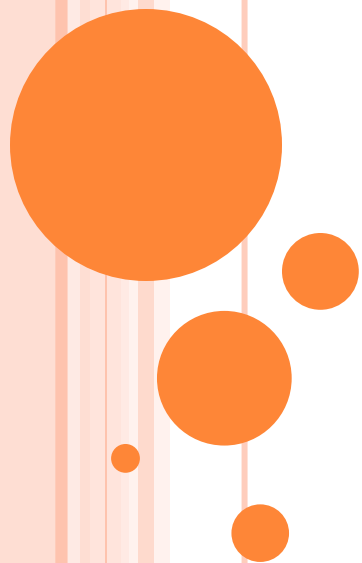


Funkcije više promenljivih

Uvod u funkcije više promenljivih



Na ovom predavanju ćemo govoriti o:

- Oznakama za funkcije više promenljivih
- Domenu funkcija više promenljivih
- Graficima funkcija više promenljivih
- Nivo linijama za funkcije više promenljivih



Oznake za funkcije više promenljivih

Do sada smo proučavali funkcije jedne promenljive, u oznaci $y = f(x)$ gde je x bila nezavisna promenljiva, a y zavisna promenljiva. Proširujemo ovu ideju na funkcije koje mogu imati više od jedne nezavisne promenljive. Posmatrajmo, na primer, ove funkcije:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$g(x, y, z) = 2xe^{yz}$$

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4$$



Kada se traži vrednost funkcije više promenljivih, umesto da zamenjujemo samo vrednost za x, zameni ćemo vrednosti za svaku nezavisnu promenljivu.

Na primer, za funkciju f sa prethodnog slajda, izračunati f(x, y) za (2, 3), (4, -3) i (5, y).

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$f(2, 3) = 2 \cdot 2^2 + 3^2 = 2 \cdot 4 + 9 = 17$$

$$f(4, -3) = 2 \cdot 4^2 + (-3)^2 = 2 \cdot 16 + 9 = 41$$

$$f(5, y) = 2 \cdot 5^2 + y^2 = 2 \cdot 25 + y^2 = 50 + y^2$$



Funkcija dve promenljive: Funkcija dve promenljive x i y je pravilo koje svakom paru (x, y) iz datog skupa D (koji se naziva domen) dodeljuje jedinstvenu vrednost $z=f(x, y)$.

Funkcije više od dve promenljive se definišu analogno.

Operacije koje možemo izvesti na funkcijama jedne promenljive, mogu se takođe izvesti i na funkcijama više promenljivih.

Na primer, za funkcije dve promenljive f i g :

$$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$$

$$(f \cdot g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \text{ za } g(x, y) \neq 0$$



Domen funkcija više promenljivh

Osim u slučaju kada je domen dat, domenom ćemo smatrati skup svih tačaka za koje je data jednačina definisana.

Na primer, posmatrajmo funkcije

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 \quad \text{i} \quad g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Domen funkcije $f(x, y)$ je cela xy -ravan. Za svaki par iz xy -ravni ćemo dobiti realnu vrednost za f .

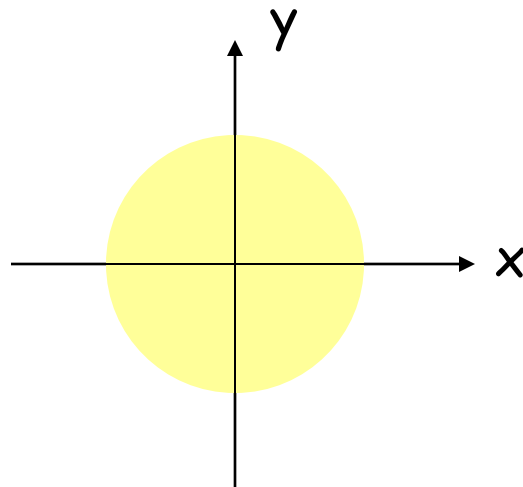
Domen funkcije $g(x, y)$ je skup svih tačaka (x, y) xy -ravni takvih da je proizvod xy veći od 0. To će biti sve tačke prvog i trećeg kvadranta.



