

4. Funkcije više promenljivih

4.1. Osnovni pojmovi. Parcijalni izvodi.

Navešćemo osnovne osobine funkcija dve realne promenljive. Ova svojstva se jednostavno uopštavaju za realne funkcije više realnih promenljivih.

Definicija 4.1. Broj A je granična vrednost funkcije $z = f(x, y)$ kada tačka $M(x, y)$ teži tački $M_0(x_0, y_0)$ na bilo koji način (duž neke proizvoljne putanje), ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da iz $d(M, M_0) < \delta$ sledi $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, što se još zapisuje

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

Funkcija $z = f(x, y)$ je neprekidna u tački $M_0(x_0, y_0)$ ako je $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, gde je (x_0, y_0)

tačka nagomilavanja definicionog skupa.

Ako je (x_0, y_0) izolovana tačka oblasti definisanosti funkcija je u njoj neprekidna.

Parcijalni izvod funkcije $z = f(x, y)$ po promenljivoj x je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

a po promenljivoj y je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Totalni diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Ako postoji parcijalni izvod $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (M)$ njega zovemo drugim parcijalnim izvodom ili parcijalnim izvodom drugog reda funkcije f u tački M , po promenljivima x_i, x_j (tim redom) kojeg označavamo sa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M)$ ili $f_{x_i x_j} (M)$. U slučaju kada je $i = j$ odgovarajući parcijalni izvod označavamo sa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (M)$. Ako je $i \neq j$, parcijalni izvod zovemo mešovitim.

U opštem slučaju, mešoviti parcijalni izvodi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (M)$, ako postoje, mogu imati različite vrednosti.

Teorema 4.2. *Ako postoje drugi mešoviti parcijalni izvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (M)$ u nekoj okolini tačke $M(x, y)$ i ako su oni neprekidni u datoj tački M , onda su oni i jednaki u ovoj tački, to jest važi jednakost $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (M)$.*

Totalni diferencijal drugog reda dobijamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dy \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z. \end{aligned}$$

Dalje, ispitivaćemo funkcije dve i tri promenljive, $z = f(x, y)$ i $u = f(x, y, z)$, a analogno se definišu parcijalni izvodi i za funkcije n promenljivih $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Za funkcije dve promenljive imamo četiri parcijalna izvoda drugog reda, dok za funkciju tri promenljive imamo devet.

Zadatak 4.3. Naći parcijalne izvode prvog i drugog reda, kao i totalni diferencijal prvog i drugog reda za sledeće funkcije:

$$\text{a) } f(x, y) = \ln x + y^2; \quad \text{b) } f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}; \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}}.$$

Rešenje.

$$\text{a) Iz } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \text{ sledi } df = \frac{1}{x} dx + 2y dy, \text{ a pošto je } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \text{ i } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \text{ imamo}$$

$$d^2 z = -\frac{1}{x^2} dx^2 + 2 dy^2.$$

b) Parcijalni izvodi prvog reda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Totalni diferencijal prvog reda: } df = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Parcijalni izvodi drugog reda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \cdot \left(-\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x \cdot \left(-\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Totalni diferencijal drugog reda:

$$d^2 f = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx^2 + 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy^2.$$

c) Parcijalni izvodi prvog reda:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{2x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} + \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^2} = e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{x^2 - y}{y^3},$$

totalni diferencijal prvog reda:

$$df = -\frac{2x}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} dx + \frac{x^2 - y}{y^3} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} dy.$$

Parcijalni izvodi drugog reda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{y^2} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{y}} + x e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-\frac{2x}{y}\right)\right) = \frac{2(2x^2 - y)}{y^3} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x \left(-\frac{2}{y^3} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} + \frac{1}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{2x}{y^4} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} (2y - x^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-y^3 - 3y^2(x^2 - y)}{y^6} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} + e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2 - y}{y^3} \\ &= e^{-\frac{x^2}{y}} \left(\frac{-y^2 - 3x^2 y + 3y^2 + x^4 - x^2 y}{y^5}\right) = e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \frac{x^4 - 4x^2 y + 2y^2}{y^5}. \end{aligned}$$

Totalni diferencijal drugog reda:

$$d^2 f = \frac{2(2x^2 - y)}{y^3} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} dx^2 + 2 \cdot \frac{2x e^{-\frac{x^2}{y}}}{y^4} \cdot (2y - x^2) dx dy + e^{-\frac{x^2}{y}} \frac{x^4 - 4x^2 y + 2y^2}{y^5} dy^2.$$

