# 8. TEHNIKE INTEGRIRANJA



U ovom poglavlju najprije sustavno i na jednom mjestu, okupljamo sve tehnike integriranja s kojima smo se do sada upoznali. Zatim uvodimo dvije nove i ujedno najvažnije tehnike: integriranje supstitucijom i parcijalnu integraciju. Na kraju rješavamo problem integriranja nekih posebnih klasa funkcija.

Mnogi integrali, koji su izračunati u ovom odjeljku, svrstani su u tablicu integrala na ovicima knjige i njima ćemo se slobodno koristiti pri daljnjem integriranju.

## 8.1 NAJJEDNOSTAVNIJI INTEGRALI

Neodređeni integral realne funkcije $f(x)$ je njegova antiderivacija $F(x)+C$. Dakle,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C\,,\ \text{ ako je } F'(x)=f(x),$$

gdje je $C$ konstanta (usp. 4.4). Određeni se integral, prema osnovnom teoremu infinitezimalnog računa, nalazi izračunavanjem vrijednosti neodređenog integrala u granicama integracije i njihovim oduzimanjem (usp. 4.3):

**OSNOVNI TEOREM**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\Bigg|_a^b$$

Najjednostavnije neodređene integrale izračunali smo u prethodnim poglavljima:

**INTEGRAL POTENCIJE**

$$\int x^{n}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, & n\neq -1\\[2ex] \ln|x|+C, & n=-1\end{cases}$$

## PRIMJER 1.

Izračunajmo:

(a) $\int x^5 \mathrm{d}x$, (b) $\int x^{-3}\mathrm{d}x$, (c) $\int x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$, (d) $\int x^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x$, (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

## Rješenje:

(a) $\int x^5\mathrm{d}x=\frac{x^6}{6}+C$,

(b) $\int x^{-3}\mathrm{d}x=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$,

(c) $\int x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=3\sqrt[3]{x}+C$,

(d) $\int x^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$,

(e) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int x^{-1}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

**INTERGALI NEKIH TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA**

$$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C, \qquad \int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\, x+C, \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\, x+C.$$

**INTERGALI NEKIH ALGEBARSKIH FUNKCIJA**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\, x+C, \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C, x\neq 1,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,\ -1<x<1,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C=\mathrm{arsh}\, x+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C=\mathrm{arch}\, x+C.$$

**INTERGALI EKSPONENCIJALNIH FUNKCIJA**

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C.$$

Složenije neodređene integrale računamo primjenjujući osnovna pravila integriranja (usp. 2.5).

**OSNOVNA PRAVILA INTEGRIRANJA**

1. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$,
2. $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$.

## PRIMJER 2.

Izračunajmo:

(a) $\int \left( 5x^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{x} \right) dx$, (b) $\int \left( 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$, (c) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + x - 3}{x} dx$.

## Rješenje:

Primjenom osnovnih pravila i formule za integral potencije nalazimo:

(a) $$\int \left( 5x^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{x} \right) dx = 5\int 5x^{\frac{3}{4}} dx + 7\int \frac{dx}{x} = 5 \cdot \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + 7\ln|x| + C = \frac{20}{7} x^{\frac{7}{4}} + 7\ln|x| + C.$$

(b) $$\int \left( 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left( 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

(c) $$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x - 3}{x} dx = \int \left( x^3 - 2x^2 + 1 - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + x - 3\ln|x| + C.$$

## PRIMJER 3.

Izračunajmo:

(a) $\int (5\sin x - 3\cos x) dx$, (b) $\int \left( \frac{3}{\cos^2 x} + \cos x \right) dx$, (c) $\int \frac{5\sin^3 x + 4}{\sin^2 x} dx$.

## Rješenje:

(a) $$\int (5\sin x - 3\cos x) dx = 5\int \sin x dx - 3\int \cos x dx = -5\cos x - 3\sin x + C.$$

(b) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}+\cos x\right)\mathrm{d}x = 3\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+\int\cos x\mathrm{d}x = 3\operatorname{tg} x+\sin x + C$ .

(c) $\displaystyle\int\frac{5\sin^3 x+4}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = 5\int\sin x\mathrm{d}x + 4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -5\cos x - 4\operatorname{ctg} x + C$ .

## PRIMJER 4.

Izračunajmo:

(a) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$ , (b) $\displaystyle\int\frac{5\mathrm{d}x}{7\sqrt{1+x^2}}$,za$|x|<1$ .

## Rješenje:

(a) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctg} x - \arcsin x + C$ .

(b) $\displaystyle\int\frac{5\mathrm{d}x}{7\sqrt{1+x^2}} = \frac{5}{7}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{5}{7}\operatorname{arsh} x + C$ .

## PRIMJER 5.

Izračunajmo:

(a) $\displaystyle\int 3^x\mathrm{d}x$ , (b) $\displaystyle\int 3^{2x}\mathrm{d}x$ , (c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

(a) $\displaystyle\int 3^x\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}+C$ , (b) $\displaystyle\int 3^{2x}\mathrm{d}x = \int\left(3^2\right)^x\mathrm{d}x = \int 9^x\mathrm{d}x = \frac{9^x}{\ln 9}+C$ ,

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \int\left(\mathrm{e}^3\right)^x\mathrm{d}x = \frac{\left(\mathrm{e}^3\right)^x}{\ln \mathrm{e}^3}+C = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+C$ .

## PRIMJER 6.

Izračunajmo:

(a) $\displaystyle\int_0^1 2\sqrt{x}\mathrm{d}x$ , (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 3\sin x\mathrm{d}x$ , (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ , (d) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ , (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 2^x\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Iz osnovnog teorema slijedi:

(a) $\int\limits_0^1 2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int 2x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\Big|_0^1 = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$.

(b) $\int\limits_0^{\pi/2} 3\sin x\mathrm{d}x = \left(\int 3\sin x\mathrm{d}x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \left(-3\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2} = -3\cos\frac{\pi}{2} + 3\cos 0 = 0 + 3 = 3$.

(c) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2} = \arcsin x\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

(d) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\Bigg|_0^1 = \mathrm{arctg}x\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

(e) $\int\limits_{-1}^1 2^x\mathrm{d}x = \left(\int 2^x\mathrm{d}x\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_{-1}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} = \frac{3}{2\ln 2} \approx 2.16$.

## PRIMJER 7.

Izračunajmo:

(a) $\int\limits_0^\pi (3x^2 + 2\sin x - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$, (b) $\int\limits_0^1 (3\mathrm{e}^x + 2\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) $\int\limits_0^\pi (3x^2 + 2\sin x - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = (x^3 - 2\cos x - \mathrm{e}^x)\Big|_0^\pi = (\pi^3 - 2\cos\pi - \mathrm{e}^\pi) - (0^3 - 2\cos 0 - \mathrm{e}^0) =$

$= \pi^3 + 2 - \mathrm{e}^\pi + 2 + 1 = \pi^3 - \mathrm{e}^\pi + 5$.

(b) $\int\limits_0^1 (3\mathrm{e}^x + 2\sqrt{x})\mathrm{d}x = \left(3\mathrm{e}^x + \frac{4}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_0^1 = \left(3\mathrm{e}^1 + \frac{4}{3}\right) - \left(3\mathrm{e}^0 + 0\right) = 3\mathrm{e} + \frac{4}{3} - 3 = 3\mathrm{e} - \frac{5}{3}$.

## PRIMJER 8.

Izračunajmo:

(a) $(x\ln x)'$, (b) $\int \ln x\mathrm{d}x$, (c) $\int_2^3 \ln x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Primjenom pravila za derivaciju produkta nalazimo:

(a) $(x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

(b) Iz (a) slijedi:

$$\int (\ln x+1)\mathrm{d}x = x\ln x + C,\quad \int \ln x\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = x\ln x + C,\quad \int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

(c) Iz (b) slijedi:

$$\int_2^3 \ln x\mathrm{d}x = (x\ln x - x)\Big|_2^3 = (3\ln 3 - 3) - (2\ln 2 - 2) = \ln 3^3 - \ln 2^2 - 1 = \ln\frac{9}{4} - 1.$$

| INTEGRAL LOGARITAMSKE FUNKCIJE |
|---|
| $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$. |

## PRIMJER 9.

Izračunajmo $\int \log_b x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Zbog $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ (usp. 6.1.) imamo:

$$\int \log_b x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln b}\int \ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln b}(x\ln x - x) + C$$

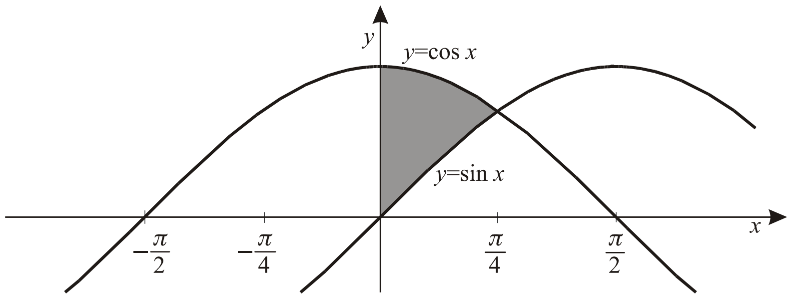
## PRIMJER 10.

Izračunajmo površinu područja koje se nad intervalom $[0,\pi/4]$ proteže između $y=\sin x$ i $y=\cos x$.

## Rješenje:

Površina područja na sl.1. određena je integralom

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\mathrm{d}x = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} = \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0) = \sqrt{2} - 1.$$




Slika 1.

## 8.2 INTEGRIRANJE SUPSTITUCIJOM

Integriranje supstitucijom je inverzni, integralni oblik lančanog deriviranja. Naime, ako su $F$ i $g$ derivabilne funkcije, onda nam lančano pravilo kaže (usp. 2.1) da je

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) .$$

To znači da je $F(g(x))$ neodređeni integral funkcije $F'(g(x))g'(x)$, tj.

$$\int F'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x)) + C .$$

Ako uvedemo međuvrijednost $u = g(x)$, onda to možemo zapisati u obliku:

$$F'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = F(u) + C .$$

Ako još i derivaciju $F'(u)$ označimo sa $f(u)$, što znači da je $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$, onda konačno dolazimo do formule supstitucije

$$\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

Da bismo formulu primijenili, u zadanoj podintegralnoj funkciji trebamo uočiti izraz $u = g(x)$, čija se derivacija također pojavljuje u podintegralnoj funkciji.

**INTEGRIRANJE SUPSTITUCIJOM**

Funkciju od $x$, koja sadrži podfunkciju $u = u(x)$ i njezinu derivaciju $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, integriramo tako da je napišemo u obliku $f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, te potom primijenimo formulu supstitucije

$$\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u .$$

Kada izračunamo $\int f(u)\mathrm{d}u$, za $u$ supstituiramo $u(x)$.

## PRIMJER 1.

Izračunajmo $\int 2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Uočimo podfunkciju $u = x^2 - 1$ (budući da se i njezina derivacija $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$ pojavljuje pod znakom integrala) te zadani integral napišimo u obliku

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Primjenom formule supstitucije nalazimo:

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int u^{1/2}\mathrm{d}u = \frac{3}{2}u^{3/2} + C\,.$$

Uvrštavanjem $u = \sqrt{x^2-1}$ dolazimo do konačnog rezultata-

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}(x^2-1)^{3/2} + C\,.$$

## PRIMJER 2.

Izračunajmo $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Iz $u = \sin x$ i $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x$, slijedi:

$$\int \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int u^2\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

## PRIMJER 3.

Izračunajmo $\int \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Ako supstituiramo $u = \cos x$ dobit ćemo $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin\ x$, pa zato zadani integral napišimo u obliku $-\int \cos^2 x(-\sin x)\mathrm{d}x$. Tada je

$$-\int \cos^2 x(-\sin x)\mathrm{d}x = -\int u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\int u^2\mathrm{d}u = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{x} + C.$$

## PRIMJER 4.

Izračunajmo $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Iz $u = 1+\mathrm{e}^x$ i $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$ slijedi

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|1+\mathrm{e}^x\right| + C .$$

## PRIMJER 5.

Izračunajmo $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Supstitucija $u = 1+\mathrm{e}^{2x}$ sada nije pogodna, jer je $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^{2x} \neq \mathrm{e}^x$. Uočimo li da je $1+\mathrm{e}^{2x} = 1+(\mathrm{e}^x)^2$, nameće se supstitucija $u = \mathrm{e}^x$ koja uz $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$ daje

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \mathrm{arctg}\, u + C = \mathrm{arctg}\, e^x + C .$$

## PRIMJER 6.

Izračunajmo

(a) $\int \frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$, (b) $\int x^2\cos(x^3)\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

(a) Ako supstituiramo $u = x^4+1$ dobit ćemo $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x^3$, pa zato zadani integral napišimo u obliku $\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$ . Tada je

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right| + C .$$

(b) Iz $u = x^3$ i $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ slijedi:

$$\int x^2\cos(x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2\cos(x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x =$$

$$=\frac{1}{3}\int \cos u \mathrm{d}u=\frac{1}{3}\sin u+C=\frac{1}{3}\sin(x^3)+C .$$

## PRIMJER 7.

Izračunajmo

(a) $\int f(x+b)\mathrm{d}x$, (b) $\int f(ax)\mathrm{d}x$, (c) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x$, ako je $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)$.

