

Fundamentalno rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine

- ✦ Neka su p i q neprekidne funkcije na intervalu $I = (\alpha, \beta)$, koji može biti i beskonačan. Za svaku funkciju y koja je dva puta diferencijabilna na I , definišemo diferencijalni operator L :

$$L[y] = y'' + p y' + q y$$

- ✦ $L[y]$ je funkcija na I koja daje izlaznu vrednost

$$L[y](t) = y''(t) + p(t) y'(t) + q(t) y(t)$$

- ✦ Na primer,

$$p(t) = t^2, \quad q(t) = e^{2t}, \quad y(t) = \sin(t), \quad I = (0, 2\pi)$$

$$L[y](t) = -\sin(t) + t^2 \cos(t) + 2e^{2t} \sin(t)$$

Diferencijalni operator

- ✦ Prvo ćemo razmatrati linearnu homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda $L[y](t) = 0$, zajedno sa početnim uslovima:

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1$$

- ✦ Prvo pitanje je da li postoji rešenje ovog početnog problema i ako postoji, da li je ono jedinstveno.
- ✦ Dalje, želimo da znamo da li se zna nešto o obliku i strukturi rešenja što bi bilo korisno za nalaženje rešenja konkretnih problema.

Teorema 1 (Egzistencija i jedinstvenost)

✦ Posmatramo početni problem

$$y'' + p(t) y' + q(t) y = f(t)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0$$

gde su p , q i f neprekidne funkcije na otvorenom intervalu I koji sadrži t_0 . Tada postoji jedinstveno rešenje $y = \phi(t)$ ovog problema na I .

✦ Napomena: Iako ova teorema govori o tome da rešenje takvog početnog problema postoji, često ga nije moguće lako naći. To je velika razlika u odnosu na linearne diferencijalne jednačine prvog reda.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$$

Primer 1

-
- ✦ Dat je početni problem drugog reda

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t + 3)y = 0, y(1) = 2, y'(1) = 1$$

- ✦ Napisan u obliku:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

- ✦ $p(t) = 1/(t - 3)$, $q(t) = -(t + 3)/(t(t - 3))$ i $f(t) = 0$

- ✦ Tačke u kojima koeficijenti imaju prekid su $t = 0$ i $t = 3$. Dakle, najduži otvoreni interval koji sadrži početnu tačku $t = 1$ na kome su koeficijenti neprekidni je $0 < t < 3$

- ✦ Tako najduži interval na kome Teorema 1 garantuje jedinstvenost rešenja je $0 < t < 3$

Primer 2

✦ Dat je linearni početni problem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

gde su p i q neprekidne funkcije na otvorenom intervalu I koji sadrži t_0 .

- ✦ Na osnovu početnih uslova može se zaključiti da je $y = 0$ jedno rešenje ovog homogenog problema.
- ✦ Kako su pretpostavke Teoreme 1 ispunjene, sledi da je $y = 0$ jedino rešenje ovog problema.

Teorema 2 (Princip superpozicije)

- ✦ Ako su y_1 i y_2 rešenja jednačine

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

onda je linearna kombinacija $c_1y_1 + c_2y_2$ takođe rešenje ove diferencijalne jednačine, za sve konstante c_1 i c_2 .

- ✦ Tako se sa bilo koja dva rešenja y_1 i y_2 može konstruisati beskonačna familija rešenja koja su sva oblika $y = c_1y_1 + c_2y_2$.
- ✦ Da li se sva rešenja mogu napisati na ovaj način ili neka rešenja možda imaju i drugačiji oblik? Za odgovor na ovo pitanje koristi se determinanta Vronskog.

