F/EI}l + C \sin \sqrt{F/EI}l = 0. \end{aligned}$$

Odavde slijedi $C_1 = C = 0$, ako je $\sin \sqrt{F/EI}l \neq 0$, ili $C_1 = 0$ i C je bilo koja vrijednost, ako je $\sin \sqrt{F/EI}l = 0$, tj. ako je

$$\frac{F}{EI} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2, \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2, \ldots .$$

To znači da uz

$$\frac{F}{EI} < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

problem ima samo jedno rješenje $y = 0$ i tada nema savijanja. Kada, zbog porasta sile F, gornja nejednakost prijeđe u jednakost, tada problem osim rješenja $y = 0$ ima i rješenja oblika $y = C \sin \dfrac{\pi}{l}x$, gdje je C proizvoljna konstanta. U tom se slučaju greda ne može zadržati u ravnom ravnotežnom položaju, nego je već i najmanji vanjski poticaj izbacuje iz tog položaja. To znači da ravni ravnotežni položaj postaje nestabilan. Izraz za kritičnu silu, pri kojoj se to zbiva

$$F_{kr} = EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

našao je Euler još 1757. Iz naše analize slijedi da će se za silu veću od kritične $F > F_{kr}$ greda ponovno izravnati u stabilni ravni položaj što ipak nije točno. Naime, jednadžba elastične linije $w'' + (F/EI)w = 0$ vrijedi samo za male otklone w. Točnije istraživanje dovelo bi do egzaktne nelinearne jednadžbe koja opisuje proizvoljne otklone w. Njezinim bi se rješenjem pokazalo da se za $F > F_{kr}$ pojavljuje novi, ovaj put zakrivljeni položaj stabilne ravnoteže, koji koegzistira s ravnim položajem nestabilne ravnoteže. Zakrivljenost tog položaja izuzetno brzo raste sa F, što na kraju dovodi do pucanja grede.

Vratimo se sada općenitoj (nehomogenoj) linearnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{4.4}$$

Nađemo li bar jedno partikularno rješenje te jednadžbe, y_p, lako ćemo odrediti njezino opće rješenje. Naime, ako je $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ opće rješenje pripadajuće homogene jednadžbe (4.1), koje zovemo komplementarnim rješenjem jednadžbe (4.6), onda je opće rješenje jednadžbe (4.6) zbroj partikularnog i komplementarnog rješenja, $y = y_p + y_h$. Lako provjeravamo da je taj zbroj rješenje naše jednadžbe:

$$\begin{aligned} &a(y_p + y_h)'' + b(y_p + y_h)' + c(y_p + y_h) = \\ &= (ay_p'' + by_p' + cy_p) + (ay_h'' + by_h' + cy_h) = \\ &= f(x) + 0 = f(x). \end{aligned}$$

Da je svako njezino rješenje Y toga oblika, slijedi iz činjenice što razlika dvaju rješenja jednadžbe (4.2), $Y - y_p$, zadovoljava jednadžbu (4.1):

$$\begin{aligned} & a(Y-y_p)'' + b(Y-y_p)' + c(Y-y_p) = \\ & = (aY'' + bY' + cY) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) = \\ & = f(x) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

što znači da je $Y - y_p = y_h$, tj. $Y = y_p + y_h$, kao što smo i tvrdili.

NEHOMOGENA JEDNADŽBA

Ako je $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ opće rješenje homogene jednadžbe $ay'' + by' + cy = 0$ i ako je y_p bilo koje partikularno rješenje nehomogene jednadžbe $ay'' + by' + cy = f(x)$, onda je

$$y = y_p + y_h = y_p + C_1y_1 + C_2y_2$$

opće rješenje nehomogene jednadžbe

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Jednadžba nema singularnih rješenja.

Primjer 4.6. Nađimo opće rješenje jednadžbe:

(a) $y'' + 4y = 8x^2$,

(b) $y'' - y' - 6y = 7e^{5x}$,

(c) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$,

(d) $y'' - y' - 6y = 13\cos 2x$ i

(e) $y'' - y' - 6y = 7e^{5x} + 13\cos 2x$.

Rješenje:

(a) Riješimo najprije pripadajuću homogenu jednadžbu $y''+4y = 0$. Njezini su karakteristični korijeni $k_{1,2} = \pm 2i$, pa je komplementarno rješenje zadane jednadžbe

$$y_h = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Da bismo našli partikularno rješenje, zapitajmo se koja to funkcija linearno kombinirana sa svojim derivacijama daje polinom drugoga stupnja. To svojstvo imat će dobro odabrani polinom drugoga stupnja. Potražimo zato partikularno rješenje u obliku

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Tada je $y_p'' = 2A$, pa uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dolazimo do jednadžbe

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2$$

koja nam omogućuje da odaberemo odgovarajuće koeficijente A, B i C. Naime, izjednačavanjem koeficijenata uz x^2, x^1 i x^0 na lijevoj i desnoj strani jednadžbe dolazimo do linearnoga sustava

$$4A = 8, \quad 4B = 0, \quad 2A + 4C = 0,$$

čije je rješenje $A = 2$, $B = 0$ i $C = -1$.

Dakle, partikularno je rješenje zadane jednadžbe $y_p = 2x^2 - 1$, pa je njezino opće rješenje

$$y = y_p + y_h = 2x^2 - 1 + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

(b) Karakteristični korijeni pripadajuće homogene jednadžbe $y'' - y' - 6y = 0$ jesu $k_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+24})/2 = 3, -2$, pa je komplementarno rješenje zadane jednadžbe

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

Da bismo našli partikularno rješenje, zapitajmo se koja to funkcija linearno kombinirana sa svojim derivacijama daje višekratnik funkcije e^{5x}. To je očito dobro odabrana funkcija oblika Ae^{5x}. Uvrstimo li nju i njezine derivacije u zadanu jednadžbu, moći ćemo odabrati odgovarajući A:

$$(25A - 5A - 6A)e^{5x} = 7e^{5x},$$
$$14A = 7, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Partikularno je rješenje zadane jednadžbe $y_p = e^{5x}/2$, pa je njezino opće rješenje

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{2}e^{5x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