## Rješenje:

(a) Iz $u=x+b$ i $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1$ slijedi

$$\int f(x+b)\mathrm{d}x=\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F(x+b)+C .$$

(b) Iz $u=ax$ i $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a$ slijedi

$$\int f(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax)a\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax)+C .$$

(c) Iz $u=ax+b$ i $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a$ slijedi

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)a\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C .$$

Rezultate prethodnog primjera kao jednostavne i česte slučajeve integriranja supstitucijom posebno ističemo.

Ako je $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ onda je

(1) $\int f(x+b)\mathrm{d}x=F(x+b)+C$,

(2) $\int f(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax)+C$,

ili sasvim općenito

(3) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

## PRIMJER 8.

Izračunajmo

(a) $\int \cos 8x \mathrm{d}x$, (b) $\int \mathrm{e}^{x+5}\mathrm{d}x$, (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$, (d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+5}$, (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x+1)}$.

## Rješenje:

(a) $\int \cos 8x \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\sin 8x + C$, (b) $\int \mathrm{e}^{x+5}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+5} + C$, (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2| + C$,

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$, (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x+1)} = \frac{1}{3}\mathrm{tg}(3x+1) + C$.

Primjenom uokvirenih formula lako ćemo izračunati i općenitije integrale nekih algebarskih funkcija, nego što su oni najjednostavniji iz 1, odjeljka:

## PRIMJER 9.

Izračunajmo

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$, (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$, (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, (d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

## Rješenje:

(a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(x/a)^2} = \frac{a}{a^2}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

(b) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-(x/a)^2} = \frac{a}{a^2}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ (a>0),$$

(c) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{a}{a}\arcsin\frac{x}{a} + C = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ (a>0),$$

(d) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+(x/a)^2}} = \mathrm{arsh}\frac{x}{a} + C = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right| + C_1 = \ln\frac{1}{a}\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1 =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \ln\frac{1}{a} + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C,\ (a>0)$$

(e) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x/a)^2-1}} = \mathrm{arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ (a>0).$$

**INTEGRALI NEKIH ALGEBARSKIH FUNKCIJA**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} == \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C\,.$$

U svim integralima $a > 0$.

## PRIMJER 10.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - x^2}}$, (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4} + x^2}$.

## Rješenje:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$, (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4} + x^2} = \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4}{3}} x + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}} + C$.

## PRIMJER 11.

Izračunajmo $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$.

## Rješenje:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} \right| + \overline{C} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \left| 2x + \sqrt{4x^2 - 1} \right| + \overline{C} = \frac{1}{2} \ln\left| 2x + \sqrt{4x^2 - 1} \right| + C\,,$$

gdje je $C = -\frac{1}{2} \ln 2 + \overline{C}$.

Integral koji sadrži kvadratni izraz $ax^2 + bx + c$ može se izlučivanjem konstante $a$ svesti na integral koji sadrži $x^2 + px + q$ $(p = b/a,\ q = c/a)$. Iz tog se kvadratnog izraza, odgovarajućom supstitucijom može eliminirati linearni član:

$$x^2 + px + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left( q - \frac{p^2}{4} \right) = \left\{ \begin{array}{c} x + \frac{p}{2} = y \\ q - \frac{p^2}{4} = \pm k^2 \end{array} \right\} = y^2 \pm k^2\,.$$

**SVOĐENJE NA PUNI KVADRAT**

Ako integral sadrži izraz $x^2+px+q$, onda se taj izraz može napisati u obliku $y^2 \pm k^2$, uz $y = x + \frac{p}{2}$ i $k^2 = \left| q - \frac{p^2}{4} \right|$, što olakšava izračunavanje integrala.

## PRIMJER 12.

Izračunajmo

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$, (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10+4x-x^2}}$.

## Rješenje:

(a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{4}\right)} = \left\{ \begin{array}{c} y = x + \frac{1}{2} \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C .$$

(b) Svedimo najprije $10+4x-x^2$ na puni kvadrat:

$$-(x^2-4x-10) = -\left[(x-2)^2 - 10 - 4\right] = -(x-2)^2 + 14 .$$

Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10+4x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{14-(x-2)^2}} = \left\{ \begin{array}{c} y = x - 2 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{14-y^2}} =$$

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{14}} + C = \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{14}} + C .$$

Često nije lako odrediti pravu supstituciju, čija će se derivacija također pojaviti u zadanom integralu $\int h(x)\mathrm{d}x$. Tada trebamo pokušati s nekom supstitucijom $u = g(x)$, koja nam se čini pogodnom. Iz $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x)$ formalno slijedi da je $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$, pa uvrštavanjem u $\int h(x)\mathrm{d}x$ dobijamo

$$\int h(x)\mathrm{d}x = \int \frac{h(x)}{g'(x)} \mathrm{d}u .$$

Ako $\frac{h(x)}{g'(x)}$ uspijemo izraziti pomoću $u$ $\frac{h(x)}{g'(x)} = f(u)$, supstitucija je uspješna i dalje računamo $\int f(u)\mathrm{d}u$.

Zainteresiranom čitatelju pokazujemo da je naš formalni račun s diferencijalima korektan. Naime, iz $h(x)/g'(x)$ slijedi $h(x) = f(u)g'(x) = f(g(x))g'(x)$, pa formula ( $\int h(x)\mathrm{d}x = \int \frac{h(x)}{g'(x)}\mathrm{d}u$ ) zapravo nije drugo do korektna formula supstitucije $\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$ .)

**INTEGRIRANJE SUPSTITUCIJOM**
**(RAČUNANJE S DIFERENCIJALIMA)**

Integral $\int h(x)\mathrm{d}x$ rješavamo supstitucijom na slijedeći način:

(1) Odaberemo novu varijablu $u = g(x)$.

(2) Deriviramo $u$ $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x)\right)$, riješimo po d$x$ $\left(\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}\right)$ i uvrstimo u zadani integral:

$$\int h(x)\mathrm{d}x = \int \frac{h(x)}{g'(x)}\mathrm{d}u .$$

(3) Novu podintegralnu funkciju $\frac{h(x)}{g'(x)}$ pokušamo izraziti pomoću $u$, $\left(\frac{h(x)}{g'(x)} = f(u)\right)$, i potom izračunamo $\int f(u)\mathrm{d}u$ .

(Ako $\frac{h(x)}{g'(x)}$ ne uspijemo izraziti pomoću $u$, pokušamo s nekom drugom supstitucijom.)

(4) Dobiveni rezultat izrazimo pomoću $x$, uvrštavajući $u = g(x)$.

## PRIMJER 13.

Izračunajmo $\int \frac{x^3+3}{(x^4+12x)^2}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

(1) Pokušajmo supstitucijom $u = x^4+12x$, jer će tada nazivnik postati monom.

(2) Iz $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x^3+12$ slijedi $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{4x^3+12}$, pa uvrštavanjem u integral dobivamo

$$\int \frac{x^3+3}{(x^4+12x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+3}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{4x^3+12} .$$

(3) Iz dobivenog integrala lako eliminiramo $x$ tj. integral izražavamo samo pomoću $u$:

$$\int \frac{x^3+3}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{4(x^3+3)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{4u^2} = \frac{1}{4}\int u^{-2}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{4u} + C\,.$$

(4) Uvrštavanjem $u = x^4 + 12x$ dolazimo do konačnog rezultata:

$$\int \frac{x^3+3}{(x^4+12x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^4+12x} + C\,.$$

## PRIMJER 14.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) Iz $u = x^2+2x+2$ slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x+2$, pa je $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2x+2}$. Dakle,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{\sqrt{u}}\frac{\mathrm{d}u}{2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+2x+2} + C\,.$$

(b) Iz $u = \dfrac{1}{x}$ slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{x^2}$, pa je $\mathrm{d}x = -x^2\mathrm{d}u$. Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{e}^u}{x^2}(-x^2\mathrm{d}u) = -\int \mathrm{e}^u du = -\mathrm{e}^u + C = -\mathrm{e}^{1/x} + C$$

## PRIMJER 15.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x + 2}}{x}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

## Rješenje:

(a) Iz $u = \ln x + 2$ slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$, pa je $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}u$. Dakle,

$$\int \frac{\sqrt{\ln x+2}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{u}}{x}x\mathrm{d}u = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x + 2)^{3/2} + C\,.$$

(b) Iz $u = 1 + \sin\varphi$ slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\varphi$, pa je $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos\varphi}$. Dakle,

$$\int \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi = \int \frac{\cos\varphi}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\cos\varphi} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|1+\sin\varphi| + C\,.$$

## PRIMJER 16.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln t)}{t}\mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2y}}{1+\mathrm{e}^{2y}}\mathrm{d}y$.

## Rješenje:

(a) Iz $u = \ln t$ slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{t}$, pa je $\mathrm{d}t = t\mathrm{d}u$. Dakle,

$$\int \frac{\sin(\ln t)}{t}\mathrm{d}t = \int \frac{\sin u}{t}t\mathrm{d}u = \int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C = -\cos(\ln t) + C.$$

(b) Iz $u = 1+\mathrm{e}^{2y}$ slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2\mathrm{e}^{2y}$, pa je $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\mathrm{e}^{2y}}$. Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2y}}{1+\mathrm{e}^{2y}}\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{e}^{2y}}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2\mathrm{e}^{2y}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+\mathrm{e}^{2y}\right| + C\,.$$

## PRIMJER 17.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x^x)}$, (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3+1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) Pokušamo li sa supstitucijom $u = x^x$, vidjet ćemo da ona nije uspješna (pokušajte). No uočimo li da je $\ln x^x = x\ln x$, vidimo da je naš integral zapravo $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$. Iz $u = \ln x$ tada slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$, pa je $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}u$ i

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int \frac{x\mathrm{d}u}{xu} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C\,.$$

(b) Iz $u = 3 + \dfrac{1}{x}$ slijedi $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{x^2}$, pa je $\mathrm{d}x = -x^2\mathrm{d}u$. Dakle,

$$\int \frac{\sqrt[3]{3+1/x}}{\mathrm{x}^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt[3]{u}}{x^2}(-x^2\mathrm{d}u) = -\int \sqrt[3]{u}\mathrm{d}u = -\int u^{1/3}\mathrm{d}u = -\frac{3}{4}u^{4/3} + C = -\frac{3}{4}\left(3+\frac{1}{x}\right)^{4/3} + C\,.$$

## PRIMJER 18.

Izračunajmo

(a) $\int \cos^3 \varphi \, \mathrm{d}\varphi$, (b) $\int \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) Integral možemo napisati u obliku

$$\int \cos^3\varphi \mathrm{d}\varphi = \int \cos^2\varphi \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \int (1 - \sin^2\varphi)\cos\varphi \mathrm{d}\varphi .$$

Uz supstituciju $u = \sin\varphi$, iz koje slijedi $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\varphi$ tj. $\mathrm{d}u = \cos\varphi \mathrm{d}\varphi$, imamo dalje:

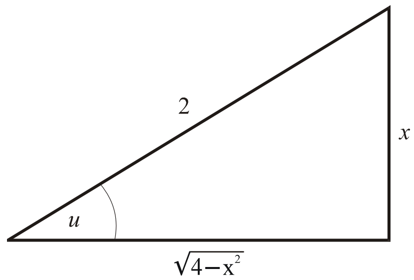
$$\int (1 - \sin^2\varphi)\cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \int (1 - u^2)\mathrm{d}u = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} + C .$$

(b) Uz supstituciju $x = 2\sin u$ (tj. $u = \arcsin\frac{x}{2}$), iz koje slijedi $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2\cos u$, tj. $\mathrm{d}x = 2\cos u \mathrm{d}u$, imamo:

$$\int \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{4 - 4\sin^2 u}\, 2\cos u \mathrm{d}u = 4\int \sqrt{1 - \sin^2 u}\cos u \mathrm{d}u = 4\int \cos^2 u \mathrm{d}u =$$

$$= 4\int \frac{1 + \sin 2u}{2}\mathrm{d}u = 2\int (1 + \cos 2u)\mathrm{d}u = 2u + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2u + C = 2u + 2\sin u\cos u + C .$$

Iz $x = 2\sin u$ , tj. $\sin u = \frac{x}{2}$, slijedi $u = \arcsin\frac{x}{2}$ i $\cos u = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ (v.sl.1.).