Determinanta Vronskog

- ✦ Neka su y_1 i y_2 rešenja diferencijalne jednačine

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

- ✦ Na osnovu Teoreme 2, znamo da je $y = c_1y_1 + c_2y_2$ takođe rešenje ove diferencijalne jednačine.
- ✦ Sledeći korak je naći c_1 i c_2 tako da $y = c_1y_1 + c_2y_2$ zadovoljava početni uslov

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

- ✦ Da bi se to uradilo, treba rešiti sledeći sistem:

$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0$$

$$c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y'_0$$

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$

$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0'$$

Determinanta Vronskog

✦ Kada se sistem reši, dobija se

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

$$c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

✦ Ili Kramerovim pravilom:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}$$

Determinanta Vronskog

- ✦ Za jedinstvenost rešenja ovog sistema, neophodno je da determinanta W u imeniocu ne sme biti jednaka nuli:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{W}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y'_2(t_0) - y'_1(t_0)y_2(t_0)$$

- ✦ W se zove **determinanta Vronskog**, ili jednostavnije Vronskijan rešenja y_1 i y_2 . Koristi se i notacija

$$W(y_1, y_2)(t_0)$$

Teorema 3

✦ Neka su y_1 i y_2 rešenja jednačine

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

sa početnim uslovima

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

Tada je uvek moguće pronaći konstante c_1, c_2 tako da

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu i početne uslove ako i samo ako je determinanta Vronskog

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

različita od nule u t_0 .

Primer 3

- ✦ Može se proveriti da su

$$y_1(t) = e^{-2t} \text{ i } y_2(t) = e^{-3t}$$

rešenja diferencijalne jednačine

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

- ✦ Determinanta Vronskog za ove funkcije:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}$$

- ✦ Kako je W različito od nule za sve t , funkcije y_1 i y_2 se mogu uzeti za konstrukciju rešenja diferencijalne jednačine sa početnim uslovima za bilo koje t .

Teorema 4 (Fundamentalna rešenja)

- ✦ Neka su y_1 i y_2 rešenja jednačine

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Tada familija rešenja

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

sa proizvoljnim koeficijentima c_1, c_2 predstavlja *opšte rešenje* ove diferencijalne jednačine **ako i samo ako** postoji tačka t_0 takva da važi $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0, .$

- ✦ Ako je $y = c_1y_1 + c_2y_2$ opšte rešenje ove diferencijalne jednačine, onda y_1 i y_2 predstavljaju *fundamentalni skup rešenja* diferencijalne jednačine.

Primer 4: Fundamentalna rešenja

- ✦ Data je diferencijalna jednačina:

$$2t^2 y'' + 3t y' - y = 0, \quad t > 0$$

- ✦ Pokazati da funkcije $y_1 = t^{1/2}$, $y_2 = t^{-1}$ čine fundamentalni skup rešenja.

- ✦ Da bi se to pokazalo, potrebno je prvo y_1 zameniti u jednačinu:

$$2t^2 \left(\frac{-t^{-3/2}}{4} \right) + 3t \left(\frac{t^{-1/2}}{2} \right) - t^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 \right) t^{1/2} = 0$$

- ✦ Tako smo dokazali da je y_1 zaista njeno rešenje.

- ✦ Slično i za y_2 :

$$2t^2 (2t^{-3}) + 3t (-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0$$

Primer 4: Fundamentalna rešenja

$$y_1 = t^{1/2}, y_2 = t^{-1}$$

- ✦ Da bi se pokazalo da y_1 i y_2 formiraju fundamentalni skup rešenja, treba izračunati determinantu Vronskog za y_1 i y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-3/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

- ✦ Kako je $W \neq 0$ za $t > 0$, y_1, y_2 predstavljaju fundamentalni skup rešenja diferencijalne jednačine

$$2t^2 y'' + 3t y' - y = 0, \quad t > 0$$

Teorema 5: Egzistencija fundamentalnog skupa rešenja

- ✦ Neka je data diferencijalna jednačina, čiji su koeficijenti p i q neprekidne funkcije na nekom otvorenom intervalu I :

$$L[y] = y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$$

- ✦ Neka je t_0 tačka iz I , i neka su y_1 i y_2 rešenja ove jednačine gde y_1 zadovoljava početne uslove

$$y_1(t_0) = 1, \quad y_1'(t_0) = 0$$

a y_2 zadovoljava početne uslove

$$y_2(t_0) = 0, \quad y_2'(t_0) = 1$$

- ✦ Tada y_1 i y_2 čine fundamentalni skup rešenja date diferencijalne jednačine.