(c) Komplementarno je rješenje

$$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

jer karakteristična jednadžba $k^2 - 3k + 2 = 0$ ima korijene $k_1 = 1$ i $k_2 = 2$. Pokušaj s partikularnim rješenjem oblika Ae^{2x} u ovom slučaju nema smisla jer je Ae^{2x} posebni slučaj komplementarnoga rješenja, koje zadovoljava homogenu jednadžbu. Pokušajmo s partikularnim rješenjem oblika $y_p = Axe^{2x}$. Uvrstimo li tu funkciju, te njezine derivacije $y_p' = A(1+2x)e^{2x}$ i $y_p'' = A(4 + 2^2 x)e^{2x}$ u zadanu jednadžbu, dobit ćemo:

$$A(4 + 2^2 x)e^{2x} - 3A(1+2x)e^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x},$$
$$Axe^{2x}(2^2 - 3 \cdot 2 + 2) + Ae^{2x}(4 - 3) = e^{2x},$$
$$Ae^{2x} = e^{2x}, \quad A = 1.$$

Član $(2^2 - 3 \cdot 2 + 2)$ ne iščezava slučajno, nego zato što je $k = 2$ korijen karakteristične jednadžbe $k^2 - 3 \cdot k + k = 0$. (Iz istog bismo razloga uvrštavanjem $y = Ae^{2x}$ dobili

$Ae^{2x}(2^2-3\cdot 2+2)=e^{2x}$, tj. $0=e^{2x}$, što pokazuje da $y=Ae^{2x}$ nije partikularno rješenje ni za koji A. Naravno, $y=Ae^{2x}$ jest rješenje pripadajuće homogene jednadžbe.) Dakle, $y_p=xe^{2x}$ partikularno je rješenje zadane jednadžbe, dok je

$$y=y_p+y_h=xe^{2x}+C_1e^x+C_2e^{2x}$$

njezino opće rješenje.

(d) Komplementarno je rješenje kao i u slučaju (b),

$$y_h=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}.$$

Funkcija koja jednom ili dvaput derivirana daje višekratnike od $\cos 2x$ jest višekratnik od $\sin 2x$, odnosno, $\cos 2x$. Potražimo zato partikularno rješenje u obliku

$$y_p=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Tada je

$$\begin{aligned} y_p' &= 2B\cos 2x-2A\sin 2x,\\ y_p'' &= -4A\cos 2x-4B\sin 2x, \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo jednadžbu

$$\begin{aligned} &(-4A-2B-6A)\cos 2x+(-4B+2A-6B)\sin 2x=\\ &=(-10A-2B)\cos 2x+(2A-10B)\sin 2x=13\cos 2x, \end{aligned}$$

iz koje slijedi

$$-10A-2B=13, \quad \text{i} \quad 2A-10B=0,$$

tj. $A=-5/4$ i $B=-1/4$. Dakle, $y_p=-1/4(5\cos 2x+\sin 2x)$, pa je opće rješenje zadane jednadžbe

$$y=y_p+y_h=-\frac{1}{4}(5\cos 2x+\sin 2x)+C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}.$$

(e) Komplementarno je rješenje, kao u (b) i (d),

$$y_h=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}.$$

Desna strana zadane jednadžbe, tzv. funkcija smetnje $7e^{5x}+13\cos 2x$, zbroj je funkcije smetnje u (b) jednadžbi, $7e^{5x}$, i funkcije smetnje u (d) jednadžbi, $13\cos 2x$, pa je njezino partikularno rješenje zbroj partikularnih rješenja tih jednadžbi. (Lako provjeravamo valjanost takve superpozicije rješenja.) Dakle, opće je rješenje zadane jednadžbe

$$y=\frac{1}{2}e^{5x}-\frac{1}{4}(5\cos 2x+\sin 2x)+C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}.$$

□

Postupak kojim smo pronašli partikularna rješenja u prethodnom primjeru zovemo metodom neodređenih koeficijenata.

METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{4.5}$$

možemo naći na sljedeći način.

OSNOVNO PRAVILO. Ako je $f(x)$ jedna od funkcija u lijevome stupcu donje tablice, onda je partikularno rješenje y_p odgovarajuća funkcija u desnome stupcu, s koeficijentima koje odredimo uvrštavanjem te funkcije i njezinih derivacija u (4.6).

MODIFICIRANO PRAVILO. Ako je, prema osnovnom pravilu, odabrano partikularno rješenje ujedno i komplementarno rješenje y_h, onda ga trebamo pomnožiti sa x (ili sa x^2 ako karakteristična jednadžba ima samo jedan, tzv. dvostruki korijen).

PRAVILO ZBROJA. Ako je $f(x)$ zbroj jedne ili više funkcija iz lijevoga stupca donje tablice, onda je partikularno rješenje zbroj odgovarajućih funkcija u desnome stupcu tablice.

$f(x)$	y_p
ae^{kx}	Ae^{kx}
$ax^n, \quad (n = 0, 1, \dots)$	$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Cx + D$
$a \cos \omega x$ $a \sin \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$ae^{kx} \cos \omega x$ $ae^{kx} \sin \omega x$	$e^{kx}(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

Metoda neodređenih koeficijenata funkcionira kad god je funkcija smetnje $f(x)$ jednog od oblika navedenih u gornjoj tablici ili je pak zbroj takvih funkcija.

Postoji i druga metoda za nalaženje partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe, koja nije ograničena na te oblike. To je metoda varijacije parametara (koja se po svome tvorcu, zove i Lagrangeovom metodom). Ako je $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ komplementarno rješenje nehomogene jednadžbe (4.6), onda njezino partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

gdje su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ zasada nepoznate funkcije. Uvrštavanjem y_p i njezinih derivacija u (4.6) dobit ćemo jednu jednadžbu s dvije nepoznanice $C_1(x)$ i $C_2(x)$, koja očito ima mnogo rješenja. Nama je dostatno jedno jedino, pa ćemo izbor rješenja suziti postavljanjem još jednog uvjeta na $C_1(x)$ i $C_2(x)$. Naime, prva derivacija, $y_p' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'$, a time naravno i druga, bit će jednostavnija ako zahtijevamo da C_1 i C_2 zadovoljavaju jednadžbu:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0. \tag{i}$$

Tada su prva i druga derivacija dane sa

$$\begin{aligned} y_p' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' \quad \text{i} \\ y_p'' &= C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'', \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem y_p, y_p' i y_p'' u (4.6) dolazimo do drugog uvjeta za $C_1(x)$ i $C_2(x)$:

$$a(C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'') + b(C_1 y_1' + C_2 y_2') + c(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x).$$

Zbog činjenice da su y_1 i y_2 rješenja homogene jednadžbe (4.1), tj. $ay_i'' + by_i' + cy_i = 0$, za $i = 1, 2$, taj se uvjet svodi na

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{f(x)}{a}. \tag{ii}$$

Riješimo li sustav (i), (ii) algebarski po C_1' i C_2', i integriramo potom C_1' i C_2', dobit ćemo funkcije C_1 i C_2 koje rješavaju naš problem, tj. daju partikularno rješenje nehomogene jednadžbe (4.6). (Čak i ako dobivene integrale ne možemo eksplicitno riješiti, uspjeli smo naše rješenje izraziti pomoću integrala, čime se problem općenito drži riješenim.)