Slika 1.

Dakle,

$$\int \sqrt{4 - x^2}\mathrm{d}x = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + C .$$

Ako računamo određeni integral neke funkcije onda, prema osnovnom teoremu, najprije izračunamo njezin neodređeni integral, a zatim u njega uvrstimo granice integracije te dobijene vrijednosti oduzmemo. Evo jednog primjera, u kojem neodređeni integral nalazimo supstitucijom.

## PRIMJER 19.

Izračunajmo $\int_1^4 \frac{x}{1 + x^4}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Najprije računamo neodređeni integral. Iz $u=x^2$ slijedi $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$, pa je

$$\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C\,.$$

Prema osnovnom teoremu, sada je

$$\int_1^4 \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2\Big|_1^4=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}16-\operatorname{arctg}1)\approx 0.361\,.$$

Uočimo da se granice moraju uvrstiti u $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2$ (jer je $x=1$ i $x=4$), a ne u $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u$. Moguće je i uvrštavanje u $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u$, ali argumenata $u=x^2=1^2=1$ i $u=x^2=4^2=16$. Tada bi (nešto kraće) račun izgledao ovako:

$$\int_1^4 \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{2xdx}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_1^{16} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u\Big|_1^{16}=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}16-\operatorname{arctg}1)\approx 0.361\,.$$

**SUPSTITUCIJA U ODREĐENI INTEGRAL**

Ako integral $\int h(x)\mathrm{d}x$ supstitucijom $u=g(x)$ prelazi u $\int f(u)\mathrm{d}u$, onda je

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u\,.$$

## PRIMJER 20.

Izračunajmo $\int_0^{\pi/8}\cos 4x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Iz $u=4x$ slijedi $\mathrm{d}u=4\mathrm{d}x$ pa je

$$\int_0^{\pi/8}\cos 4x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/8}\cos 4x(4\mathrm{d}x)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\sin u\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{2}\,.$$

## PRIMJER 21.

Izračunajmo $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Iz $u = 1 + \mathrm{e}^x$ slijedi $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$, pa je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \int_2^{1+\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_2^{1+\mathrm{e}} = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}.$$

## PRIMJER 22.

Izračunajmo $\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

## Rješenje:

Iz $u = t^2 + 1$ slijedi $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$, pa je

$$\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{\sqrt{8}-1}{3}.$$

## PRIMJER 23.

Izračunajmo $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Iz $u = \mathrm{e}^x$ slijedi $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$, pa je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+(\mathrm{e}^x)^2} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u\Big|_1^{\mathrm{e}} = \operatorname{arctg}\mathrm{e} - \operatorname{arctg}1.$$

Već smo upozorili da često nije lako naći uspješnu supstituciju, koja zadani integral svodi na integral koji znamo izračunati. Općenito, integriranje je postupak pokušaja i pogreške, pa se katkada desi da pravu supstituciju nađemo tek nakon više pokušaja. Dapače, integrali mnogih elementarnih funkcija (koje su složene od polinoma, trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija, i njihovih inverza) nisu elementarne funkcije.

Na primjer,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-2x^2)}} \quad \text{i} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}$$

nisu elementarne funkcije. Zbog svega toga svladavanje tehnika integriranja mnogo je dugotrajniji i teži posao od svladavanja tehnika deriviranja i zahtijeva puno više vježbe.

# 8.3 PARCIJALNA INTEGRACIJA

Parcijalna integracija je inverzni, integralni oblik derivacije umnoška. Naime, ako su $f(x)$ i $g(x)$ derivabilne funkcije, onda pravilo za derivaciju umnoška (usp. 1.3) ustvrđuje da je

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

To znači da je $f(x)g(x)$ neodređeni integral od $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ tj.

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\mathrm{d}x = f(x)g(x) + C\,.$$

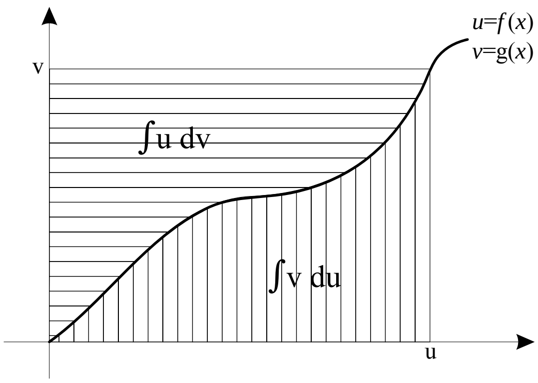
Odavde slijedi formula parcijalne integracije:

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(neodređeni integral na desnoj strani ima svoju konstantu $C$, pa je zato ne treba ponavljati).

Ako uvedemo pokrate $u = f(x)$ i $v = g(x)$, onda je $\mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}v = g'(x)\mathrm{d}x$, pa formulu parcijalne integracije možemo zapisati u diferencijalnom obliku koji se lako pamti i ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju (usp. sl.1; $u = f(x)$ i $v = g(x)$ parametarski zadaju krivulju koja površinu pravokutnika $uv$ dijeli na dva dijela):

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$




Slika 1.

**PARCIJALNA INTEGRACIJA**

Integral $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ računamo tako da ga prikažemo u obliku:

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v \left\{ \begin{array}{ll} u = f(x) & \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = g'(x)\mathrm{d}x & v = \int g'(x)\mathrm{d}x = g(x) \end{array} \right\}$$

pa zatim primijenimo formulu parcijalne integracije:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x\,.$$

## PRIMJER 1.

Izračunajmo $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

$$\int x\cos x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x & v = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x \end{matrix}\right\} =$$

$$= uv - \int v\mathrm{d}u = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x - \cos x + C.$$

## PRIMJER 2.

Izračunajmo $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Prvom parcijalnom integracijom nalazimo:

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x & v = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x \end{matrix}\right\} =$$

$$= uv - \int v\mathrm{d}u = x^2\sin x - 2\int x\sin x\mathrm{d}x.$$

Još jednom parcijalnom integracijom nalazimo:

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x & v = \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x \end{matrix}\right\} =$$

$$= uv - \int v\mathrm{d}u = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C.$$

Dakle,

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

## PRIMJER 3.

Izračunajmo

(a) $\int \ln x\mathrm{d}x$, (b) $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) $\int \ln x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = \ln x & \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & v = \int \mathrm{d}x = x \end{matrix}\right\} = uv - \int v\mathrm{d}u = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$

(b) $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x & v = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \end{matrix}\right\} = uv - \int v\mathrm{d}u = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$

## PRIMJER 4.

Izračunajmo

(a) $\int (x+1)\cos x\,\mathrm{d}x$, (b) $\int (x+2)\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) $\int (x+1)\cos x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x+1 & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x & v = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x \end{matrix}\right\} =$

$= uv - \int v\mathrm{d}u = (x+1)\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = (x+1)\sin x + \cos x + C.$

(b) $\int (x+2)\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x+2 & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x & v = \int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \end{matrix}\right\} =$

$= uv - \int v\mathrm{d}u = \frac{1}{3}(x+2)\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{3}(x+2)\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\left(x + \frac{5}{3}\right) + C.$

## PRIMJER 5.

Izračunajmo

(a) $\int x^2 \ln x\mathrm{d}x$, (b) $\int x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) $\int x^2 \ln x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = \ln x & \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x & v = \int x^2\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix}\right\} =$

$= uv - \int v\mathrm{d}u = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C = \dfrac{x^3}{3}(\ln x + \dfrac{1}{3}) + C.$

(b) $\int x^2 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x & v = \int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \end{matrix}\right\} = uv - \int v\mathrm{d}u = \dfrac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3} - \dfrac{2}{3}\int x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x =$

$= \dfrac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3} - \dfrac{2}{3}\int s\mathrm{d}t = \left\{\begin{matrix} s = x & \mathrm{d}s = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x & t = \int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \end{matrix}\right\} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3} - \dfrac{2}{3}(st - \int s\mathrm{d}t) =$

$= \dfrac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3} - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x\mathrm{e}^{3x}}{3} - \dfrac{1}{3}\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{27}(9x^2 - 6x - 2) + C.$

## PRIMJER 6.

Izračunajmo, primjenjujući supstituciju i parcijalnu integraciju:

(a) $\int 2x^3 \cos(x^2)\mathrm{d}x$, (b) $\int \dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) $\int 2x^3 \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x & v = \int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \sin(x^2) \end{matrix}\right\} =$

(Naime, primjenom supstitucije $y = x^2$, nalazimo:

$$v = \int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} y = x^2 \\ \mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x \end{matrix}\right\} = \int \cos y\mathrm{d}y = \sin y = \sin x^2.)$$

$$= uv - \int v\mathrm{d}u = x^2\sin(x^2) - \int \sin(x^2)\,(2x\mathrm{d}x) = \left\{\begin{matrix} y = x^2 \\ \mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x^2\sin(x^2) - \int \sin y\mathrm{d}y = x^2\sin(x^2) + \cos y + C = x^2\sin(x^2) + \cos(x^2) + C.$$

(b) $\int \dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = \dfrac{1}{x} & \mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ dv = \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x & v = \int \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = -\sin\dfrac{1}{x} \end{matrix}\right\} =$

(Naime, primjenom supstitucije $y = \dfrac{1}{x}$ nalazimo:

$$v=\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\left\{\begin{aligned} y&=\frac{1}{x} \\ \mathrm{d}y&=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\end{aligned}\right\}=-\int \cos y\mathrm{d}y=-\sin y=-\sin\frac{1}{x}.\ )$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\left\{\begin{aligned} y&=1/x \\ \mathrm{d}y&=-\mathrm{d}x/x^2\end{aligned}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+\int \sin y\mathrm{d}y=-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\cos y+C=-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+C.$$

## PRIMJER 7.

Dvostrukom primjenom parcijalne integracije izračunajmo $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v=\left\{\begin{array}{ll} u=\sin x & \mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x \\ dv=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x & v=\mathrm{e}^x\end{array}\right\}=\mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x-\int s\mathrm{d}t=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} s=\cos x & \mathrm{d}s=-\sin x\mathrm{d}x \\ dt=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x & t=\mathrm{e}^x\end{array}\right\}=\mathrm{e}^x\sin x-st+\int s\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x-\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x.$$

Dakle,

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)-\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x\,,$$

odakle slijedi

$$2\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+\overline{C}\,,\qquad \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C\,.$$

## PRIMJER 8.

Izračunajmo

(a) $\int \arcsin x\mathrm{d}x$ , (b) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

(a) $$\int \arcsin x\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v=\left\{\begin{array}{ll} u=\arcsin x & \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & v=x\end{array}\right\}=uv-\int v\mathrm{d}u=x\arcsin x-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\left\{\begin{aligned} y&=1-x^2 \\ dy&=-2x\mathrm{d}x\end{aligned}\right\}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{y}+C=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

(b) $$\int x\operatorname{arctg} x\,dx = \int u\,dv = \left\{\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1-x^2} \\ dv = x\,dx & v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} = uv - \int v\,du =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C.$$

## PRIMJER 9.

Izračunajmo $\int \sqrt{\frac{1}{\text{x}}-1}\,dx$.