Primer 1: Odrediti domen funkcije $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Rešenje: Domen funkcije $f(x, y)$ je skup svih tačaka (x, y) koje zadovoljavaju nejednakosti:

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{tj.} \quad 25 \geq x^2 + y^2$$



Primer 2: Odrediti domen funkcije

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16}$$

Rešenje:

g je funkcija tri promenljive, tako da domen NIJE površina u xy-ravni. Domen funkcije g je telo u 3-dimenzionalnom koordinatnom sistemu.

Izraz pod korenom mora biti nenegativan, tako da dobijamo sledeće nejednakosti:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16 \geq 0 \text{ tj. } x^2 + y^2 + z^2 \geq 16$$

Iz ove nejednakosti sledi da domen čine sve trojke izvan sfere poluprečnika 4 sa centrom u koordinatnom početku.



Primer 3: Odrediti domen funkcije

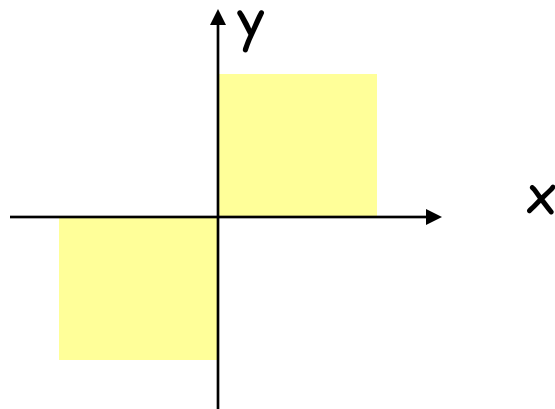
$$h(x, y) = \ln(xy)$$

Rešenje:

Znamo da argument logaritamske funkcije mora biti veći od nule, tako imamo

$$x \cdot y > 0$$

Ova nejednakost važi za tačke u I i III kvadrantu. Napomenimo da x-osa i y-osa NISU u domenu.



Grafici funkcija više promenljivih

Grafik funkcije dve promenljive, $z = f(x, y)$, je skup uređenih trojki (x, y, z) za koje su uređene dvojke (x, y) iz domena.

*Grafik funkcije $z = f(x, y)$ je površ u 3-dimenzionalnom prostoru.

Grafik funkcije tri promenljive $w = f(x, y, z)$ je skup svih tačaka (x, y, z, w) za koje su uređene trojke (x, y, z) iz domena.

*Grafik funkcije $w = f(x, y, z)$ je u 4 dimenzije.

Taj grafik ne možemo nacrtati, kao ni grafik bilo kakve funkcije koja ima 3 ili više nezavisnih promenljivih.



Primer 4: Naći domen i kodomen funkcije i skicirati njen grafik.

$$z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Rešenje: Na osnovu Primera 1 znamo da domen ove funkcije čine svi uređeni parovi (x, y) na ili u unutrašnjosti kružnice sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 5.

Za svako (x, y) važi nejednakost: $x^2 + y^2 \leq 25$

Kodomen se sastoji od svih mogućih vrednosti za z .

Kodomen mora biti pozitivan broj jer je z jednako kvadratnom korenu, a ograničenje za (x, y) nam daje: $x^2 + y^2 \leq 25$,
tako da vrednost pod korenom može varirati samo između 0 i 25.

Dakle, kodomen je $0 \leq z \leq 5$.



Rešenje Primera 4 - nastavak:

Skiciraćemo funkciju:

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Kvadriranjem obe strane dobijamo: $z^2 = 25 - x^2 - y^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

Ovo je sfera poluprečnika 5 sa centrom u koordinatnom početku. Ovo nam može pomoći da skiciramo grafik funkcije, ali moramo biti oprezni!!!

Funkcija $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ i **jednačina** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

nisu iste. **Jednačina** ne predstavlja z kao funkciju od x i y – jer nemamo jednu vrednost za z za svako (x, y) . Imajući na umu da je kodomen **funkcije** $0 \leq z \leq 5$ možemo zaključiti da ova funkcija predstavlja gornju polusferu.



Za skiciranje površi u 3-dimenzije, posmatranje preseka sa ravnima koje su paralelne koordinatnim ravnima može biti korisno.