Zadatak 4.4. Dokazati da je za funkciju $z = \arctg \frac{x}{y}$ za $x = u + v$, $y = u - v$ zadovoljena jednačina

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

Rešenje. Iz uslova za x i y izražavamo parcijalne izvode po u i v

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 + \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot 1 \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 + \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot (-1) \\ &= \frac{y + x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Sabiranjem gornje dve jednakosti i koristeći da je

$$x^2 + y^2 = u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - 2uv + v^2 = 2(u^2 + v^2)$$

dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y - x}{x^2 + y^2} + \frac{x + y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2(u - v)}{2(u^2 + v^2)} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

Zadatak 4.5. Naći parcijalne izvode funkcije

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Rešenje. Za $(x, y) \neq (0, 0)$ imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

U slučaju $(x, y) = (0, 0)$ parcijalne izvode ispitujemo po definiciji

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(0 + \Delta x, 0) - z(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(0, 0 + \Delta y) - z(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y \cdot 0}{(\Delta y)^2 + 0} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Napomena: Funkcija z ima parcijalne izvode $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u tački $(0, 0)$, ali u toj tački ima prekid.

Zadatak 4.6. Pokazati da funkcija $z(x, y)$ definisana implicitno $x + y + z = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ zadovoljava jednačinu

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

Rešenje. Najpre određujemo parcijalni izvod po x implicitno zadate funkcije

$$x + y + z = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Množenjem poslednje jednakosti sa $x^2 + y^2 + z^2$ dobija se

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x},$$

pa sređivanjem dolazimo do prvog parcijalnog izvoda funkcije z po x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - (x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}.$$

Analogno se dobija prvi parcijalni izvod funkcije z po y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - (x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z}.$$

Konačno rešenje dobijamo sabiranjem izraza

$$\begin{aligned} (y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2xy - y(x^2 + y^2 + z^2) - 2xz + z(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z} \\ &+ \frac{2yz - z(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy + x(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(x - y) - 2z(x - y)}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 + y^2 + z^2 - 2z)}{x^2 + y^2 + z^2} = x - y. \end{aligned}$$

4.2. Ekstremne vrednosti funkcija više promenljivih

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u nekoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i tačka $M_0(x_0, y_0)$ je unutrašnja tačka iz te oblasti.

Potreban uslov za ekstrem:

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima ekstrem u tački $M_0(x_0, y_0)$, tada u toj tački parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ili su jednaki nuli ili ne postoje.

Tačke u kojima su parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jednaki nuli ili ne postoje nazivaju se *kritične tačke* funkcije $z = f(x, y)$. Tačke u kojima je $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ nazivaju se *stacionarne tačke*.

Dovoljan uslov za ekstrem :

Neka je tačka $M_0(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$, tj. neka je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Neka u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$, uključujući i tu tačku, funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda, i neka je $(dx, dy) \neq (0, 0)$. Tada:

1. ako je $d^2z(x_0, y_0) > 0$, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ima minimum,
2. ako je $d^2z(x_0, y_0) < 0$, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ ima maksimum,
3. ako $d^2z(x_0, y_0)$ menja znak, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ nema ekstrem.

Ovaj kriterijum važi za bilo koju funkciju n -promenljivih.

Za funkciju dve promenljive važi i sledeći dovoljan uslov za ispitivanje ekstremne vrednosti:

Funkcija $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$

1. ima maksimum ako je $rt - s^2 > 0$ i $r < 0$ (ili $t < 0$),

2. ima minimum ako je $rt - s^2 > 0$ i $r > 0$ (ili $t > 0$),
3. nema ekstrem ako je $rt - s^2 < 0$,
4. potrebna su dalja ispitivanja ako je $rt - s^2 = 0$,

gde je $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ i $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Zadatak 4.7. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = \ln(y - 2xy) + xy - x$.

Rešenje.

Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{y - 2xy} \cdot (-2y) + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2x - 1} + y - 1 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{y - 2xy} \cdot (1 - 2x) + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} + x = 0.\end{aligned}$$

Sistem je dalje ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{aligned}2 + 2xy - y - 2x + 1 &= 0, \\ x &= -\frac{1}{y},\end{aligned}$$

pa dolazimo do jednačine

$$2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot y - y - 2 \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -y + \frac{2}{y} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0.$$

Rešenja jednačine su $y_1 = -1$ i $y_2 = 2$, a stacionarne tačke su $A(1, -1)$ i $B\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Parcijalni izvodi drugog reda su

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{2x - 1} + y - 1 \right) = -\frac{4}{(2x - 1)^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} + x \right) = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{2x - 1} + y - 1 \right) = 1.\end{aligned}$$

<p>Tačka $A(1, -1)$ $r = -4$, $t = -1$, $s = 1$ $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$, $r < 0$ Funkcija $z(x, y)$ ima maksimum u tački A $z_{\min} = z(1, -1) = -2$</p>	<p>Tačka $B\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ $r = -1$, $t = -\frac{1}{4}$, $s = 1$ $rt - s^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$ Funkcija nema ekstrem u tački B.</p>
---	---

Zadatak 4.8. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 6y + 6z.$$

Rešenje. Najpre ćemo naći stacionarne tačke.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + 2y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y - 2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 4y + 2x + 2z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y + x + z + 3 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 4z + 2y + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z + y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-y - 3}{2}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve i treće jednačine u drugu dobija se

$$2y - y - 2 - \frac{y+3}{2} + 3 = 0 \Rightarrow y - \frac{y+3}{2} + 1 = 0 \Rightarrow y = 1,$$

te je stacionarna tačka je $A(-3, 1, -2)$.

Totalni diferencijal drugog reda funkcije $u = f(x, y, z)$ je

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Za parcijalne izvode drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 4, & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= 2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 4, \end{aligned}$$

pa je totalni diferencijal drugog reda u tački A

$$\begin{aligned} d^2u &= 2dx^2 + 4dy^2 + 4dz^2 + 4dxdy + 4dydz \\ &= 2(dx + dy)^2 + 2(dy + dz)^2 + 2dz^2 > 0 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija $u(x, y, z)$ ima minimum u tački A i to

$$u_{min} = u(-3, 1, -2) = -9.$$

4.3. Uslovni ekstremi

Neka je data funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definisana na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je data funkcija $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Neka je skup B dat sa $B = \{(x, y) \in D : \varphi(x, y) = 0\}$ i pretpostavimo da je $B \neq \emptyset$. Kažemo da je skup B određen uslovom ili vezom $\varphi(x, y) = 0$.

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ u tački $A(x, y) \in B$ ima uslovni (vezani) lokalni maksimum (odnosno uslovni (vezani) lokalni minimum) pri uslovu

$$\varphi(x, y) = 0,$$

ako postoji broj $\varepsilon > 0$, takav da za svako $X \in (B \setminus \{A\}) \cap L(A, \varepsilon)$ važi

$$f(X) < f(A) \quad (\text{odnosno } f(X) > f(A)),$$

tj. $(\exists \varepsilon > 0), (\forall X \in B \cap (L(A, \varepsilon) \setminus \{A\})), f(X) < f(A),$ (odnosno $f(X) > f(A)$).

Uslovni lokalni maksimum, odnosno uslovni lokalni minimum, jednim imenom zovemo *uslovni* ili *vezani ekstrem*. Jednačina $\varphi(x, y) = 0$ zove se *jednačina veze*.

Dakle, u nalaženju uslovnog ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ promenljive x i y se ne mogu više posmatrati kao nezavisne promenljive jer su one povezane relacijom $\varphi(x, y) = 0$.

Postupak nalaženja tačaka koje mogu biti uslovni ekstremi funkcije $z = f(x, y)$ pod uslovom da je $\varphi(x, y) = 0$ je predstavljen kroz sledeće korake.

1. Formiramo Lagranžovu funkciju

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

2. **Tražimo stacionarne tačke** tako što izjednačimo prve parcijalne izvode $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ funkcije $F(x, y, \lambda)$ sa nulom.
Dobijamo sistem od tri jednačine

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \varphi(x, y) = 0,\end{aligned}$$

pomoću kojih određujemo vrednosti λ i koordinate x i y potencijalnih tačaka ekstrema. Neka tačka $A(x_0, y_0)$ zadovoljava dati sistem za λ_0 .

3. **Diferenciramo uslov** $\varphi(x, y) = 0$, odakle dobijamo vezu dx i dy .