## Rješenje:

$$\int\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx = \int u\,dv = \left\{\begin{matrix} u = \sqrt{\dfrac{1}{x}-1} & du = \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}\right)' dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right\} = uv - \int v\,du = x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \int x\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)' dx.$$

Uz supstituciju $y = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$ slijedi $dy = \left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)' dx$ i $y^2 = \frac{1}{x}-1$, tj. $x = \frac{1}{1+y^2}$. Dakle,

$$x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \int x\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)' dx = x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \int\frac{dy}{1+y^2} = x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \operatorname{arctg} y + C = x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}-1} + C.$$

Uočimo da su $y = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$ i $x = \frac{1}{1+y^2}$ (iz prethodnog primjera) međusobno inverzne funkcije. Parcijalna integracija, kombinirana sa supstitucijom, omogućila nam je da nepoznati integral funkcije $y = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$ svedemo na poznati integral njoj inverzne funkcije $x = \frac{1}{1+y^2}$. To vrijedi sasvim općenito. Ako su $y = f(x)$ i $x = f^{-1}(y)$ međusobno inverzne funkcije onda je

$$\int f(x)dx = \int u\,dv = \left\{\begin{matrix} u = f(x) & du = f'(x)dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right\} = uv - \int v\,du =$$

$$xf(x) - \int xf'(x)dx = \left\{\begin{matrix} y = f(x), & x = f^{-1}(y) \\ dy = f'(x)dx & \end{matrix}\right\} = xf(x) - \int f^{-1}(y)dy.$$

**INTEGRAL INVERZNE FUNKCIJE**

Integral funkcije $y = f(x)$ možemo izračunati pomoću integrala njoj inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$, koristeći se formulom:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int f^{-1}(y)\mathrm{d}y\,.$$

(U rezultat integracije na desnoj strani treba uvrstiti $y = f(x)$.)

Formulu za integral inverzne funkcije možemo zapisati i u jednostavnijem obliku:

$$\int y\mathrm{d}x = xy - \int x\mathrm{d}y\,.$$

(Formula se lako pamti jer je identična formuli za parcijalnu integraciju, ali sada $y$ i $x$ nisu funkcije treće varijable nego su funkcija jedna druge, $y = f(x)$ i $x = f^{-1}(y)$.)

## PRIMJER 10.

Koristeći se formulom za integral inverzne funkcije izračunajmo

(a) $\int \ln x\mathrm{d}x$, (b) $\int \arccos x\mathrm{d}x$.

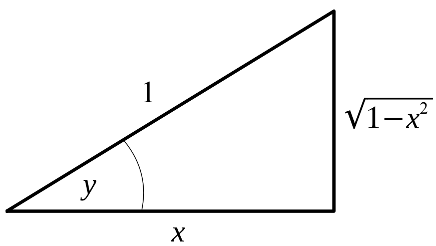
## Rješenje:

(a) $\int \ln x\mathrm{d}x = \int y\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} y = \ln x \\ x = \mathrm{e}^y \end{Bmatrix} = xy - \int x\mathrm{d}y = x\ln x - \int \mathrm{e}^y\mathrm{d}y = x\ln x - \mathrm{e}^y + C = x\ln x - x + C.$

(b) $\int \arccos x\mathrm{d}x = \int y\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} y = \arccos x \\ x = \cos y \end{Bmatrix} = xy - \int x\mathrm{d}y = x\arccos x - \int \cos y\mathrm{d}y =$

$= x\arccos x - \sin y + C = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

Da je $\sin y = \sqrt{1-x^2}$, lako uočavamo na sl.2. Iz $x = \cos y$ slijedi $\sqrt{1-x^2} = \sin y$.




Slika 2.

## PRIMJER 11.

Izračunajmo

(a) $\int \left(\sqrt{x} - 2\right)^{1/3}\mathrm{d}x$, (b) $\int \sqrt{\sqrt{x} + 1}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) Riješimo li $y=\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3}$ po $x$, naći ćemo funkciju inverznu funkciji $y=\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3}$. Dakle,

$y=\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3}$, $\quad y^3=\sqrt{x}-2$, $\quad \sqrt{x}=y^3-2$, $x=(y^3+2)^2=y^6+4y^3+4$.

Primjenom formule za integral inverzne funkcije nalazimo:

$$\int\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3}\mathrm{d}x=\int y\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} y=\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3} \\ x=y^6+4y^3+4 \end{matrix}\right\}=xy-\int x\mathrm{d}y=x\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3}-\int(y^6+4y^3+4)\mathrm{d}y=$$

$$=x\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3}-\frac{y^7}{7}+y^4+4y+C=x\left(\sqrt{x}-2\right)^{1/3}-\frac{1}{7}\left(\sqrt{x}-2\right)^{7/3}+\left(\sqrt{x}-2\right)^{4/3}+4\left(\sqrt{x}-2\right)+C.$$

(b) Iz $\sqrt{\sqrt{x}+1}$ slijedi

$$y^2=\sqrt{x}+1,\qquad \sqrt{x}=y-1,\qquad x=(y^2-1)^2,\qquad x=y^4-2y^2+1.$$

Dakle,

$$\int\sqrt{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x=\int y\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} y=\sqrt{\sqrt{x}+1} \\ x=y^4-2y^2+1 \end{matrix}\right\}=xy-\int x\mathrm{d}y=x\sqrt{\sqrt{x}+1}-\int(y^4-2y^2+1)\mathrm{d}y=$$

$$=x\sqrt{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{5}y^5+\frac{2}{3}y^3-y+C=x\sqrt{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{5}\left(\sqrt{x}+1\right)^{5/2}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^{3/2}+\sqrt{\sqrt{x}+1}+C.$$

Određene integrale, i uz parcijalnu integraciju, računamo tako da primijenimo osnovni teorem:

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=\left[uv-\int v\mathrm{d}u\right]_a^b=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$$

## PRIMJER 12.

Izračunajmo $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

$$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_0^1 u\mathrm{d}v=\left\{\begin{matrix} u=x^2 & \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} & v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{2x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\sqrt{y}=\sqrt{x^2+1} \end{matrix}\right\}=$$

$$=uv\Big|_0^1-\int_0^1 v\mathrm{d}u=x^2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,2x\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} y=x^2+1 \\ \mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x \end{matrix}\right\}=\sqrt{2}-\int_1^2\sqrt{y}\mathrm{d}y=\sqrt{2}-\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_1^2=$$

$$=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{8}+\frac{2}{3}=\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

## PRIMJER 13.

Izračunajmo

(a) $\int_1^{e} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$, (b) $\int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x+1)\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) Iz supstitucije $y=\ln x$ slijedi $x=e^y$ i $\mathrm{d}x=e^y\mathrm{d}y$. Dakle,

$$\int_1^{e} \sin(\ln x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} e^y \sin y\mathrm{d}y=(\text{usp. 7. primjer})=$$

$$=\frac{1}{2}e^y(\sin y-\cos y)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}e(\sin\pi-\cos\pi)-\frac{1}{2}(\sin 0-\cos 0)=\frac{e+1}{2}.$$

(b) Iz supstitucije $y=e^x+1$ slijedi $\mathrm{d}y=e^x\mathrm{d}x$, pa je

$$\int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x+1)\mathrm{d}x=\int_2^{3}\ln y\mathrm{d}y=(\text{usp. 3.(a) primjer})=(y\ln y-y)\Big|_2^3=3\ln 3-2\ln 2-1.$$

## PRIMJER 14.

Izračunajmo

(a) $\int_1^{3}\ln x^3\mathrm{d}x$, (b) $\int_1^{e}\ln^2 x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

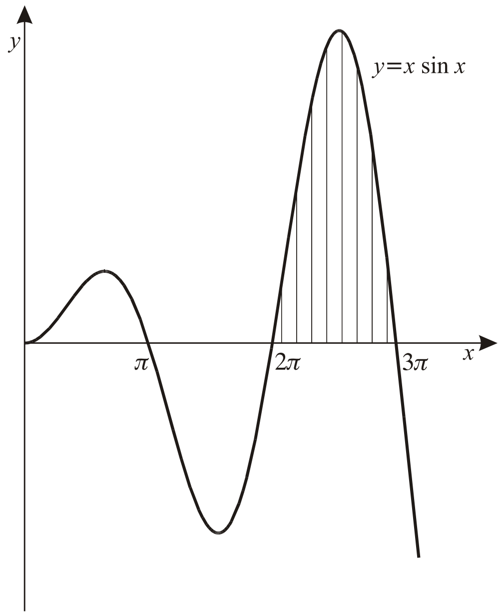
(a) $\int_1^{3}\ln x^3\mathrm{d}x=\int_1^{3}3\ln x\mathrm{d}x=(\text{usp. 10. (a) primjer})=3(x\ln x-x)\Big|_1^3=3(3\ln 3-2)$.

(b) $\int_1^{e}\ln^2 x\mathrm{d}x=\int_1^{e}u\mathrm{d}v=\left\{\begin{matrix} u=\ln^2 x & du=2\ln x\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & v=x\end{matrix}\right\}=uv\Big|_1^{e}-\int_1^{e}v\mathrm{d}u=x\ln^2 x\Big|_1^{e}-\int_1^{e}2\ln x\mathrm{d}x=$

$$=(\text{usp. 10. (a) primjer})=e-2(x\ln x-x)\Big|_1^{e}=e-2(e-e+1)=e-2.$$

## PRIMJER 15.

Izračunajmo površinu ispod trećeg luka od $y=x\sin x$ (v. sl.3.).




Slika 3.

## Rješenje:

Površina je određena integralom

$$\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x\mathrm{d}x = \int_{2\pi}^{3\pi} u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = uv\Big|_{2\pi}^{3\pi} - \int_{2\pi}^{3\pi} v\mathrm{d}u =$$

$$= -x\cos x\Big|_{2\pi}^{3\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} \cos x\mathrm{d}x = 3\pi + 2\pi + \sin x\Big|_{2\pi}^{3\pi} = 5\pi.$$

## PRIMJER 16.

Dokažimo rekurzivnu formulu

$$\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^n \mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x,$$

pa pomoću nje izračunajmo $\int_0^2 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

## Rješenje:

$$\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = x^n & \mathrm{d}u = nx^{n-1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x & v = \mathrm{e}^x \end{matrix}\right\} = uv - \int v\mathrm{d}u = x^n\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^2 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - 2\int_0^2 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^2 - 2\left(x\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) = 4\mathrm{e}^2 - 2\left(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^x\Big|_0^2\right) = 2(\mathrm{e}^2 - 1).$$

## PRIMJER 17.

Dokažimo rekurzivnu formulu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^x \mathrm{d}t = x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t ,$$

pa pomoću nje izračunajmo $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^x \mathrm{d}t$ za $x = 0, 1, 2$ i 3.

## Rješenje:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^x \mathrm{d}t = \int_0^\infty u\mathrm{d}v = \left\{\begin{matrix} u = t^x & \mathrm{d}u = xt^{x-1} \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t & v = \mathrm{e}^{-t}\end{matrix}\right\} = uv - \int_0^\infty v\mathrm{d}u =$$

$$= -e^{-t}t^x\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Za $x = 0$ imamo:

$$\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 .$$

Za $x = 1$, prema rekurzivnoj formuli, imamo:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^1\mathrm{d}t = 1\cdot\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = 1 .$$

Za $x = 2$, prema rekurzivnoj formuli, imamo:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^2\mathrm{d}t = 2\cdot\int_0^\infty e^{-t}t^1\mathrm{d}t = 2\cdot 1 = 2! .$$

Za $x = 3$, prema rekurzivnoj formuli, imamo:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^3\mathrm{d}t = 3\cdot\int_0^\infty e^{-t}t^2\mathrm{d}t = 3\cdot 2\cdot 1 = 3! .$$

Integral iz prethodnog primjera je funkcija od $x$ koja se zove "gama funkcija" i označava se sa $\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\mathrm{d}t .$$

Iz $\Gamma(1) = 1$ i iz rekurzivne formule dokazane u prethodnom primjeru slijedi da je $\Gamma(n) = n!$, za $n \in N$. Dakle, gama funkcija proširuje *faktorijele* s prirodnih na realne (čak i kompleksne) brojeve.