METODA VARIJACIJE PARAMETRA

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{4.6}$$

dano je sa

$$y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

gdje je $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$, uz C_1 i C_2 konstantno, opće rješenje pripadajuće homogene jednadžbe i gdje se funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$, nalaze algebarskim rješenjem jednadžbi

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \tag{i}$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{f(x)}{a}, \tag{ii}$$

po C_1', C_2' i potom integriranjem.

Primjer 4.7. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' + y = 1/\cos x$.

Rješenje: Komplementarno je rješenje

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \cos x,$$

pa partikularno tražimo (varijacijom parametara) u obliku

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

iz uvjeta

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \quad \text{i} \tag{i}$$
$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \tag{ii}$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu sa $\sin x$, a drugu sa $\cos x$ te ih potom zbrojimo, dobit ćemo

$$C_2' = 1, \quad C_2 = x.$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu sa $\cos x$ a drugu sa $\sin x$ te ih potom oduzmemo, dobit ćemo

$$C_1' = -\operatorname{tg} x, \quad C_1 = \int -\operatorname{tg} x dx = \int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = $$
$$= \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x|.$$

Dakle,

$$y_p = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x,$$

pa je opće rješenje zadane jednadžbe

$$y = y_p + y_h = (C_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (C_2 + x)\sin x.$$

□

Primjer 4.8. Ako na (neprigušeni) harmonijski oscilator djeluje i vanjska sila $F(t)$, onda je jednadžba oscilatora $\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)$. Nađimo njezino rješenje.

Rješenje: Komplementarno je rješenje

$$x_h = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

pa partikularno tražimo varijacijom parametara u obliku

$$x_p = A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t.$$

Iz uvjeta

$$\dot{A} \sin \omega t + \dot{B} \cos \omega t = 0 \quad \text{i} \tag{i}$$
$$\omega(\dot{A} \cos \omega t - \dot{B} \sin \omega t) = F(t) \tag{ii}$$

slijedi

$$\dot{A} = \frac{F(t)}{\omega} \cos \omega t \quad \text{i} \quad \dot{B} = -\frac{F(t)}{\omega} \sin \omega t.$$

Integracijom nalazimo partikularno rješenje

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{\sin \omega t}{\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega\tau d\tau - \frac{\cos \omega t}{\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^t F(\tau) \sin(\omega(t-\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

pa je opće rješenje zadane jednažbe

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau.$$

$\square$

Nehomogena linearna jednadžba modelira gibanje harmonijskog oscilatora koje je, osim nutarnjim silama sustava, tj. silom opruge $-kx$ te silom prigušenja $-c\dot{x}$, uzrokovano i vanjskom, nametnutom silom $F(t)$:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t).$$

Ako se RCL-strujni krug napaja strujom iz vanjskog izvora, pod naponom $U(t)$, onda je jakost struje J u tom krugu određena jednadžbom (usp. 2.)

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C} \int J(t) dt = U(t),$$

koja deriviranjem također prelazi u nehomogenu jednadžbu

$$L\frac{d^2 J}{dt^2} + R\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} J = \frac{dU}{dt}.$$

Posebno je važan slučaj u kojem su nametnuta sila $F(t)$ ili napon $U(t)$ periodični. U električkom sustavu to odgovara izmjeničnoj struji. U mehaničkom sustavu periodične su sile uobičajene, npr. sile dobivene djelovanjem motora s unutarnjim sagorijevanjem ili djelovanjem elektromotora. Naravno, najjednostavnije su periodičke funkcije kosinus i sinus, a može se pokazati da se mnoge periodične funkcije mogu izraziti kao beskonačni zbroj kosinusa i sinusa (tzv. Fourierov red). Zato ćemo naš mehanički i električki sustav razmatrati u posebno važnim slučajevima:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad U(t) = U_0 \sin \Omega t,$$

u kojima naše jednadžbe postaju

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t, \tag{4.7}$$

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{1}{C} J = U_0 \Omega \cos \Omega t. \tag{4.8}$$

Analogija mehaničkog i električkog sustava sažeto je prikazana u sljedećoj tablici:

ELEKTRIČKI SUSTAV	MEHANIČKI SUSTAV
Indukcija L	Masa m
Otpor R	Konstanta prigušenja c
Recipročni kapacitet $1/C$	Konstanta opruge k
Derivacija nametnutog napona $U_0\Omega\cos\Omega t$	Nametnuta sila $F_0\cos\Omega t$
Jakost struje J	Pomak x

Uz pokrate:

$$J = x, \quad L = m, \quad R = c, \quad \frac{1}{C} = k, \quad U_0\Omega = F_0,$$

jednadžba (4.8) svodi se na jednadžbu (4.7). Električki i mehanički problem matematički su identični, pa se oba mogu rješavati istovremeno:

Opće rješenje jednadžbe (4.7) zbroj je općeg rješenja homogene jednadžbe (4.2), koje je oblika (I), (II) ili (III) i partikularnoga rješenja y_p jednadžbe (4.7), koje najlakše nalazimo metodom neodređenih koeficijenata. Dakle,

$$x_p = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t,$$

odakle slijedi

$$\dot{x}_p = -\Omega A\sin\Omega t + \Omega B\cos\Omega t,$$
$$\ddot{x}_p = -\Omega^2 A\cos\Omega t - \Omega^2 B\sin\Omega t.$$