Primer 5:

-
- ✦ Naći fundamentalni skup koristeći Teoremu 5 za diferencijalnu jednačinu i početnu tačku

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

- ✦ Može se pokazati da su dva rešenja ove jednačine

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}$$

Vronskijan ovih rešenja je $W(y_1, y_2)(t_0) = -2 \neq 0$ tako da ove funkcije čine fundamentalni skup rešenja.

- ✦ Ali ove dve funkcije ne ispunjavaju početne uslove iz Teoreme 5, tako da one ne čine fundamentalni skup rešenja iz te teoreme.

- ✦ Neka su y_3 i y_4 fundamentalna rešenja iz Teoreme 5.

$$y_3(0) = 1, \quad y_3'(0) = 0; \quad y_4(0) = 0, \quad y_4'(0) = 1$$

Primer 5:

- ✧ Kako y_1 i y_2 čine fundamentalni skup rešenja, onda važi

$$y_3 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad y_3(0) = 1, \quad y_3'(0) = 0$$

$$y_4 = d_1 e^t + d_2 e^{-t}, \quad y_4(0) = 0, \quad y_4'(0) = 1$$

- ✧ Rešavajući svaku od ovih jednačina, dobija se

$$y_3(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} = \cosh(t), \quad y_4(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} = \sinh(t)$$

- ✧ Determinanta Vronskog za y_3 i y_4 je

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \neq 0$$

- ✧ Tako y_3 i y_4 čine fundamentalni skup rešenja iz Teoreme 5, pa je opšte rešenje u tom slučaju

$$y(t) = k_1 \cosh(t) + k_2 \sinh(t)$$

Primer 5:

✦ Tako oba skupa

$$S_1 = \{e^t, e^{-t}\} \text{ i } S_2 = \{\cosh t, \sinh t\}$$

predstavljaju fundamentalni skup rešenja diferencialne jednačine sa početnom tačkom

$$y'' - y = 0, \quad t_0 = 0$$

✦ Generalno, diferencialna jednačina će imati beskonačno mnogo različitih fundamentalnih skupova rešenja. Biramo onaj koji nam najviše odgovara za datu svrhu.

Teorema 6 (Abelova teorema)

✦ Neka su y_1 i y_2 rešenja jednačine

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

gde su p i q neprekidne funkcije na nekom otvorenom intervalu I . Tada je $W(y_1, y_2)(t)$ data sa

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}$$

gde je c konstanta koja zavisi od y_1 i y_2 ali ne od t .

✦ $W(y_1, y_2)(t)$ je ili nula za svako t iz I (za $c = 0$) ili nije nigde nula na I (za $c \neq 0$).

Primer 6: primena Abelove teoreme

- ✦ Data je diferencijalna jednačina:

$$2t^2 y'' + 3t y' - y = 0, \quad t > 0 \quad \text{i njena rešenja} \quad y_1 = t^{1/2}, \quad y_2 = t^{-1}$$

- ✦ Determinanta Vronskog za ove funkcije je data sa

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} t^{-3/2} = -\frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

- ✦ Diferencijalna jednačina u opštem obliku:

$$y'' + 3/(2t) y' - 1/(2t^2) y = 0, \quad t > 0$$

- ✦ $p(t) = 3/(2t)$ i Vronskijan na osnovu Teoreme 6 je

$$W(y_1, y_2)(t) = c e^{-\int 3/(2t) dt} = c e^{(-3/2 \ln t)} = c t^{-3/2}$$

- ✦ Ovo je Vronskijan za bilo koji par fundamentalnih rešenja. Dakle, za rešenja y_1 i y_2 mora biti $c = -3/2$

Rezime

-
- ✦ Za traženje opšteg rešenja diferencijalne jednačine

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad \alpha < t < \beta$$

prvo se moraju naći dva njena rešenja y_1 i y_2 .

- ✦ Zatim treba proveriti da li početna tačka t_0 pripada intervalu na kom je $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$.
- ✦ Sledi da y_1 i y_2 čine fundamentalni skup rešenja diferencijalne jednačine čije je opšte rešenje $y = c_1y_1 + c_2y_2$.
- ✦ Ako su početni uslovi zadati u tački t_0 intervala na kome je $W \neq 0$, onda c_1 i c_2 mogu biti određeni tako da zadovoljavaju te uslove.