1. Presek sa xy -ravni, $z = 0$, daje jednačinu:

$$0 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad \text{ili} \quad x^2 + y^2 = 25$$

2. Presek sa yz -ravni, $x = 0$, daje jednačinu:

$$z = \sqrt{25 - y^2} \quad \text{tj.} \quad y^2 + z^2 = 25$$

3. Presek sa xz -ravni, $y = 0$, daje jednačinu :

$$z = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{tj.} \quad x^2 + z^2 = 25$$



Mogu se posmatrati i preseci sa ravnima koje su paralelne koordinatnim ravnima.

4. Neka je $z = 3$: $3 = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ tj. $x^2 + y^2 = 16$

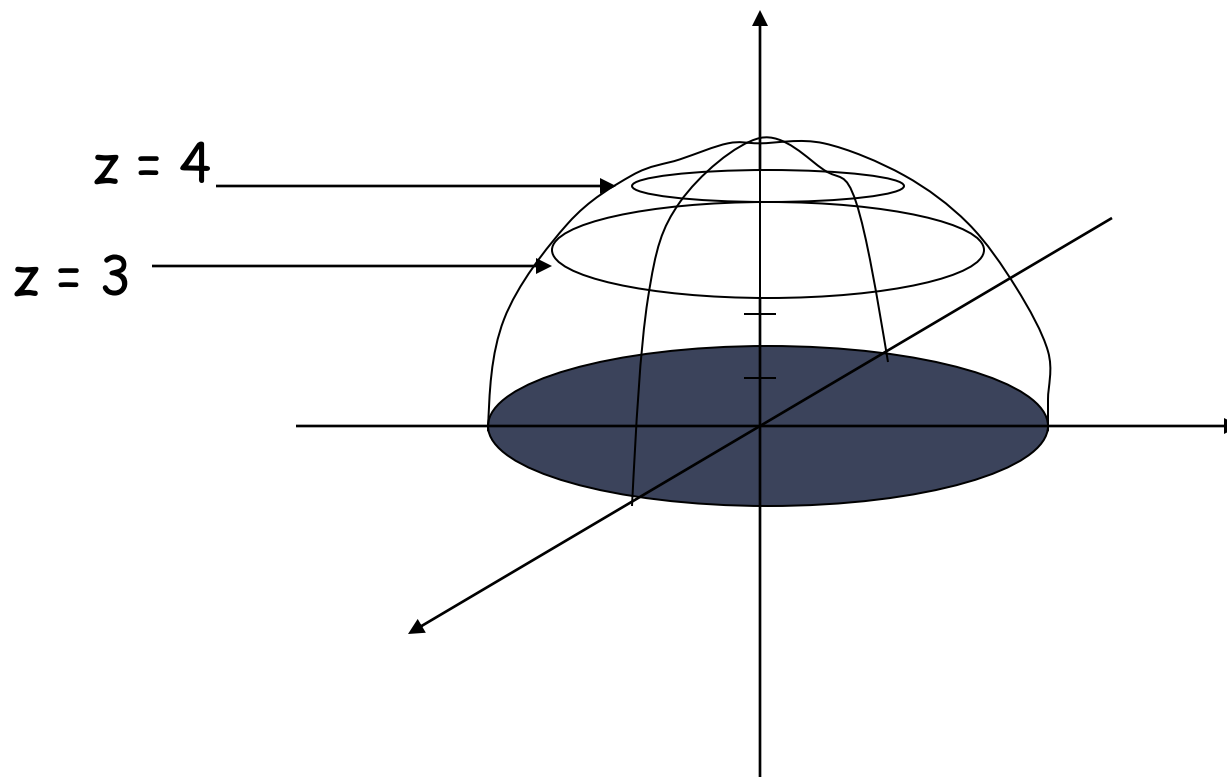
Tako da je presek površi i ravni $z = 3$ (koja je paralelna sa xy -ravni) kružnica sa centrom u $(0,0,3)$ poluprečnika 4.