4. Totalni diferencijal drugog reda

Pitanje postojanja i prirode uslovnih ekstrema se rešava pomoću znaka drugog totalnog diferencijala Lagranžove funkcije

$$d^2 F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2,$$

za skup vrednosti x_0, y_0, λ_0 pod uslovom $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$, $(dx, dy) \neq (0, 0)$.

Funkcija $f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) ima

- uslovni maksimum ako je $d^2 F(x_0, y_0) < 0$,
- uslovni minimum ako je $d^2 F(x_0, y_0) > 0$.

Analogno tražimo i ekstreme funkcije $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pod uslovom da je

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, 1 \leq m < n.$$

Lagranžova funkcija u ovom slučaju ima sledeći oblik

$$\begin{aligned}F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Zadatak 4.9. Naći ekstreme funkcije $z(x, y) = y^2 - x^2 + 5$ pod uslovom $y + 2x - 15 = 0$.

Rešenje.

Lagranžova funkcija: $F(x, y, \lambda) = y^2 - x^2 + 5 + \lambda(y + 2x - 15)$

Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -2x + 2\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \lambda, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{\lambda}{2}, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= y + 2x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\lambda}{2} + 2\lambda - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 10.\end{aligned}$$

Prema tome, stacionarna tačka je $A(10, -5)$ za $\lambda = 10$.

Diferenciranje uslova: Diferenciranjem uslova $y + 2x = 15$ dobija se $2dx + dy = 0$, odnosno $dy = -2dx$.

Totalni diferencijal drugog reda:

Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$$

u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$d^2F(A) = -2 dx^2 + 2 dy^2 = -2 dx^2 + 8 dx^2 = 6 dx^2 > 0,$$

odakle sledi da funkcija $z(x, y)$ ima uslovni minimum u tački A i on iznosi $z_{min} = z(10, -5) = -70$.

Zadatak 4.10. Proveriti da li funkcija $u(x, y, z) = xy + yz$ u tački $A(1, 1, 1)$ ima uslovni ekstrem ako je $x^2 + y^2 = 2$ i $y + z = 2$.

Rešenje.

Lagranžova funkcija: $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)$

Stacionarne tačke:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda_1 x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = y + z - 2 = 0.$$

Date jednačine su zadovoljene za $x = y = z = 1$ ako je $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = -1$, pa $A(1, 1, 1)$ jeste stacionarna tačka.

Diferenciranje uslova: Diferenciranjem prvog uslova $y + z = 2$ dobija se $dy + dz = 0$, odnosno $dz = -dy$. Diferenciranjem drugog uslova $x^2 + y^2 = 2$ dobija se $2x dx + 2y dy = 0$, odnosno $dx + dy = 0$. Odavde je $dx = -dy$.

Totalni diferencijal drugog reda:

Drugi parcijalni izvodi u tački A su

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda_1 = -1, & \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, & \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda_1 = -1, & \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 1, \\ & \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \end{aligned}$$

Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz = -(dx - dy)^2 + 2dydz \\ &= -(-2dy)^2 - 2dy^2 = -4dy^2 - 2dy^2 = -6dy^2 < 0, \end{aligned}$$

odakle sledi da funkcija $u(x, y, z)$ ima uslovni maksimum u tački A i on iznosi 2.

Zadatak 4.11. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $z(x, y) = y^2 + x^2 - 12x + 16y$ u oblasti $x^2 + y^2 \leq 25$.

Rešenje.

Funkcija $z(x, y)$ je neprekidna na zatvorenoj oblasti $x^2 + y^2 \leq 25$, pa mora dostizati svoju najveću i najmanju vrednost.

- Unutar oblasti $x^2 + y^2 < 25$ tražimo običan ekstrem

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0 & \Rightarrow x = 6, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0 & \Rightarrow y = -8. \end{aligned}$$

Dakle imamo da, $6^2 + (-8)^2 = 100 > 25$ i zaključujemo da tačka $(6, -8)$ ne pripada oblasti.

- Za $x^2 + y^2 = 25$ tražimo uslovni ekstrem.