**GAMA FUNKCIJA $\Gamma(x)$**

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \mathrm{d}t$$

Za $n \in N$, $\Gamma(n) = n!$

Napomena: Često se ono što smo mi definirali kao $\Gamma(x)$ definira kao $\Gamma(x+1)$. Tada je $\Gamma(n+1) = n!$.

## PRIMJER 18.

Izračunajmo $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^x}$.

## Rješenje:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \begin{Bmatrix} x = \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \end{Bmatrix} = -\int_{-\infty}^0 \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^{-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n - \mathrm{e}^{-nt}}{n!}\right]\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \begin{Bmatrix} n = m-1 \\ m = n+1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-mt} t^{m\text{-}1}\mathrm{d}t = \begin{Bmatrix} mt = s \\ m\mathrm{d}t = \mathrm{d}s \end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(m-1)!} m^{-m}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{m\text{-}1}\mathrm{d}s = \sum_{m=1}^\infty m^{-m}\frac{\Gamma(m-1)}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^m} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

## PRIMJER 19.

Dokažimo rekurzivnu formulu $\int_0^1 \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1\text{-}x^2}} = \frac{n-1}{n}\int_0^1 \frac{x^{n-2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, pa koristeći se razvojem funkcije $\arcsin x$ u red potencija:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \ldots$$

(usp. 7.4 primjer 10) izračunajmo

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x .$$

## Rješenje:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} u = x^{n-1} & \mathrm{d}u = (n-1)x^{n-2} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1\text{-}x^2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{Bmatrix} = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 (n-1)x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\frac{1\text{-}x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - (n-1)\int_0^1 \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dakle,

$$n\int_0^1 \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}(n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

što smo i trebali dokazati. Odavde, te iz razvoja funkcije $\arcsin x$ u red potencija, slijedi:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^5\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\int_0^1 \frac{x^7\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots =$$

$$= [1] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\cdot 1\right] + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right] + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right] + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots .$$

S druge strane,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \arcsin x \\ dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} y\,dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

Dakle,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots.$$

Primijetimo nadalje da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

odakle slijedi da je

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Usporedite općenitiji izračun sume $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, za svaki parni $p$, u 7.7 primjer 4.

## PRIMJER 20.

Dokažimo rekurzivnu formulu

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,$$

pa pomoću nje izračunajmo $\int \cos^4 x\,dx$ i $\int \cos^3 x\,dx$.

## Rješenje:

$$\int \cos^n x\,dx = \int u\,dv = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos^{n-1} x & du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right\} = uv - \int v\,du =$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx + (n-1)\int \cos^n x\,dx.$$

Dakle,

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx + (n-1)\int \cos^n x\,dx,$$

odakle slijedi

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx, \qquad \int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Primjenjujući posljednju formulu nalazimo:

$$\int \cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3\cos x \sin x}{8} + \frac{x}{2} + C.$$

$$\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\mathrm{d}x = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x + C.$$

Slično možemo naći rekurzivne formule za $\int \sin^n x\mathrm{d}x$ i $\int \cos^m x \sin^n x\mathrm{d}x$:

**INTEGRALI TRIGONOMETRIJSKIH POTENCIJA**

$$\int \cos^n x\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\mathrm{d}x$$

$$\int \sin^n x\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\mathrm{d}x$$

$$\int \cos^m x \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\mathrm{d}x.$$

## PRIMJER 21.

Dokažimo rekurzivne formule

$$\int x^n \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^n \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,\mathrm{d}x$$

pa pomoću njih izračunajmo $\int\limits_0^\pi x^3 \sin x\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

$$\int x^n \sin ax\,\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \left\{\begin{array}{ll} u = x^n & \mathrm{d}u = nx^{n-1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin ax\,\mathrm{d}x & v = -\frac{1}{a}\cos ax \end{array}\right\} = uv - \int v\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,\mathrm{d}x.$$

$$\int x^n \cos ax\,\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = \begin{Bmatrix} u = x^n & \mathrm{d}u = nx^{n-1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos ax\,\mathrm{d}x & v = \dfrac{1}{a}\sin ax \end{Bmatrix} = uv - \int v\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{a}x^n \sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1} \sin ax\,\mathrm{d}x.$$

$$\int x^3 \sin x\,\mathrm{d}x = -x^3 \cos x\Big|_0^\pi + 3\int_0^\pi x^2 \cos x\,\mathrm{d}x = \pi^3 + 3\left( x^2 \sin x\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x \right) =$$

$$= \pi^3 - 6\left( -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x \right) = \pi^3 - 6\pi - 6\sin x\Big|_0^\pi = \pi^3 - 6\pi.$$

# 8.4 TRIGONOMETRIJSKI INTEGRALI

U ovom odjeljku pokazujemo kako se nalaze integrali nekih trigonometrijskih funkcija, te nekih algebarskih funkcija koje se trigonometrijskim supstitucijama svode na trigonometrijske funkcije.

U prethodnom odjeljku našli smo rekurzivnu formulu za izračunavanje integrala trigonometrijske potencije oblika $\int \sin^m x \cos^n x\mathrm{d}x$ (usp. okvir na prethodnoj stranici). I bez te rekurzivne formule takav je integral lako izračunati supstitucijom, ako je $m = 1$ ili $n = 1$:

$$\int \sin^m x \cos x\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} y = \sin x \\ \mathrm{d}y = \cos x\mathrm{d}x \end{Bmatrix} = \int y^m \mathrm{d}y = \frac{y^{m+1}}{m+1} + C = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C$$

(za $m \neq -1$; ako je $m = -1$ rezultat je $\ln|\sin x| + C$).

$$\int \sin x \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} y = \cos x \\ \mathrm{d}y = -\sin x\mathrm{d}x \end{Bmatrix} = \int y^n \mathrm{d}y = -\frac{y^{n+1}}{n+1} + C = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

(za $n \neq -1$; ako je $n = -1$ rezultat je $-\ln|\cos x| + C$).

Ako je $m$ ili $n$ neparan, onda naš integral uz pomoć identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ možemo svesti na jedan od dva upravo razmotrena tipa.

## PRIMJER 1.

Izračunajmo $\int \sin^3 x \cos^2 x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

$$\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} y=\cos x \\ \mathrm{d}y = -\sin x\mathrm{d}x\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\int (1-y^2)y^2\mathrm{d}y = \int (y^4-y^2)\mathrm{d}y = \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Ako su $m$ i $n$ parni, $m = 2j$ i $n = 2k$, onda se koristimo trigonometrijskim formulama (usp. 5.2):

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Naime, tada je

$$\int \sin^{2j} x\cos^{2k} x\mathrm{d}x = \int (\sin^2 x)^j(\cos^2 x)^k\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^j\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{\begin{matrix} y=2x \\ \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1-\cos y}{2}\right)^j\left(\frac{1+\cos y}{2}\right)^k\mathrm{d}y.$$

Kada obavimo potenciranje i množenje dolazimo do integrala oblika $\int \cos^l x\mathrm{d}x$ za $l$ od 0 do $j+k$. Za neparne $l$ postupamo kako je objašnjeno, a za parne $l$ još jednom primijenimo formule (1). Postupak se ponavlja dok god je to potrebno.

## PRIMJER 2.

Izračunajmo $\int \sin^4 x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

$$\int \sin^4 x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)(1+\cos 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} y=2x \\ \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x\end{matrix}\right\} = \frac{1}{16}\int (1-\cos y-\cos^2 y+\cos^3 y)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{16}\left(y-\sin y-\frac{1}{2}\int (1+\cos 2y)\mathrm{d}y + \int \cos^2 y\cos y\mathrm{d}y\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(y-\sin y-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\sin 2y + \int (1-\sin^2 y)\cos y\mathrm{d}y\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} z=\sin y \\ \mathrm{d}z = \cos y\mathrm{d}y\end{matrix}\right\} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}y-\sin y-\frac{1}{4}\sin 2y + \int (1-z^2)\mathrm{d}z\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}y-\sin y-\frac{1}{4}\sin 2y + z - \frac{z^3}{3}\right) + C = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}y-\sin y-\frac{1}{4}\sin 2y + \sin y - \frac{\sin^3 y}{3}\right) + C$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\sin 2y-\frac{1}{3}\sin^3 y\right)+C=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)+C.$$

## PRIMJER 3.

Izračunajmo $\int(\sin^2 x+\sin^3 x\cos^2 x)\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

$$\int(\sin^2 x+\sin^3 x\cos^2 x)\mathrm{d}x=\int\sin^2 x\mathrm{d}x+\int\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=$$

$$=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x+\int\sin^2 x\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x=$$

$$=\left\{\begin{matrix} y=\cos x \\ \mathrm{d}y=-\sin x\mathrm{d}x\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x-\int(1-y^2)y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5+C=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

## PRIMJER 4.

Izračunajmo $\int\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Izrazimo sve pomoću sin i cos:

$$\int\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\sin x\mathrm{d}x=\int\frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^6 x}\sin x\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} y=\cos x \\ \mathrm{d}y=-\sin x\mathrm{d}x\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{1-y^2}{y^6}\mathrm{d}y=\int(y^{-4}-y^{-6})\mathrm{d}y=-\frac{y^{-3}}{3}+\frac{y^{-5}}{5}+C=-\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{5\cos^5 x}+C.$$

U primjenama su veoma važni trigonometrijski integrali oblika

$$\int\sin ax\cos bx\mathrm{d}x,\int\sin ax\sin bx\mathrm{d}x,\int\cos ax\cos bx\mathrm{d}x.$$

Njih računamo koristeći se trigonometrijskim formulama (usp.5.2):

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\sin(a-b)x+\sin(a+b)x,$$

$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}\cos(a-b)x-\cos(a+b)x,$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\cos(a-b)x + \cos(a+b)x.$$

## PRIMJER 5.

Izračunajmo

(a) $\int \sin 3x \cos 2x \mathrm{d}x$, (b) $\int \sin 3x \sin 5x \mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) $\int \sin 3x \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin x + \sin 5x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x\right) + C$.

(b) $\int \sin 3x \sin 5x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos(-2x) - \cos 8x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C$.

## PRIMJER 6.

Izračunajmo $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x$.

## Rješenje:

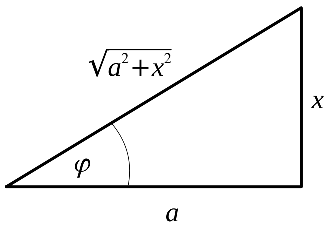
$$\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \dfrac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, & \text{za } a \neq \pm b, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2ax}{4a} + C, & \text{za } a = \pm b. \end{cases}$$

Uočimo bitnu razliku između slučaja $a \neq \pm b$, pri kojem je rješenje oscilirajuća omeđena funkcija, i slučaja $a = \pm b$, pri kojem je rješenje funkcija koja neograničeno raste (jer ima neoscilirajući dio $\frac{x}{2}$). Ako na sustav vlastite frekvencije $a$ djeluje oscilirajuća sila frekvencije $b$, on će se gibati u skladu s našim rješenjem. To znači da će u slučaju rezonancije, kada je $a = b$, doći do neograničeno velikih gibanja i konačno razaranja sustava.

Mnogi integrali koji sadrže faktore oblika $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ i $\sqrt{x^2-a^2}$ mogu se svesti na jednostavnije integrale trigonometrijskim supstitucijama. Njih je najlakše odrediti iz odgovarajućeg pravokutnog trokuta:

(1) Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{a^2+x^2}$ mora imati katete $a$ i $x$, te hipotenuzu $\sqrt{a^2+x^2}$ (usp. sl.1.).

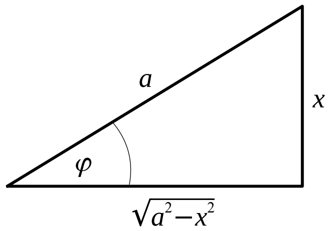



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{a}$$

Slika 1.

Pokušajmo supstituirati $x = a\operatorname{tg}\varphi$, jer je tada $\sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ i $\mathrm{d}x = \dfrac{a\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$.