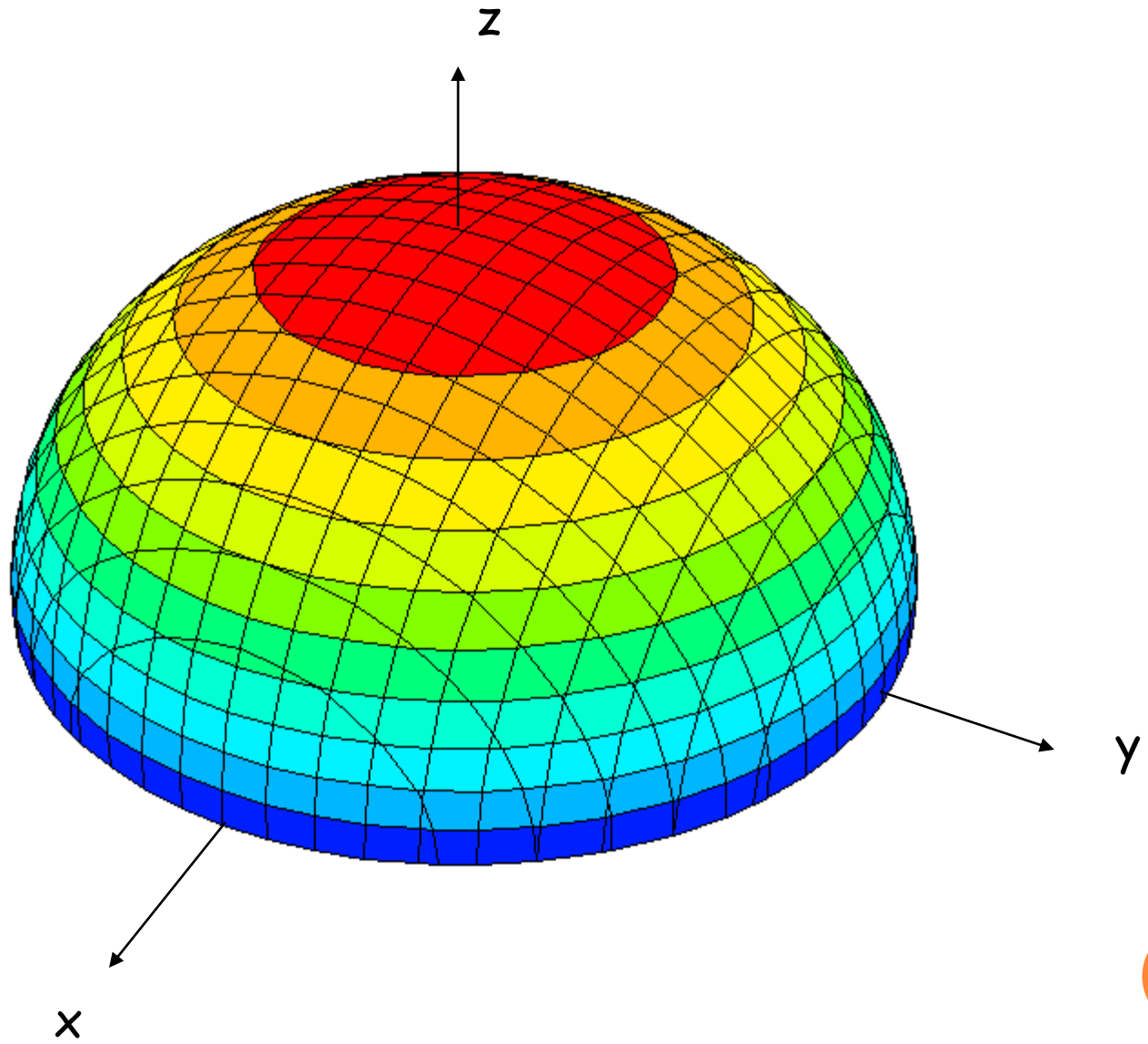
5. Neka je $z = 4$: $4 = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ tj. $x^2 + y^2 = 9$

Presek površi i ravni $z = 4$, (koja je paralelna sa xy -ravni) kružnica sa centrom u $(0,0,4)$ poluprečnika 3.



Na slici je **SKICA** sa tri preseka, dva sa ravnima koje su paralelna sa xy -ravni i jedan sa ravni koja je paralelna sa xz -ravni.