Uvrštavanjem u (4.7) nalazimo

$$(A(k - m\Omega^2) + Bc\Omega)\cos\Omega t + (-Ac\Omega + B(k - m\Omega^2))\sin\Omega t = F_0\cos\Omega t,$$

to jest

$$A(k - m\Omega^2) + Bc\Omega = F_0,$$
$$-Ac\Omega + B(k - m\Omega^2) = 0.$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu sa $c\Omega$, drugu sa $(k - m\Omega^2)$ te ih potom zbrojimo, eliminirat ćemo A i lako izračunati B. Pomnožimo li prvu jednadžbu sa $(k - m\Omega^2)$, a drugu sa $-c\Omega$ te ih potom zbrojimo, eliminirat ćemo B i lako izračunati A. Dakle,

$$A = F_0\frac{k - m\Omega^2}{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}, \quad B = F_0\frac{c\Omega}{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}.$$

Uvedemo li uobičajenu pokratu za prirodnu kutnu brzinu (slobodnih i neprigušenih) oscilacija $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, to možemo zapisati ovako:

$$A = F_0\frac{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}, \quad B = F_0\frac{c\Omega}{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}.$$

Izračunato partikularno rješenje jednadžbe (4.7), $x_p = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t$, može se napisati u obliku $x_p = C\cos(\Omega t - \delta)$, gdje je $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, tj. $C = F_0/\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}$ i $\operatorname{tg}\delta =$

B/A, tj. $\operatorname{tg}\delta = (c\Omega)/(m(\omega_0^2 - \Omega^2))$. Opće rješenje jednadžbe (4.7) zbroj je tog partikularnog rješenja i općeg rješenja jednadžbe (4.2), koje je oblika (I), (II) ili (III).

PRIGUŠENE PRISILNE OSCILACIJE

Rješenje jednadžbe

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

jest

$$x = x_h(t) + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \delta),$$

gdje je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ prirodna kutna brzina sustava, tj. brzina njegovih neprigušenih oscilacija, a $\operatorname{tg}\delta = (c\Omega)/(m(\omega_0^2 - \Omega^2))$. Komplementarno rješenje $x_h(t)$ dano je sa (I), (II) ili (III).

Razmotrimo naprije prisilne oscilacije bez prigušenja. Tada je $c = 0$, pa je partikularno rješenje

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t = \frac{F_0}{k\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \cos \Omega t.$$

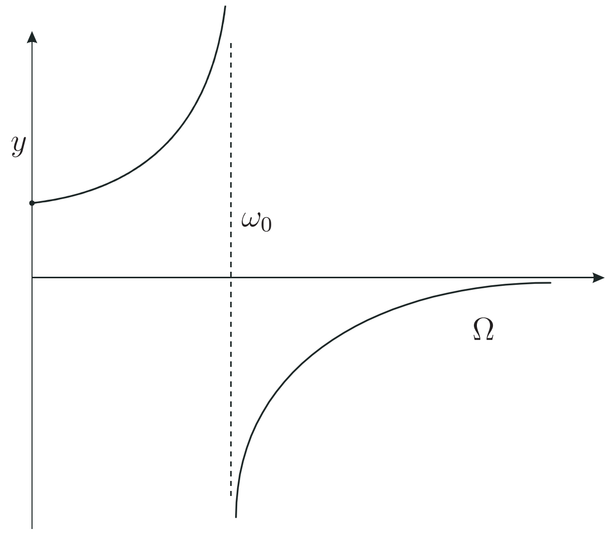
Komplementarno rješenje (rješenje pripadajuće homogene jednadžbe $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$) jest $x_h = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \vartheta)$, pa je opće rješenje

$$x = C\cos(\omega_0 t - \vartheta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t, \tag{4.9}$$

gdje su C i ϑ određeni početnim uvjetima. Maksimalna je amplituda od x_p

$$A_0 = \frac{F_0}{k}\rho, \quad \text{uz} \quad \rho = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Ona ovisi o nametnutoj frekvenciji $\Omega/(2\pi)$ i o prirodnoj frekvenciji sustava $\omega_0/(2\pi)$. Kada se one poklope, tj. kada $\Omega \to \omega_0$, onda $A_0 \to \infty$. Taj fenomen pobuđivanja velikih oscilacija usklađivanjem nametnute i prirodne frekvencije sustava zovemo **rezonancijom**. Veličina ρ zove se faktor rezonancije.



U slučaju rezonancije (bez prigušenja) jednadžba (4.7) postaje

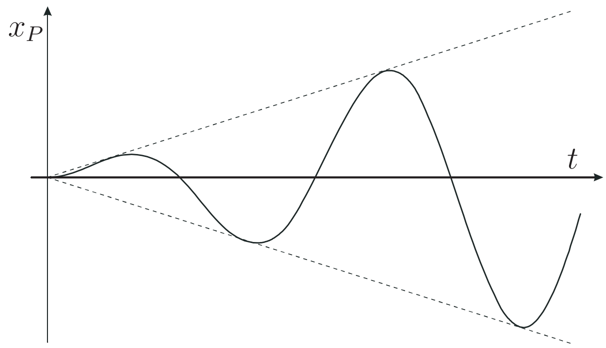
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$$

i njezino je partikularno rješenje, prema modificiranom pravilu metode neodređenih koeficijenata, oblika

$$x_p = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t),$$

odakle uvrštavanjem nalazimo $A = 0$ i $B = F_0/(2m\omega_0)$, tj.

$$x_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$



Vidimo da $x_p(t)$ neograničeno raste. To znači da sustav bez prigušenja (ili s praktično vrlo malim prigušenjem) može, ako mu se nametnu vibracije odgovarajuće frekvencije, proizvesti ogromne vibracije koje ga mogu razoriti.

Druga veoma značajna vrsta oscilacija dobiva se ako je Ω blizu ω_0. Uzmimo npr. ono rješenje (4.9) koje zadovoljava početne uvjete $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Tada je $\vartheta = 0$ i $C = F_0/(m(\omega_0^2 - \Omega^2))$, tj.