(2) Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{a^2-x^2}$ mora imati hipotenuzu $a$ i jednu katetu $x$, dok mu je druga kateta $\sqrt{a^2-x^2}$ (usp.sl.2.).

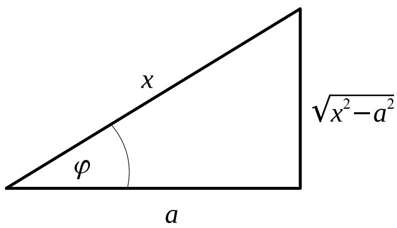



$$\sin\varphi = \frac{x}{a}$$

Slika 2.

Pokušajmo supstituirati $x = a\sin\varphi$, jer je tada $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\varphi$ i $\mathrm{d}x = a\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$.

(3) Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{x^2-a^2}$ mora imati hipotenuzu $x$ i jednu katetu $a$, dok mu je druga kateta $\sqrt{x^2-a^2}$ (usp.sl.3.).




$$\cos\varphi = \frac{a}{x}$$

Slika 3.

Pokušajmo supstituirati $x = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, jer je tada $\sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{tg}\varphi$ i $\mathrm{d}x = \dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \dfrac{a\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

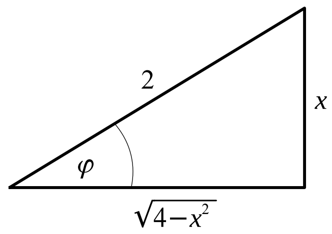
## PRIMJER 7.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$, (b) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$, (c) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}$.

## Rješenje:

(a) Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{4-x^2}$ ima hipotenuzu 2 i katetu $x$, (usp.sl.4.).




$$\sin\varphi = \frac{x}{2}$$

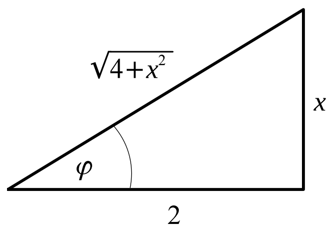
Slika 4.

Pokušajmo supstituirati $x = 2\sin\varphi$, jer je tada $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\varphi$ i $dx = 2\cos\varphi d\varphi$:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\sin^2\varphi}{2\cos\varphi} 2\cos\varphi d\varphi = 4\int \sin^2\varphi d\varphi = 4\int \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 2\varphi - \sin 2\varphi + C = 2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + C = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C.$$

(b) Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{4+x^2}$ ima katete 2 i $x$, (usp.sl.5.).




$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{x}{2}$$

Slika 5.

Pokušajmo supstituirati $x = 2\mathrm{tg}\varphi$, jer je tada $\sqrt{4+x^2} = \frac{2}{\cos\varphi}$ i $dx = \frac{2d\varphi}{\cos^2\varphi}$:

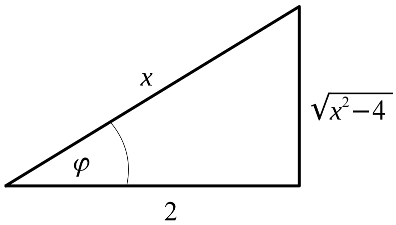
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int 2\,\mathrm{tg}\varphi \frac{\cos\varphi}{2} \frac{2d\varphi}{\cos^2\varphi} = 2\int \frac{\sin\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} u = \cos\varphi \\ du = -\sin\varphi d\varphi \end{array} \right\} = -2\int \frac{du}{u^2} = \frac{2}{u} + C = \frac{2}{\cos\varphi} + C = \sqrt{4+x^2} + C.$$

(Uočimo da smo isti integral još jednostavnije mogli izračunati supstitucijom $y = 4+x^2$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + C = \sqrt{4+x^2} + C \text{ .)}$$

(c) Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{x^2-4}$ ima hipotenuzu $x$ i katetu 2 (usp.sl.6.).




$$\cos\varphi = \frac{2}{x}$$

Slika 6.

Pokušajmo supstituirati $x = \dfrac{2}{\cos\varphi}$, jer je tada $\sqrt{x^2-4} = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{2\sin\varphi}{\cos\varphi}$ i $\mathrm{d}x = \dfrac{2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}} = \int\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi}\,\frac{2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = \int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \ln\left|\frac{1}{\cos\varphi}+\mathrm{tg}\,\varphi\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C = \ln\frac{1}{2}\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C.$$

(Uočimo da zadani integral možemo izračunati kao integral oblika $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$; usp. 2. odjeljak.)

Da u prethodnom primjeru uistinu vrijedi $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \ln\left|\frac{1}{\cos\varphi}+\mathrm{tg}\,\varphi\right| + C$, možemo provjeriti tako da izračunamo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\ln\left|\dfrac{1}{\cos\varphi}+\mathrm{tg}\,\varphi\right| = \dfrac{1}{\cos\varphi}$. Slična formula vrijedi i za $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi}$.

**INTEGRALI RECIPROČNIH VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA**

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = -\ln\left|\frac{1}{\sin\varphi}+\mathrm{ctg}\,\varphi\right| + C = \ln\left|tg\,\frac{\varphi}{2}\right| + C,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \ln\left|\frac{1}{\cos\varphi}+\mathrm{tg}\,\varphi\right| + C = \ln\left|tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

## PRIMJER 8.

Izračunajmo $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

## Rješenje:

Iz $x=\sin\varphi$ slijedi $\sqrt{1-x^2}=\cos\varphi$ i $\mathrm{d}x = \cos\varphi\mathrm{d}\varphi$, Dakle,

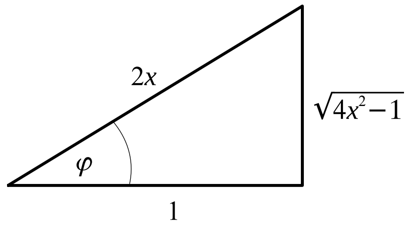
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi} = \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = -\ln\left|\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

## PRIMJER 9.

Izračunajmo $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-1}}$.

## Rješenje:

Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{4x^2-1}$ ima hipotenuzu $2x$ i katetu 1 (usp.sl.7.).




$$\cos\varphi = \frac{1}{2x}$$

Slika 7.

Pokušajmo supstituirati $x = \frac{1}{2\cos\varphi}$, jer je onda $\sqrt{4x^2-1} = \mathrm{tg}\,\varphi$ i $\mathrm{d}x = \frac{\sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi \mathrm{d}\varphi}{2\cos\varphi}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{tg}\,\varphi \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi \cos\varphi} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\cos\varphi} + \mathrm{tg}\,\varphi\right| + C = \frac{1}{2}\left|2x + \sqrt{4x^2-1}\right| + C.$$

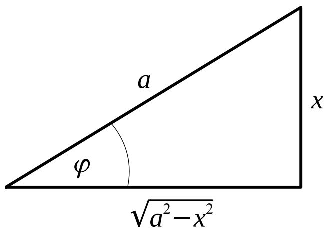
(Uočimo da taj integral možemo još jednostavnije izračunati kao u 8.2 primjer 10.)

## PRIMJER 10.

Izračunajmo $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Pravokutni trokut sa stranicom $\sqrt{a^2-x^2}$ ima hipotenuzu $a$ i katetu $x$ (usp.sl.8.).




$$\sin\varphi = \frac{x}{a}$$

Slika 8.

Dakle, $x = a\sin\varphi$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\varphi$ i $\mathrm{d}x = a\cos\varphi \mathrm{d}\varphi$ daje:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int a^2\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=a^2\int\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Integral koji sadrži faktor oblika $\sqrt{x^2+a^2}$ (ili $\sqrt{x^2-a^2}$) katkada je jednostavnije izračunati hiperbolnom supstitucijom $x=a\,\mathrm{sh}\,t$ (ili $x=a\,\mathrm{ch}\,t$), jer je tada

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2+\mathrm{sh}^2\,t+a^2}=a\sqrt{\mathrm{sh}^2\,t+1}=a\,\mathrm{ch}\,t \quad \text{i} \quad \mathrm{d}x=a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$$

(odnosno $\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{ch}\,t$ i $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t$).

## PRIMJER 11.

Izračunajmo

(a) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, (b) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) Pokušajmo supstitucijom $x=a\mathrm{sh}\,t$ jer je tada $\sqrt{x^2+a^2}=a\,\mathrm{ch}\,t$ i $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int\mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t+1)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{4}(\mathrm{sh}\,2t+t)+C$$

$$=\frac{1}{2}a\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t+\frac{a^2}{4}+C=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{4}\mathrm{arsh}\frac{x}{a}+C$$

$$=(\text{usp. } 7.6)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

(b) Iz $x=a\,\mathrm{ch}\,t$ slijedi $\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{sh}\,t$ i $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{sh}\,t$. Dakle,

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int\mathrm{sh}^2\,t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t-1)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{4}(\mathrm{sh}\,2t-t)+C=$$

$$=\frac{1}{2}a\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t-\frac{a^2}{4}t+C=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{4}\mathrm{arch}\frac{x}{a}+C=$$

$$=(\text{usp. } 7.6)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

**INTEGRALI NEKIH ALGEBARSKIH FUNKCIJA**

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0,$$

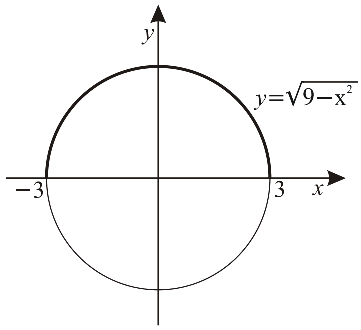
$$\int \sqrt{\mathrm{x}^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

## PRIMJER 12.

Izračunajmo površinu kruga radijusa 3.

## Rješenje:

Jednadžba kruga radijusa 3, sa središtem u ishodištu je $x^2 + y^2 = 9$, (usp.sl.9.).




Slika 9.

Gornja polovica omeđena je grafom funkcije $y = \sqrt{9 - x^2}$ i intervalom $-3 \le x \le 3$. Dakle,

$$P = 2\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 9\pi\,.$$

# 8.5 INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJA

Kako se računa integral polinoma dobro nam je poznato. U ovom ćemo odjeljku pokazati kako se računa integral kvocijenta dvaju polinoma $\int (P(x) / Q(x))\mathrm{d}x$, tj. kako se računa integral racionalne funkcije.

Primijetimo najprije da se racionalna funkcija $S(x)/Q(x)$, u kojoj je stupanja polinoma $S(x)$ veći ili jednak stupnju polinoma $Q(x)$, može dijeljenjem svesti na zbroj polinoma $R(x)$ i racionalne funkcije $P(x)/Q(x)$, u kojoj je stupanj od $P(x)$ manji od stupnja od $Q(x)$:

$$S(x) \,:\, Q(x) = R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Budući da polinom $R(x)$ znamo integrirati, jedini je problem integriranje racionalne funkcije $P(x)/Q(x)$, u kojoj je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika.

## PRIMJER 1.

Izračunajmo $\int \frac{3x^3 - x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} \mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Dijeljenjem nalazimo:

$$
\begin{array}{l}
3x^3 - x^2 + 3x + 4 \ : \ x^2 + 1 = 3x - 1 + \dfrac{5}{x^2+1} \\
\underline{-(3x^3 + 3x)} \\
\quad -x^2 + 4 \\
\underline{-(-x^2 - 1)} \\
\qquad 5
\end{array}
$$

Dakle,

$$\int \frac{3x^3 - x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} \mathrm{d}x = \int (3x - 1) \mathrm{d}x + 5 \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \frac{3}{2} x^2 - x + 5 \operatorname{arctg} x + C.$$

Razmotrimo sada problem integriranja racionalne funkcije $P(x)/Q(x)$, u kojoj je stupanj od $P(x)$ manji od stupnja od $Q(x)$. Najjednostavnije integrale te vrste računamo u slijedećem primjeru.

## PRIMJER 2.

Izračunajmo

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$, (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^n}$.

## Rješenje:

(a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \left\{ \begin{array}{l} u = x - a \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int u^{-n} \mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}, & \text{za } n \neq 1, \\ \ln|x-a|, & \text{za } n = 1. \end{cases}$$

(b) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^n} = \left\{ \begin{array}{l} u = ax + b \\ \mathrm{d}u = a\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int u^{-n} \mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{(ax+a)^{-n+1}}{-n+1}, & \text{za } n \neq 1, \\ \ln|ax+b|, & \text{za } n = 1. \end{cases}$$

## PRIMJER 3.

Izračunajmo

(a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-5)^3}$, (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)^2}$, (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x+8}$.