Primer 5: Skicirati površ $z = 9 - x^2 - y^2$

Rešenje: Domen je cela xy-ravan, a kodomen $z \leq 9$

1. Presek sa xy-ravni, $z = 0$, je dat jednačinom

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{kružnica}$$

2. Presek sa yz-ravni, $x = 0$, je dat jednačinom :

$$z = -y^2 + 9 \quad \text{parabola}$$

3. Presek sa xz-ravni, $y = 0$, je dat jednačinom :

$$z = -x^2 + 9 \quad \text{parabola}$$



Rešenje Primera 5 - nastavak:

Preseci sa ravnima koje su paralelne xy-ravni:

4. Presek sa ravni $z = 5$ je dat jednačinom:

$$5 = 9 - x^2 - y^2$$

tj.

$$x^2 + y^2 = 4$$

Kružnica sa centrom u $(0, 0, 5)$ poluprečnika 2.


5. . Presek sa ravni $z = -7$ je dat jednačinom:

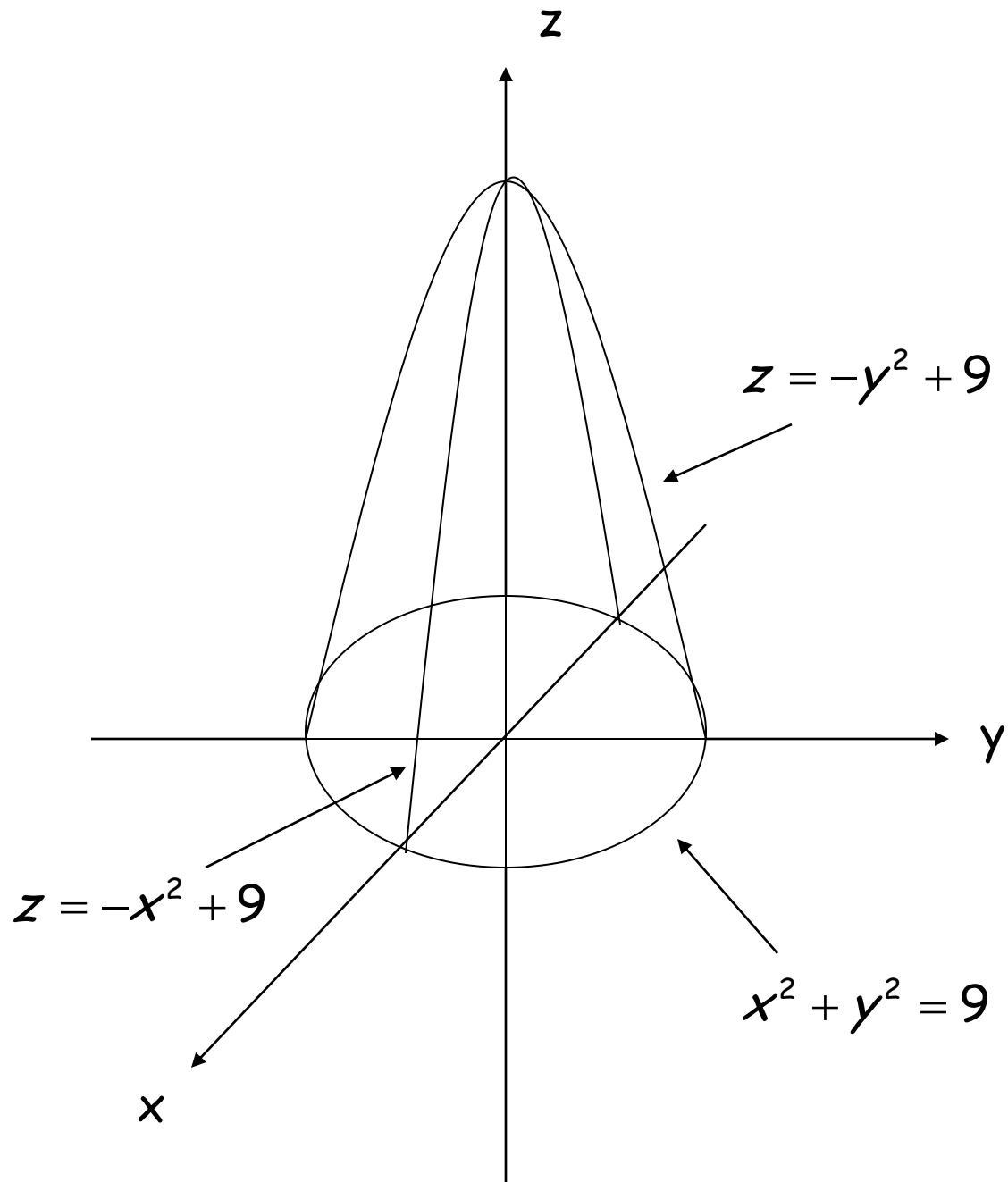
$$-7 = 9 - x^2 - y^2$$

tj.