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t).$$

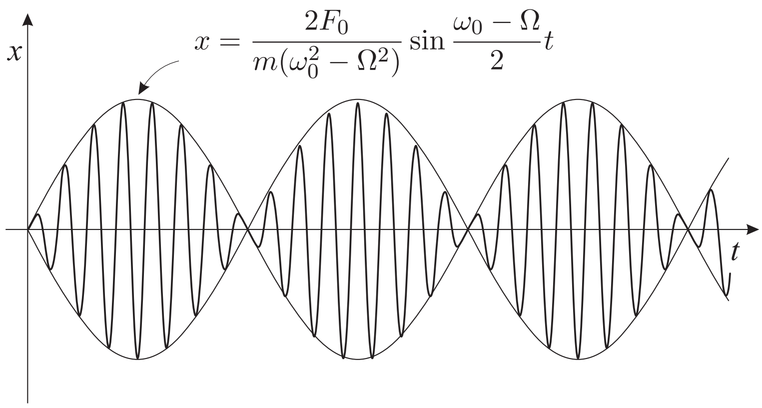
Upotrebom trigonometrijske formule produkta

$$2\sin Rt \sin St = \cos(R-S)t - \cos(R+S)t$$

to rješenje možemo napisati u obliku

$$x = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin\frac{\omega_0+\Omega}{2}t \sin\frac{\omega_0-\Omega}{2}t.$$

Kada je razlika $\omega_0 - \Omega$ mala, to je umnožak relativno brzo oscilirajuće funkcije $\sin(\omega_0+\Omega)t/2$ sa sporo oscilirajućom funkcijom $\sin(\omega_0-\Omega)t/2$. Sporo oscilirajuća funkcija "modulira" brzo oscilirajuću, kako to pokazuje donja slika. Spori rast i pad amplituda brzih oscilacija poznat je kao fenomen **udara**. On se pojavljuje, na primjer, kada zajedno sviraju muzički instrumenti koji nisu točno ugođeni (ili kada se prije nastupa ugađaju, pa još nisu točno ugođeni).



Primjer 4.9. Nađimo rješenje jednadžbe $\ddot{x} + 9x = 5\cos 2t$ uz početne uvjete $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ i skicirajmo njegov graf.

Rješenje: Jednadžba ne sadrži $\dot{x}$, pa možemo naći partikularno rješenje oblika $x_p = A\cos 2t$ (zašto?). Uvrštavanjem nalazimo

$$-4A\cos 2t + 9A\cos 2t = 5\cos 2t, \quad A = 1.$$

S druge strane, opće rješenje homogene jednadžbe $\ddot{x} + 9x = 0$ jest $x_h = C_1\cos 3t + C_2 \sin 3t$, pa je opće rješenje zadane jednadžbe

$$x = \cos 2t + C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Iz početnih uvjeta $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ slijedi $C_1 = -1$ i $C_2 = 0$, pa je traženo rješenje

$$x = \cos 2t - \cos 3t.$$

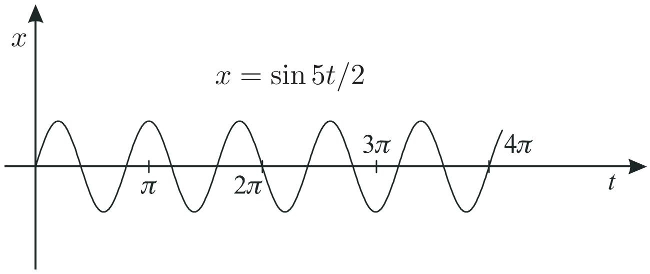
Iz trigonometrijske formule produkta

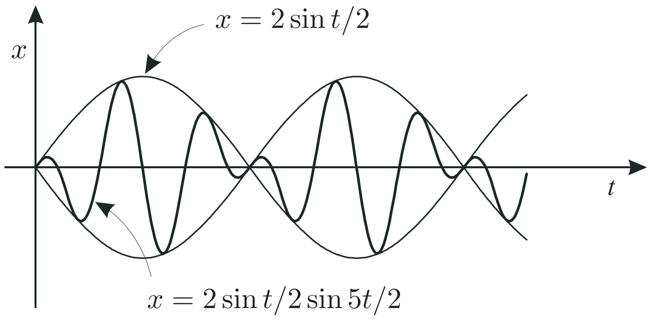
$$2\sin Rt \sin St = \cos(R-S)t - \cos(R+S)t,$$

u našem slučaju, slijedi $R - S = 2$ i $R + S = 3$, tj. $R = 5/2$ i $S = 1/2$. Dakle,

$$x = 2\sin\frac{5}{2}t\sin\frac{1}{2}t.$$

Ovdje možemo o $\sin 5t/2$ misliti kao o brzoj oscilaciji s varijabilnom amplitudom $2\sin t/2$, što ilustrira donji graf. Oscilacije $x(t)$ imaju period 2π s maksimumom u π, 3π, 5π itd., gdje su $\cos 2t$ i $-\cos 3t$ simultano jednaki 1.





□

Razmotrimo sada prisilne oscilacije s prigušenjem. Tada je $c > 0$ i oscilacije su opisane sa

$$x = x_h + x_p = x_h(t) + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}\cos(\Omega t - \delta),$$

gdje je $x_h(t)$ oblika (I), (II), ili (III). U sva tri slučaja **prijelazni dio** rješenja $x_h(t)$ teži k nuli za $t \to \infty$ (praktično postaje nula nakon dovoljno dugo vremena), što znači da $x(t)$ teži prema **stacionarnom oscilatornom dijelu** rješenja $x_p(t)$. Dakle, nakon dovoljno dugo vremena sustav na nametnute harmonijske oscilacije $F_0 \cos \Omega t$ odgovara s praktički harmonijskim oscilacijama iste frekvencije Ω, ali s modificiranom amplitudom i faznim pomakom δ.

To je ono što se stvarno događa, zato što praktički nema fizičkog sustava bez prigušenja. Dok u slučaju neprigušenih prisilnih oscilacija amplitude od $x_p(t)$ teže u beskonačnost, kada Ω teži prema ω_0, to se uz prigušenje ne događa. Amplitude su uvijek konačne, a ovisno o c mogu imati maksimum za neki Ω. To možemo zvati **praktičnom rezonancijom**. Ona je veoma važna jer pokazuje da pobuđivanje sustava nekim nametnutim oscilacijama može rezultirati velikim amplitudama koje mogu razoriti čitav sustav. Takvi su se slučajevi stvarno i događali, pogotovo dok se o fenomenu rezonancije baš i nije mnogo znalo. Strojevi, brodovi, avioni, mostovi itd. vibrirajući su mehanički sustavi za koje je važno, a katkada nažalost i vrlo teško, naći konstrukcije potpuno oslobođene neželjenih rezonancija.