## Rješenje:

Prema prethodnom primjeru:

(a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-5)^3}=\frac{(x-5)^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{-1}{2(x-5)^2}+C$ ,

(b) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)^2}=\frac{1}{3}\frac{(3x-1)^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{-1}{9x-3}+C$ ,

(c) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{5x+8}=\frac{1}{5}\ln|5x+8|+C$ .

I složenije racionalne funkcije $P(x)/Q(x)$, u kojima je $Q(x)$ umnožak linearnih faktora, uvijek možemo integrirati standardnim postupkom. To ilustriramo s nekoliko primjera, prije nego općenito opišemo taj postupak.

## PRIMJER 4.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x-3)}$, (b) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$ .

## Rješenje:

(a) Racionalnu podintegralnu funkciju prikažimo kao zbroj parcijalnih razlomaka oblika

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

gdje su $A$ i $B$ konstante koje tek trebamo odrediti. Množenjem sa $(x-2)(x-3)$ nalazimo:

$$1=A(x-3)+B(x-2)$$

Za $x=2$ imamo $1=-A$, tj. $A=-1$, a za $x=3$ imamo $1=B$. Dakle,

$$\int\frac{1}{(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x=\int\frac{-1}{x-2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x=-\ln|x-2|+\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$$

(Koeficijente $A$ i $B$ mogli smo naći i tako da u

$$1=A(x-3)+B(x-2),\ \text{ tj. }\ 1=(A+B)x+(-3A-2B)$$

izjednačimo odgovarajuće koeficijente polinoma na lijevoj i desnoj strani:

$$A+B=0,\quad -3A-2B=1.$$

Rješavajući taj sustav opet bismo našli $A = -1$, $B = 1$.)

(b) Racionalnu podintegralnu funkciju prikažimo kao zbroj parcijalnih razlomaka oblika:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x+a}$$

gdje su $A$ i $B$ konstante koje tek trebamo odrediti. Množenjem sa $(x-a)(x+a)$ nalazimo:

$$1 = B(x+a) + C(x-a).$$

Za $x = a$ imamo $1 = 2aB$, tj. $B = \frac{1}{2a}$, a za $x = -$a imamo $1 = -2aC$, tj. $C = -\frac{1}{2a}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

## PRIMJER 5.

Izračunajmo $\int \frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Racionalnu podintegralnu funkciju prikažimo kao zbroj parcijalnih razlomaka oblika:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3},$$

gdje su $A$ i $B$ konstante koje tek trebamo odrediti. Množenjem sa $(x-1)(x-3)$ nalazimo:

$$x+1 = A(x-3)+B(x-1).$$

Za $x=1$ imamo $2=-2A$, tj. $A=-1$, a za $x=3$ imamo $4=2B$, tj. $B=2$. Dakle,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x-1}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-3}\mathrm{d}x = -\ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C = \ln\left|\frac{(x-3)^2}{x-1}\right| + C.$$

(Koeficijente $A$, $B$ i ovaj put možemo izračunati iz

$$x+1 = A(x-3)+B(x-1), \text{ tj. } x+1 = (A+B)x+(-3A-B),$$

izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata:

$$1 = A+B, \quad 1 = -3A-B.$$

Rješavajući taj sustav opet dobijemo $A=-1$ i $B=2$.)

## PRIMJER 6.

Izračunajmo $\int \frac{x+1}{(x-2)(x-1)^2}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Mogli bismo očekivati da se i sada (kao i u prethodnim primjerima) podintegralna funkcija može prikazati u obliku $A/(x-2)+B/(x-1)$. No, to nije točno. Zbog druge potencije linearnog faktora, $(x-1)^2$, treba dodati i treći parcijalni razlomak $C/(x-1)^2$. Dakle,

$$\frac{x+1}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

gdje su $A$, $B$ i $C$ konstante koje tek trebamo odrediti. Množenjem sa $(x-1)^2(x-2)$ nalazimo:

$$x+1 = A(x-1)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-2).$$

Za $x=1$ imamo $2=-C$, tj. $C=-2$. Za $x=2$ imamo $3=A$. Za $x=0$ imamo $1=A+2B-2C$, tj. $1=2B+7$, tj. $B=-3$.

(Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata u

$$x+1=(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C),$$

dobili bismo sustav

$$\mathrm{A+B=0}, \quad \mathrm{-2A-3B+C=1}, \quad \mathrm{A+2B-2C+1},$$

koji daje iste vrijednosti $A=3$, $B=-3$ i $C=-2$.).

Dakle,

$$\int \frac{x+1}{(x-2)(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{3}{x-2}\mathrm{d}x+\int \frac{-3}{x-1}\mathrm{d}x+\int \frac{-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=$$

$$=3\ln|x-2|-3\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C=\frac{2}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|^3+C.$$

## PRIMJER 7.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x+3}{(x+3)(x-2)^2}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{4x^2+2x+3}{(x+3)(x-2)^2}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(a) Faktoru $(x+3)$, u nazivniku podintegralne funkcije, odgovara parcijalni razlomak $A/(x+3)$, dok faktoru $(x-2)^2$ odgovaraju parcijalni razlomci $B/(x-2)$ i $C/(x-2)^2$. Podintegralna funkcija jednaka je zbroju tih parcijalnih razlomaka:

$$\frac{4x^2+2x+3}{(x+3)(x-2)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Množenjem sa $(x+3)(x-2)^2$ nalazimo:

$$4x^2+2x+3=A(x-2)^2+B(x-2)(x+3)+C(x+3).$$

Za $x=2$ imamo:

$$4\cdot 4+2\cdot 2+3=C(2+3), \quad 23=5C, \quad C=\frac{23}{5}$$

Za $x=-3$ imamo:

$$4\cdot 9-2\cdot 3+3=A(-3-2)^2, \quad 33=25A, \quad A=\frac{33}{25}.$$

Koeficijent $B$ nalazimo uvrštavanjem bilo koje vrijednosti $x$, npr. $x=0$:

$$3=4A-6B+3C, \quad 3=4\cdot\frac{33}{25}-6B+3\cdot\frac{23}{5}, \quad 6B=3\cdot\frac{134}{25}, \quad B=\frac{67}{25}.$$

Dakle,

$$\int \frac{4x^2+2x+3}{(x+3)(x-2)^2}\mathrm{d}x = \frac{33}{25}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} + \frac{67}{25}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + \frac{23}{5}\int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{33}{25}\ln|x+3| + \frac{67}{25}\ln|x-2| - \frac{23}{5}\frac{1}{x-2} + C.$$

(b) Podintegralna funkcija teži u ∞ za $x=2$ i $x=-3$, pa područje integracije ne smije sadržavati nijednu od tih točaka. Interval $[-1,\ 1]$ ih ne sadrži pa možemo računati, koristeći se Newton – Leibnizovom formulom:

$$\int_{-1}^{1} \frac{4x^2+2x+3}{(x+3)(x-2)^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{33}{25}\ln|x+3| + \frac{67}{25}\ln|x-2| - \frac{23}{5}\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{33}{25}\ln 4 + \frac{23}{5}\right) - \left(\frac{33}{25}\ln 2 + \frac{67}{25}\ln 3 + \frac{23}{15}\right) \approx 1.037.$$

## PRIMJER 8.

Izračunajmo $\int \frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Faktoru $(x-1)^3$ odgovaraju parcijalni razlomci $A/(x-1)$, $B/(x-1)^2$ i $C/(x-1)^3$ , dok faktoru $(x-2)$ odgovara parcijalni razlomak $D/(x-2)$. Podintegralna funkcija jednaka je zbroju tih parcijalnih razlomaka:

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2}.$$

Množenjem sa $(x-1)^3(x-2)$ nalazimo:

$$x+1 = A(x-1)^2(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-2) + D(x-1)^3.$$

Za $x=1$ imamo $2=-C$, tj. $C=-2$. Za $x=2$ imamo $3=D$. Preostala dva koeficijenta određujemo tako da u gornju jednadžbu uvrstimo još dvije vrijednosti za $x$, npr. $x=0$ i $x=-1$:

$$1 = -2A + 2B - 2C - D, \quad 0 = -12A + 6B - 3C - 8D,$$

te zbog $C=-2$ i $D=3$:

$$2A - 2B = 0, \quad 12A - 6B = -18, \quad A = B, \quad 2A - B = -3, \quad A = B = -3.$$

Dakle,

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)}\mathrm{d}x = -3\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - 3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} + 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2} =$$

$$= -3\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + 3\ln|x-2| + C = \frac{3x-2}{(x-1)^2} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|^3 + C.$$

Međutim, ne može se svaki polinom prikazati kao produkt linearnih faktora. Na primjer, $x^2+1$ se ne može prikazati kao produkt dva linearna faktora (osim ako se ne koristimo kompleksnim brojevima). Općenito , polinom s kompleksnim korijenima $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ , $\alpha_2 \pm \beta_2 i, \ldots,$ ima kvadratne faktore $x^2 - 2\alpha_1 x + (\alpha_1^2 + \beta_1^2)$, $x^2 - 2\alpha_2 x + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)$, ... . (Naime $(x - (\alpha+\beta i))(x - (\alpha-\beta i)) = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2+\beta^2)$, što se lako provjerava množenjem).

Kvadratnim faktorima oblika $x^2 - px + q$, ako imaju kompleksne korijene (tj. ako je $p^2 < 4q$), odgovaraju parcijalni razlomci oblika $(Ax+B)/(x^2 - px + q)$. Njihovim potencijama $(x^2 - px + q)^n$ odgovaraju parcijalni razlomci $(A_1 x + B_1)/(x^2 - px + q)$, $(A_2 x + B_2)/(x^2 - px + q)^2$, ..., $(A_n x + B_n)/(x^2 - px + q)^n$. Racionalna funkcija čiji je nazivnik produkt takvih faktora i ranije razmotrenih linearnih faktora, može se prikazati kao zbroj svih njima odgovarajućih parcijalnih razlomaka. To ćemo ilustrirati s par primjera.

## PRIMJER 9.

Izračunajmo $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

## Rješenje:

Kvadratni faktor $x^2+x+1$ ne može se dalje faktorizirati na dva linearna faktora jer ima kompleksne korijene $(p^2 = 1 < 4 = 4q)$, pa je zato podintegralna funkcija jednaka zbroju slijedećih parcijalnih razlomaka:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{Ax+B}{x^2+x+1}.$$

Množenjem sa $(x-1)(x^2+x+1)$ nalazimo:

$$1 = a(x^2+x+1) + (Ax+B)(x-1).$$

Za $x = 1$ imamo $1 = 3a$, tj. $a = \frac{1}{3}$. Za $x = 0$ imamo $1 = a - B = \frac{1}{3} - B$, tj. $B = -\frac{2}{3}$. Usporedimo li koeficijent uz $x^2$ na lijevoj strani posljednje jednadžbe, koji je 0, i onaj na desnoj strani, koji je $a+A$, imamo $a + A = 0$, tj. $A = -a = -\frac{1}{3}$. Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

Prvi od dva dobijena integrala znamo izračunati:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln|x-1| + C_1 .$$

Drugi integral, s kvadratnim nazivnikom, transformiramo tako da se u brojniku pojavi derivacija tog kvadratnog nazivnika:

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}.$$

Sada je lako izračunati posljednje integrale. Prvi nalazimo supstitucijom,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} u = x^2+x+1 \\ \mathrm{d}u = (2x+1)\mathrm{d}x \end{Bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C_2 = \ln\left|x^2+x+1\right| + C_2,$$

dok drugi nalazimo svođenjem na puni kvadrat (usp. 8.2):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \begin{Bmatrix} v = x+\frac{1}{2} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{Bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}} + C_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_3.$$

Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

## PRIMJER 10.

Izračunajmo $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

## Rješenje:

Najprije moramo faktorizirati nazivnik $x^3-1$. Jedan njegov realni korijen je 1, pa je zato njegov linearni faktor $x-1$. Drugi faktor nalazimo dijeljenjem:

$$\begin{array}{l} x^3-1 \;:\; x-1 = x^2+x+1 \\ \underline{-(x^3-x^2)} \\ \quad x^2-1 \\ \underline{-(x^2-x)} \\ \quad x-1 \\ \underline{-(x-1)} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Dakle, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Kvadratni faktor $x^2+x+1$ ne može se dalje faktorizirati jer ima kompleksne korijene. Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

a taj smo integral izračunali u 9. primjeru.