Lagranžova funkcija: $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$

Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x - 6 + \lambda x = 0 = \lambda \Rightarrow x = \frac{6}{1 + \lambda}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y + 8 + \lambda y = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{1 + \lambda}, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 25 = 0.\end{aligned}$$

Dalje, dobijene izraze za x i y uvrstimo u poslednju jednakost i dobijamo da je

$$\begin{aligned}\frac{36}{(1 + \lambda)^2} + \frac{64}{(1 + \lambda)^2} - 25 = 0 &\Rightarrow \frac{100}{(1 + \lambda)^2} = 25 \Rightarrow (1 + \lambda)^2 = 4 \\ &\Rightarrow 1 + \lambda = 2 \vee 1 + \lambda = -2 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = -3,\end{aligned}$$

pa sledi da su stacionarne tačke $A(3, -4)$ za $\lambda_1 = 1$ i $B(-3, 4)$ za $\lambda_2 = -3$. Tako dobijene stacionarne tačke uvrstavamo u funkciju $z(x, y)$ i dobijamo:

$$\begin{aligned}z(3, -4) &= 25 - 36 - 64 = -75 \Rightarrow \text{minimum (najmanja vrednost)}, \\ z(-3, 4) &= 25 + 36 + 64 = 125 \Rightarrow \text{maksimum (najveća vrednost)}.\end{aligned}$$

Zadatak 4.12. Neka su x, y i z stranice kvadra čija površina iznosi 24. Odrediti za koje x, y i z će zapremina kvadra biti maksimalna.

Rešenje.

Treba odrediti maksimalnu zapreminu kvadra čija površina omotača iznosi 24, tj. treba maksimizirati funkciju $V(x, y, z) = xyz$ pod uslovom $2xy + 2xz + 2yz = 24$, odnosno $xy + xz + yz - 12 = 0$. Takođe, s obzirom da su x, y i z stranice kvadra, mora da važi $x > 0, y > 0$ i $z > 0$.

Lagranžova funkcija: $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 12)$

Stacionarne tačke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= yz + \lambda y + \lambda z = 0 \Rightarrow yz + \lambda(y + z) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{yz}{y + z}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= xz + \lambda x + \lambda z = 0 \Rightarrow xz + \lambda(x + z) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xz}{x + z}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= xy + \lambda x + \lambda y = 0 \Rightarrow xy + \lambda(x + y) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xy}{x + y}, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= xy + xz + yz - 12 = 0.\end{aligned}$$

Izjednačavanjem desnih strana prve dve jednačine dobijamo

$$-\frac{yz}{y + z} = -\frac{xz}{x + z} \Rightarrow xy + yz = xy + xz \Rightarrow yz = xz \Rightarrow y = x.$$

Analogno, izjednačavanjem desnih strana prve i treće jednačine dobija se $x = z$, pa ako u četvrtu jednačinu uvrstimo $x = y = z$, sledi

$$xy + xz + yz = 12 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Prema tome, stacionarna tačka je $A(2, 2, 2)$ za $\lambda = -1$.

Diferenciranje uslova: Totalni diferencijal prvog reda uslova je $(y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0$, tj. u tački A imamo da je $4dx + 4dy + 4dz = 0$, pa je $dx = -dy - dz$.

Totalni diferencijal drugog reda: Za parcijalne izvode drugog reda dobijamo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z + \lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y + \lambda,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x + \lambda,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

pa važi $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(A) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(A) = 1$.

Uvrštavanjem parcijalnih izvoda drugog reda u totalni diferencijal drugog reda dobijamo

$$\begin{aligned} d^2 F(A) &= 2dxdy + 2dxdz + 2dydz \\ &= 2(-dy - dz)dy + 2(-dy - dz)dz + 2dydz \\ &= -2dy^2 - 2dydz - 2dydz - 2dz^2 + 2dydz \\ &= -dy^2 - dz^2 - (dy^2 + 2dydz + dz^2)^2 \\ &= -dy^2 - dz^2 - (dy + dz)^2 < 0, \end{aligned}$$

pa u tački $A(2, 2, 2)$ funkcija dostiže maksimum. Dakle, kvadar čija je površina 24 ima maksimalnu zapreminu ukoliko su njegove stranice $x = y = z = 2$ i ona iznosi $V = 8$.

4.4. Zadaci za samostalan rad

1. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.
2. Naći ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y, z) = e^{z^2 + (x-y)^2 + (x-1)^2}$.
3. Od svih pravougljih paralelopipeda zapremine $V = 27$ naći onaj koji ima najmanju prostornu dijagonalu.
4. Pokazati da su tačke $A(2, 2, 2)$ i $B(-2, -2, -2)$ tačke ekstrema funkcije $f(x, y, z) = xyz$ pod uslovom $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.