Razmotrimo stoga problem **praktične rezonancije**. Zanima nas za koji će Ω vrijednost amplitude (stacionarnog oscilatornog stanja sustava)

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}$$

biti maksimalna. Iz uvjeta maksimalnosti, $dA/d\Omega = 0$, slijedi

$$(-2m^2(\omega_0^2 - \Omega^2) + c^2)\Omega = 0,$$

što je, zbog $\Omega \neq 0$, ekvivalentno sa

$$c^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \Omega^2), \quad \text{tj.} \quad \Omega^2 = \frac{2m^2\omega_0^2 - c^2}{2m^2}.$$

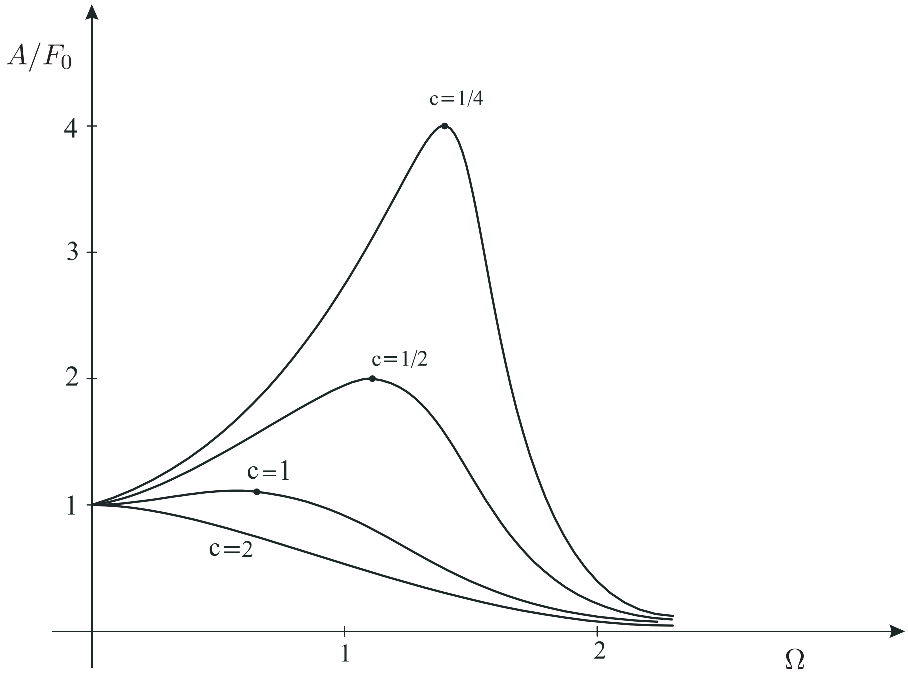
Za dovoljno veliko prigušenje, $c^2 > 2m^2\omega_0^2 = 2mk$, nema realnih vrijednosti Ω koje bi davale maksimalnu amplitudu $A(\Omega)$. To znači da amplituda $A(\Omega)$ monotono pada dok Ω raste (usp. donju sliku). Ako je $c^2 < 2m^2\omega_0^2 = 2mk$, onda postoji realna vrijednost

$$\Omega_{max} = \sqrt{\frac{2m^2\omega_0^2 - c^2}{2m^2}},$$

koja daje maksimalnu amplitudu

$$A(\Omega_{max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - 2c^2}}.$$

Budući da je $dA(\Omega_{max})/dc < 0$ za $c^2 < 2mk$ (što je lako provjeriti), maksimalna amplituda $A(\Omega_{max})$ raste kada c pada i očito teži u beskonačnost kada c teži prema nuli (u skladu s našim razmatranjima neprigušenih oscilacija). Graf na donoj slici prikazuje tzv. **amplifikaciju** $A(\Omega)/F_0$ (omjer amplitude rezultirajućih oscilacija i amplitude nametnutih oscilacija, koje su ih izazvale) za $m = 1$, $k = 1$ i razne vrijednosti konstante prigušenja c.



Evo sada i prijevoda prethodnih rezultata na jezik koji se rabi u elektrotehnici i koji uvodi neke svoje specifične termine. U skladu s našim rječnikom električnoga sustava, u kojem je $x = J$, $m = L$, $k = 1/C$ (dakle $\omega_0^2 = k/m = 1/LC$), $c = R$ i $F_0 = U_0\Omega$, prigušene prisilne oscilacije izgledaju ovako:

$$J(t) = J_h(t) + \frac{U_0\Omega}{\sqrt{L^2\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + R^2\Omega^2}}\cos(\Omega t - \delta),$$

ili, nakon malo sređivanja,

$$J(t) = J_h(t) + \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right)^2 + R^2}}\cos(\Omega t - \delta).$$

Elektrotehničari uvode vrijednost $S = \dfrac{1}{C\Omega} - L\Omega$, koju zovu **reaktanca**, nakon čega se amplituda stacionarnih oscilacija, koju označavaju s J_0, može izraziti kao

$$J_0 = \frac{U_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}.$$

Veličinu $\sqrt{S^2 + R^2}$ elektrotehničari zovu **impendanca**, a naša formula pokazuje da je impendanca jednaka omjeru U_0/J_0, što je poopćenje Ohmovog zakona $R = U/J$ koji vrijedi za konstantne vrijednosti napona U i jakosti struje J (usp. pogl. 1 A).

Reaktanca i impendanca prirodno se pojavljuju kada jednadžbu

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{1}{C}J = U_0\Omega\cos\Omega t$$

rješavamo elegantnom metodom prijelaza na kompleksne funkcije (usp. pogl. 1 A). Sada ćemo se upoznati i s tom metodom.

Zbog činjenice da je $\cos\Omega t$ realni dio od $e^{i\Omega t}$, nameće se ideja da potražimo kompleksno partikularno rješenje J_p kompleksne jednadžbe

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{1}{C}J = U_0\Omega e^{i\Omega t},$$

te potom njegov realni dio odvojimo kao realno partikularno rješenje polazne realne jednadžbe (lako je provjeriti da je realni dio rješenja kompleksne jednadžbe realno rješenje odgovarajuće realne jednadžbe). Kompleksno partikularno rješenje J_p prirodno je, zbog oblika desne strane kompleksne jednadžbe, potražiti u obliku

$$J_p = Ke^{i\Omega t}.$$

Uvrštavanjem u kompleksnu jednadžbu, zbog $\dot{J}_p = i\Omega Ke^{i\Omega t}$ i $\ddot{J}_p = -\Omega^2 Ke^{i\Omega t}$, dobivamo

$$\left(-\Omega^2 L + i\Omega R + \frac{1}{C}\right)Ke^{i\Omega t} = U_0\Omega e^{i\Omega t}.$$

Podijelimo li jednadžbu sa $\Omega e^{i\Omega t}$ i riješimo li je potom po K, dobit ćemo

$$K = \frac{U_0}{\left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right) + iR} = \frac{U_0}{S + iR} = \frac{U_0(S - iR)}{S^2 + R^2}$$

u kojem se prirodno pojavljuje reaktanca S.