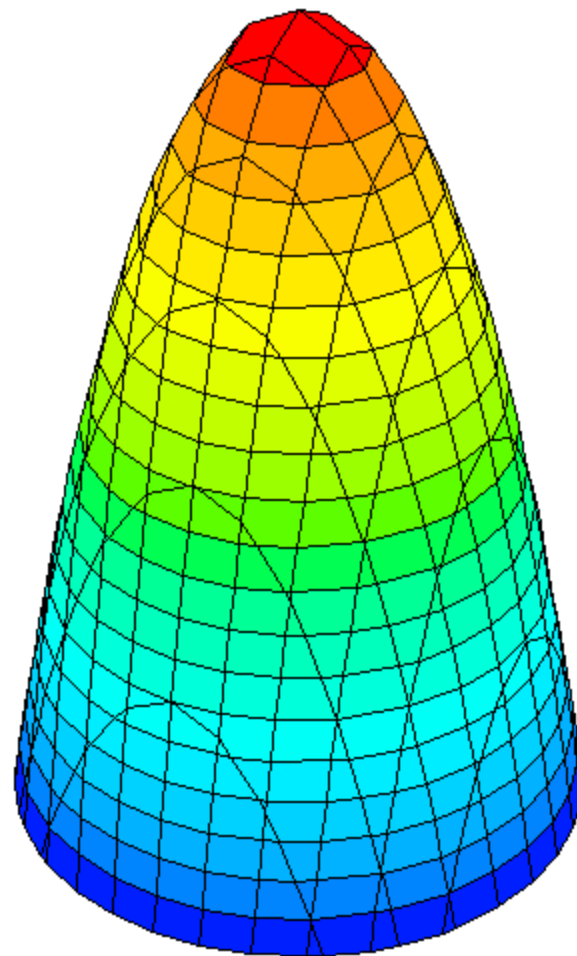
$$x^2 + y^2 = 16$$

Kružnica sa centrom u $(0, 0, -7)$ poluprečnika 4.





Grafik površi



Nivo linije

Preseci površi i ravni koje su paralelne xy -ravni, tj. preseci dobijeni kada je $z = C$ ($f(x,y) = C$) gde je C konstanta, nacrtani u xy -ravni, zovu se **nivo linije površi**.



Primer 6: Skicirati nivo linije za $c = 5, 4, 3, 2, 1, 0$ za funkciju iz Primera 4,
 $z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

Rešenje:

$$c = 5: 5 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$c = 4: 4 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 9 \rightarrow \text{Kružnica sa } r = 3$$

$$c = 3: 3 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 16 \rightarrow \text{Kružnica sa } r = 4$$

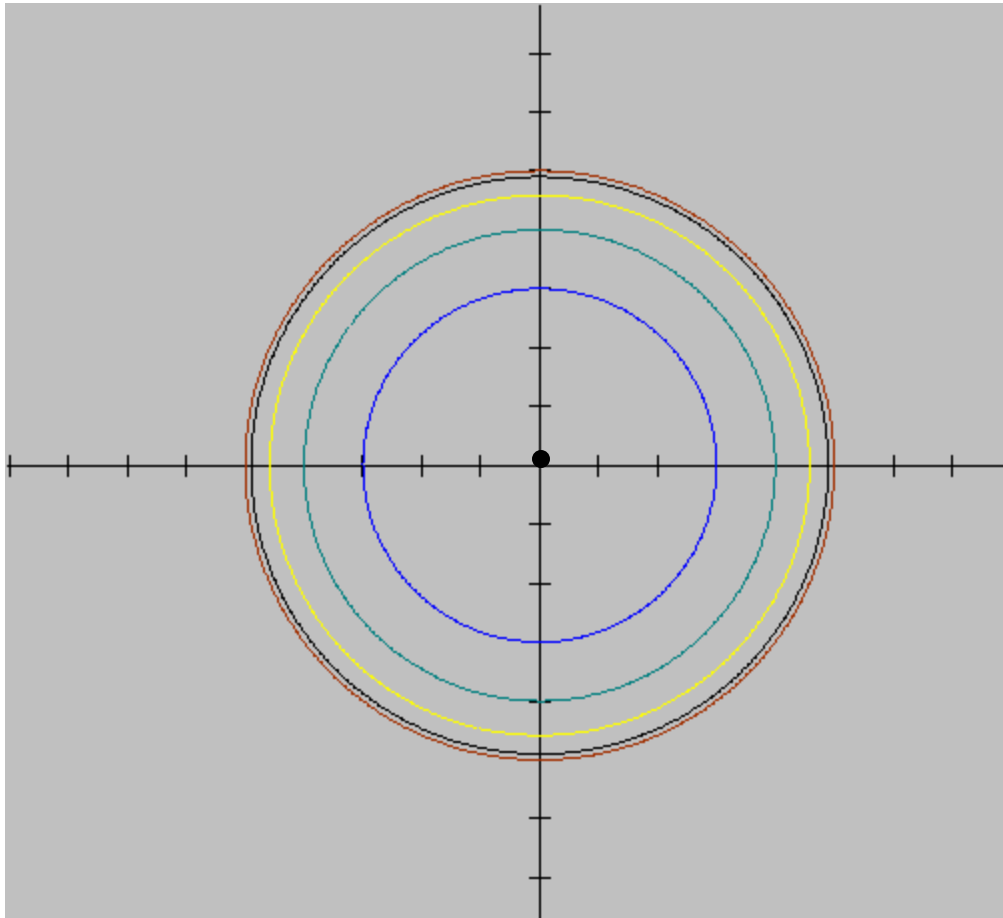
$$c = 2: 2 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 21 \rightarrow \text{Kružnica sa } r = \sqrt{21}$$

$$c = 1: 1 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 24 \rightarrow \text{Kružnica sa } r = \sqrt{24}$$

$$c = 0: 0 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 25 \rightarrow \text{Kružnica sa } r = 5$$



Nivo linije sa tačkom $(0, 0)$ za $c = 5$ i kružnicama dobijenim za razne vrednosti c .



Uočimo: Vrednosti od c su jednako raspoređene, ali nivo linije nisu.

Tamo gde su nivo linije blizu jedna druge, vrednosti funkcije se postepeno menjaju.

Tamo gde se nivo linije skupljaju (blizu $c = 5$), tamo imamo naglu promenu vrednosti funkcije.



Primer 7: Skicirati nivo linije za $c=0, 2, 4, 6, 8$ za funkciju $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$

Rešenje: Stavimo da je funkcija jednaka konstanti.

$$c = 0: 0 = x^2 + 2y^2 \rightarrow (0,0)$$

$$c = 2: 2 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa: } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$$