Dakle, kompleksno je partikularno rješenje

$$J_p = Ke^{i\Omega t} = \frac{U_0}{S^2 + R^2}(S - iR)(\cos\Omega t + i\sin\Omega t).$$

Njegov je realni dio

$$\begin{gathered} \frac{U_0}{S^2 + R^2}(S\cos\Omega t + R\sin\Omega t) = \\ \frac{U_0}{S^2 + R^2}\sqrt{S^2 + R^2}\cos(\Omega t - \delta) = \\ \frac{U_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}\cos(\Omega t - \delta), \end{gathered}$$

gdje je $\operatorname{tg}\delta = R/S$.

Primjer 4.10. Koristeći se kompleksnom metodom, riješimo jednadžbu

$$y'' + y' + 3y = 5\cos x.$$

Rješenje: Odgovarajuća je kompleksna jednadžba

$$y'' + y' + 3y = 5e^{ix}.$$

Uvrštavanjem $y = Ke^{ix}$ nalazimo

$$(-1 + i + 3)Ke^{ix} = 5e^{ix},$$

$$K = \frac{5}{2 + i} = \frac{5(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i.$$

Dakle, partikularno je rješenje kompleksne jednadžbe

$$(2 - i)e^{ix} = (2 - i)(\cos x + i\sin x),$$

a njegov realni dio i traženo rješenje zadane jednadžbe

$$y_p = 2\cos x + \sin x.$$

□

Elektrotehničari uvode i tzv. **kompleksnu impendancu**:

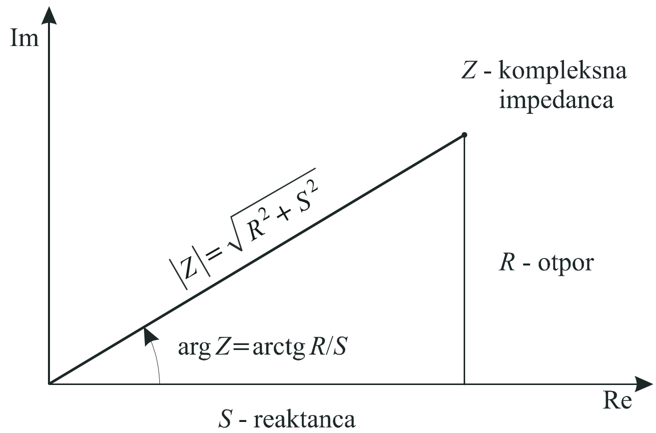
$$Z = S + iR = \left(\frac{1}{C\Omega} - L\Omega\right) + iR,$$

pomoću koje se vrijednost K može zapisati u obliku $K = U_0/Z$, pa kompleksna impendanca $Z = |Z|e^{i \arg Z}$ sadrži sve informacije o partikularnom rješenju kompleksne jednadžbe:

$$J_p = \frac{U_0}{Z}e^{i\Omega t} = \frac{U_0}{|Z|e^{i \arg Z}}e^{i\Omega t} = \frac{U_0}{|Z|}e^{i(\Omega t - \arg Z)}$$

i njegovom realnom dijelu, koji je partikularno rješenje realne jednadžbe:

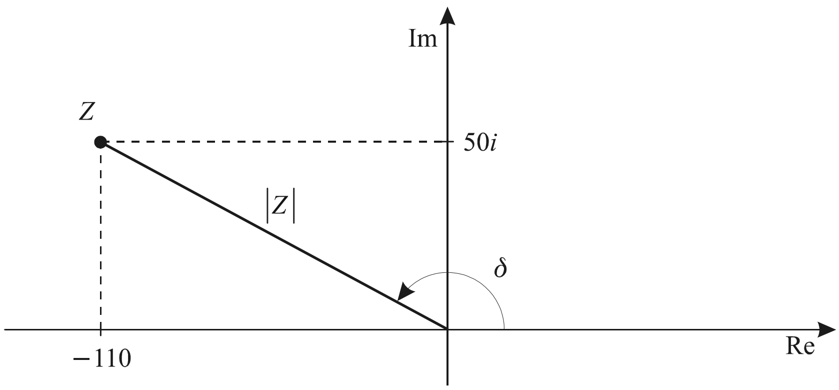
$$\frac{U_0}{|Z|}\cos(\Omega t - \arg Z)$$



Primjer 4.11. Odredimo stacionarnu jakost struje $J_p(t)$ u RCL-krugu koji je spojen na izmjenični napon amplitude $U_0 = 200$ volta i frekvencije $\nu = \Omega/2\pi = 4/2\pi$ herza, ako je indukcija $L = 30$ henrija, otpor $R = 50$ ohma i kapacitet $C = 0.025$ farada.

Rješenje: Reaktanca $S = (1/(C\Omega) - L\Omega)$ iznosi -110, pa je kompleksna impendanca

$$Z = -110 + 50i\ .$$



Realna je impendanca $|Z| = \sqrt{50^2 + 110^2} = 10\sqrt{146} \doteq 120.83$, dok je fazni pomak $\delta = \pi - \operatorname{arctg}(50/110) \doteq 2.715$. Dakle,

$$\begin{aligned} J_p &= \frac{U_0}{|Z|}\cos(\Omega t - \delta) = \\ &\doteq 1.655\cos(4t - 2.71). \end{aligned}$$

□

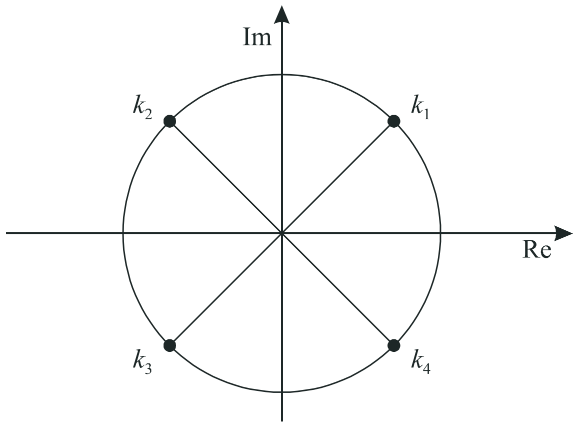
Napominjemo da sve metode koje smo uveli za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima drugoga reda jednako dobro funkcioniraju i za jednadžbe iste vrste, ali reda višeg od dva. Zato nećemo ulaziti u detaljan opis metoda u tom općenitijem slučaju, nego ćemo ih samo ilustrirati s par primjera.