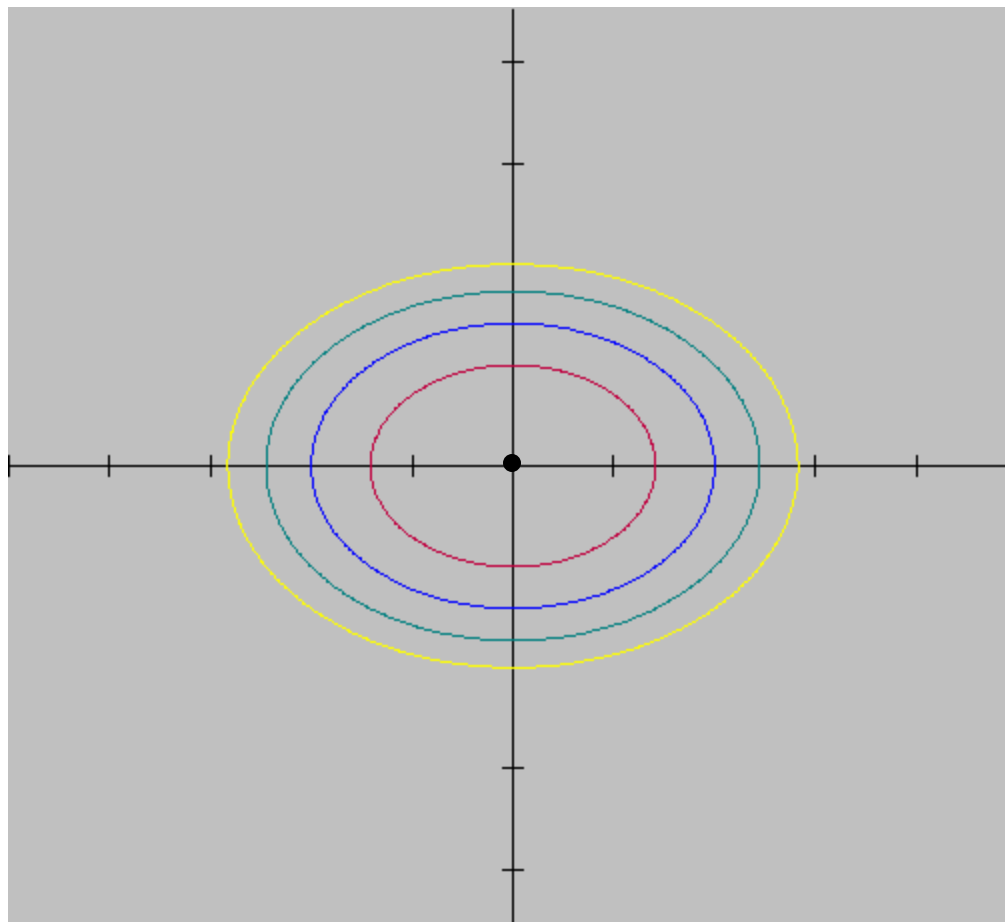
$$c = 4: 4 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$c = 6: 6 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa: } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$c = 8: 8 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

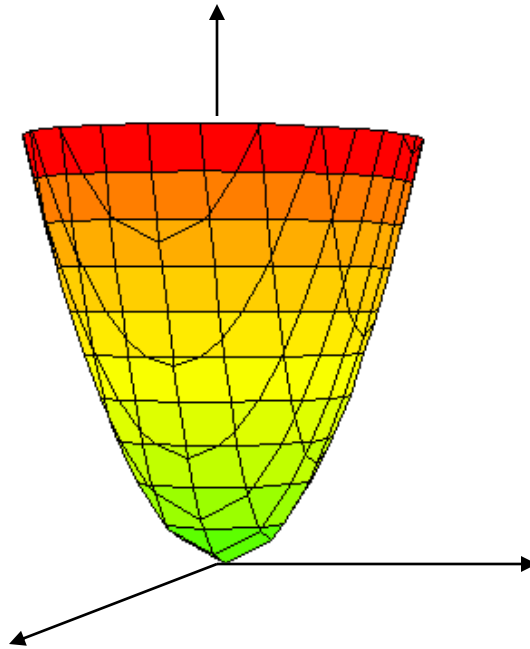


Nivo linije sa tačkom $(0, 0)$ za $c = 0$ i elipse koje se povećavaju za ostale vrednosti c .



Primer 7:

Ovo je grafik površi $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$.



Uočimo da je:

1. Skiciranje grafika funkcije dve promenljive u 3 dimenzije izazovan zadatak i zahteva veštinu i vežbu. Upotreba nivo linija može biti od velike koristi.
2. Ideja nivo linija se može uopštiti za funkcije tri promenljive. Ako je $w = g(x, y, z)$ funkcija tri promenljive i k konstanta, onda je $g(x, y, z) = k$ **nivo površ** funkcije g . Iako ćemo možda biti u mogućnosti da nacrtamo nivo površ, i dalje nećemo moći da nacrtamo funkciju g u 4 dimenzije.