Primjer 4.12. Nađimo opće rješenje homogene jednadžbe četvrtog reda $y^{(4)} + a^4 y = 0$.

Rješenje: Karakteristična jednadžba $k^4 + a^4 = 0$, $k = a\sqrt[4]{-1}$ ima četiri korijena koji su, prema De Moivreovoj formuli:

$$k_1 = a\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad k_2 = a\tfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$k_3 = a\tfrac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad k_4 = a\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}$$



To znači da je opće rješenje zadane jednadžbe

$$y = C_1 e^{(\alpha+\alpha i)x} + C_2 e^{(-\alpha+\alpha i)x} + C_3 e^{(-\alpha-\alpha i)x} + C_4 e^{(\alpha-\alpha i)x},$$

gdje je $\alpha = a/\sqrt{2}$. Primjenom Eulerove formule možemo ga zapisati u standardnom obliku

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x) + e^{-\alpha x}(C\cos\alpha x + D\sin\alpha x).$$

□

Primjer 4.13. Riješimo nehomogenu jednadžbu četvrtog reda

$$y^{(4)} - y'' = x^2 - e^{2x}.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba $k^4 - k^2 = (k^2 - k)(k^2 + k) = k^2(k-1)(k+1)$ ima korijene $k_{1,2} = 0$ (dvostruki), $k_3 = 1$ i $k_4 = -1$. Dvostrukom korijenu pripadaju rješenja $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$ i $y_2 = xe^{0 \cdot x} = x$, dok jednostrukima pripadaju rješenja $y_3 = e^{1 \cdot x} = e^x$ i $y_4 = e^{-1 \cdot x} = e^{-x}$. Dakle, komplementarno je rješenje zadane jednadžbe

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Partikularno rješenje nalazimo, koristeći se metodom neodređenih koeficijenata, u obliku

$$y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C) + (De^{2x}).$$

Primijetimo da se nijedan član od y_p ne pojavljuje u y_h, pa nije potrebno primijeniti modificirano pravilo. Uvrštavanjem u jednadžbu nalazimo

$$-12Ax^2 - 6Bx + (24A - 2C) + 12De^{2x} = x^2 - e^{2x},$$

odakle slijedi

$$-12A = 1, \quad -6B = 0, \quad 24A - 2C = 0, \quad 12D = -1,$$

pa je $A = -1/12$, $B = 0$, $C = -1$ i $D = -1/12$.
Dakle opće je rješenje zadane jednadžbe

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} - \frac{1}{12}(x^2 + 12x^2) - \frac{1}{12} e^{2x}.$$

$\square$

Primjer 4.14. Nađimo opće rješenje jednadžbe

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 30e^x.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$, tj. $(k-1)^3 = 0$ ima jedan jedini, trostruki korijen $k = 1$. Trostrukom korijenu $k = 1$ pripadaju tri rješenja $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2 e^x$, pa je komplementarno rješenje zadane jednadžbe

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.$$

Pokušamo li partikularno rješenje (zbog desne strane $30e^x$) naći u obliku Ae^x, nećemo uspjeti, jer se ono već pojavljuje u y_h. Slično vrijedi i za Axe^x i Ax^2e^x, pa ga zato tražimo u obliku

$$y_p = Ax^3 e^x.$$

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu nalazimo

$$A(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)e^x - 3A(x^3 + 6x^2 + 6x)e^x + 3A(x^3 + 3x^2)e^x - Ax^3 e^x = 30e^x,$$

odakle slijedi

$$(A - 3A + 3A - A)x^3 + (9A - 18A + 9A)x^2 + (18A - 18A)x + 6A = 30.$$

Kao što očekujemo, u skladu s modificiranim pravilom metode neodređenih koeficijenata, koeficijenti uz x^3, x^2 i x iščezavaju, pa od cijele jednadžbe ostaje $6A = 30$, tj. $A = 5$. Dakle,

$$y = y_p + y_h = 5x^3e^x + (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x.$$

□

Neke se jednadžbe mogu odgovarajućom supstitucijom svesti na linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, koje smo obradili u ovom poglavlju. Najpoznatija je Euler-Cauchyjeva homogena linearna jednadžba

$$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1xy' + a_0y = 0.$$

Ona se svodi na homogenu linearnu jednadžbu s **konstantnim koeficijentima** supstitucijom $z = \ln x$.

Primjer 4.15. Nađimo opće rješenje Euler-Cauchyjeve jednadžbe

$$x^3y''' + 4x^2y'' - 5xy' - 15y = 0.$$

Rješenje: Uz supstituciju $z = \ln x$ imamo

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz},\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx} =\\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right),\\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)\right] =\\
&= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2}\right)\frac{dz}{dx} =\\
&= \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz} - \frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dz^3} =\\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right).
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobijemo homogenu linearnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima

$$\left(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right) + 4\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) - 5\frac{dy}{dz} - 15y = 0,$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} + \frac{d^2y}{dz^2} - 7\frac{dy}{dz} - 15y = 0.$$

Njezina karakteristična jednadžba

$$k^3 + k^2 - 7k - 15 = (k-3)(k^2 + 4k + 5) = 0$$

ima korijene $k_1 = 3$, $k_{2,3} = -2 \pm i$, pa je njezino opće rješenje

$$y = C_1 e^{3z} + e^{-2z}(C_2 \cos z + C_3 \sin z).$$

Zamijenivši z sa $\ln x$, nalazimo opće rješenje zadane Euler-Cauchyjeve jednadžbe

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{3\ln x} + e^{-2\ln x}(C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)) = \\ &= C_1 x^3 + x^{-2}(C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)). \end{aligned}$$

$\square$