Vidjeli smo da kvadratni faktori u nazivniku podintegralne funkcije vode na integrale tipa $\int \mathrm{d}x/(x^2+a^2)^n$ . Zato ćemo u slijedećem primjeru izračunati taj tip integrala, za $n=1,\ 2,\ 3$, te općenito bilo koji $n$.

## PRIMJER 11.

Izračunajmo

(a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$, (b) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$, (c) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$, (d) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ .

## Rješenje:

(a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$

(b) Primijenimo postupak parcijalne integracije na poznati integral

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\int u\mathrm{d}v=\left\{\begin{matrix} u=\dfrac{1}{x^2+a^2} & \mathrm{d}u=\dfrac{-2x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & v=x\end{matrix}\right\}=uv-\int v\mathrm{d}u=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}-2a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}.$$

Dakle,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{x}{x^2+a^2}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}-2a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$$

odakle slijedi

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\right)$$

tj. zbog (a),

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C\,.$$

(c) Primijenimo postupak parcijalne integracije na poznati integral (b):

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\int u\mathrm{d}v=\left\{\begin{matrix} u=\dfrac{1}{(x^2+a^2)^2} & \mathrm{d}u=\dfrac{-4x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & v=x\end{matrix}\right\}=$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u=\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+4\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+4\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x=\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}-4a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}.$$

Dakle,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}-4a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3},$$

odakle slijedi

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{4(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}\right),$$

tj. zbog (b),

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{4(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}\frac{x}{2(x^2+a^2)}+\frac{3}{8a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C.$$

(d) Postupak proveden za $n=2$ u (b) i za $n=3$ u (c) može se primijeniti općenito, za svaki $n$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}=\int u\mathrm{d}v=\left\{\begin{matrix} u=\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} & \mathrm{d}u=-\dfrac{2(n-1)x}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & v=x\end{matrix}\right\}=$$

$$=uv-\int v\mathrm{d}u=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-2(n-1)a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}.$$

Dakle,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-2(n-1)a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n},$$

odakle slijedi

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)$$

Posljednja rekurzivna formula omogućava da snizujemo eksponent podintegralne funkcije, dok ne dođemo do poznatog integrala $\int\mathrm{d}x\big/(x^2+a^2)$. (Konkretna primjena rekurzivne formule nalazi se u slijedećem primjeru.)

## PRIMJER 12.

Izračunajmo $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3)^4}$.

## Rješenje:

Primjenom rekurzivne formule, do koje smo došli na kraju 11.primjera, nalazimo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3)^4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\frac{x}{(x^2+3)^3} + \frac{5}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3)^3}\right) =$$

$$= \frac{x}{18(x^2+3)^3} + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+3)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+3)^2}\right) =$$

$$= \frac{x}{18(x^2+3)^3} + \frac{5x}{216(x^2+3)^2} + \frac{15}{72}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3}\right) =$$

$$= \frac{x}{18(x^2+3)^3} + \frac{5x}{216(x^2+3)^2} + \frac{15x}{432(x^2+3)} + \frac{15}{432}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Poslije svih ovih primjera možemo opisati opći postupak za integriranje racionalne funkcije.

**INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJA**

Racionalnu funkciju $P(x)/Q(x)$, gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi, integriramo na slijedeći način:

(1) Ako je $P(x)$ jednakog ili većeg stupnja od $Q(x)$, onda podijelimo $P(x)$ sa $Q(x)$, čime ćemo $P(x)/Q(x)$ prikazati kao zbroj $S(x)+R(x)/Q(x)$, gdje je $R(x)$ stupnja manjeg od $Q(x)$. (Zato nadalje pretpostavimo da je $P(x)$ manjeg stupnja od $Q(x)$.)

(2) Nazivnik $Q(x)$ faktoriziramo u linearne faktore oblika $(x-c)$, gdje je $c$ realni korijen od $Q(x)$, i kvadratne faktore oblika $x^2-px+q$, gdje je $p=2\alpha$ i $q=\alpha^2+\beta^2$, a $\alpha\pm\beta i$ su kompleksni korijeni od $Q(x)$.

(3) Ako se u faktorizaciji od $Q(x)$ pojavljuje faktor $(x-c)^m$, pridružujemo mu zbroj parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{(x-c)} + \frac{A_2}{(x-c)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-c)^m},$$

a ako se u njoj pojavljuje faktor $(x^2-px+q)^n$, koji ima kompleksne korijene, pridružujemo mu zbroj parcijalnih razlomaka:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2-px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2-px+q)^2} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2-px+q)^n}.$$

(4) Racionalna funkcija $P(x)/Q(x)$ jednaka je zbroju svih parcijalnih razlomaka iz točke (3) Koeficijente $A_i$, $B_j$ i $C_j$ određujemo tako da taj zbroj izjednačimo sa $P(x)/Q(x)$, te zatim same koeficijente odredimo uspoređivanjem lijeve i desne strane dobivene jednakosti ili pak uvrštavanjem pojedinih vrijednosti od $x$.

(5) Integriramo zbroj parcijalnih razlomaka iz točke (4) kao u 2. i 11. primjeru.

## PRIMJER 13.

Izračunajmo $\int \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^3 - x^2} \mathrm{d}x$.

## Rješenje:

(1)

$$\begin{array}{l} x^5 - x^4 + 1 \ : \ x^3 - x^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^3 - x^2} \\ \underline{-(x^5 - x^4)} \\ \quad 1 \end{array}$$

(2) $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

(3) Faktoru $x^2$ pridružujemo $\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}$, a faktoru $(x-1)$ pridružujemo $\frac{B_1}{x-1}$.

(4) Dakle,

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x-1}.$$

Množeći sa $x^2(x-1)$ nalazimo:

$$1 = A_1x(x-1) + A_2(x-1) + B_1x^2.$$

Za $x = 0$ imamo $1 = -A_2$, tj. $A_2 = -1$. Za $x = 1$ imamo $1 = B_1$. Koeficijent uz $x^2$ na lijevoj strani je 0, a na desnoj $A_1 + B_1$. Dakle, $A_1 + B_1 = 0$, tj. $A_1 = -B_1 = -1$.

(5) Iz 1. i 4. slijedi

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2(x-1)} \mathrm{d}x = \int \left( x^2 + \frac{1}{x^2(x-1)} \right) \mathrm{d}x = \int \left( x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C = \frac{x^4 + 3}{3x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

## PRIMJER 14

Izračunajmo $\int \frac{x^2}{(x^2 - 2)^2} \mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Brojnik je stupnja manjeg od stupnja nazivnika. Međutim, nazivnik nije do kraja faktoriziran, jer je

$$(x^2 - 2)^2 = ((x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}))^2 = (x + \sqrt{2})^2 (x - \sqrt{2})^2.$$

Dakle,

$$\frac{x}{(x^2-2)^2}=\frac{A_1}{x+\sqrt{2}}+\frac{A_2}{(x+\sqrt{2})^2}+\frac{B_1}{x-\sqrt{2}}+\frac{B_2}{(x-\sqrt{2})^2},$$

$$x^2=A_1(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})^2+A_2(x-\sqrt{2})^2+B_1(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})+B_2(x+\sqrt{2})^2.$$

Za $x=\sqrt{2}$ imamo $2=8B_2$, tj. $B_2=1/4$. Za $x=-\sqrt{2}$ imamo $2=8A_2$, tj. $A_2=1/4$.

Uspoređujući koeficijente uz $x^3$ i $x^2$ nalazimo:

$$A_1+B_1=0,\quad \sqrt{2}A_1+A_2-\sqrt{2}B_1+B_2=1.$$

Zbog $A_2=B_2=1/4$ slijedi

$$A_1+B_1=0,\qquad \sqrt{2}(A_1-B_1)=\frac{1}{2},$$

$$A_1=-B_1,\qquad 2\sqrt{2}A_1=\frac{1}{2},$$

$$A_1=\frac{1}{4\sqrt{2}},\qquad B_1=-\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Dakle,

$$\int\frac{x^2}{(x^2-2)^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x+\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+\sqrt{2})^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x-\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{2}\right|-\frac{1}{4}\frac{1}{x+\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-\sqrt{2}\right|-\frac{1}{4}\frac{1}{x-\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right|-\frac{x}{2(x^2-2)}+C.$$

## PRIMJER 15.

Izračunajmo $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{(x-1)(x^2+2x+2)^2}$.

## Rješenje:

Kvadratni faktor $x^2+2x+2$ ima kompleksne korijene pa se ne može dalje faktorizirati. Dakle,

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2x+2}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2x+2)^2},$$

$$x^3=A(x^2+2x+2)^2+(B_1x+C_1)(x-1)(x^2+2x+2)+(B_2x+C_2)(x-1).$$

Uspoređujući koeficijente uz iste potencije i (ili) uvrštavajući konkretne vrijednosti za $x$ našli bismo $A=\frac{1}{25}$, $B_1=-\frac{1}{25}$, $C_1=\frac{22}{25}$, $B_2=-\frac{30}{25}$ i $C_2=-\frac{40}{25}$ (provjerite). Dakle,

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{25}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{-x+22}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x + \int \frac{-30x-40}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x\right].$$

Izračunat ćemo svaki od tih integrala:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)} = \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{-x+22}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{-x-1+23}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x + 23\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + 23\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + 23\,\mathrm{arctg}(x+1) + C.$$

$$\int \frac{-30x-40}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{-15(2x+2)-10}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x = 15\int \frac{-(2x+2)\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} - 10\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} =$$

$$= \frac{15}{x^2+2x+2} - 10\int \frac{\mathrm{d}x}{\left[(x+1)^2+1\right]^2} = (\text{usp. primjer 11.b}) =$$

$$= \frac{15}{x^2+2x+2} - 10\left(\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x+1)\right) + C =$$

$$= \frac{15}{x^2+2x+2} - \frac{5(x+1)}{x^2+2x+2} - 5\,\mathrm{arctg}(x+1) + C.$$

Uvrstimo li te vrijednosti dolazimo do konačnog rezultata:

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{25}\left[\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + 18\,\mathrm{arctg}(x+1) + \frac{10-5x}{x^2+2x+2}\right] + C.$$

Integrali racionalnih funkcija koji u nazivniku sadrže samo jedan faktor oblika $(x-c)^n$ mogu se izračunati gore opisanim postupkom, ali ih je mnogo jednostavnije izračunati supstitucijom $u = x - c$. Evo jednog primjera koji to ilustrira.

## PRIMJER 16.

Izračunajmo $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4}\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} u = x-1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ x = u+1 \end{Bmatrix} = \int \frac{(u+1)^2+(u+1)+1}{u^4}\mathrm{d}u = \int \frac{u^2+3x+3}{u^4}\mathrm{d}u =$$

$$= \int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{3}{u^3}+\frac{3}{u^4}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{u}-\frac{3}{2u^2}-\frac{1}{u^3}+C = -\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}+C.$$

# 8.6 INTEGRALI KOJI SE SVODE NA INTEGRALE RACIONALNIH FUNKCIJA

Pogodnim supstitucijama mnogi se integrali svode na integrale racionalnih funkcija. Evo najprije par primjera u kojima podintegralna funkcija sadrži razlomljene potencije (tj. korijene).

## PRIMJER 1.

Izračunajmo $\int \frac{2x^7}{\sqrt[3]{x^2+4}}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Da bismo se riješili korijena supstituiramo $u = \sqrt[3]{x^2+4}$; $u^3 = x^2+4$, $3u^2\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ i $x^2 = u^3-4$:

$$\int \frac{2x^7}{\sqrt[3]{x^2+4}}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2)^3\,2x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+4}} = \frac{(u^3-4)^3\,3u^2\mathrm{d}u}{u} = \int 3u(u^3-4)^3\mathrm{d}u =$$

$$= 3\int (u^{10}-12u^7+48u^4-64u)\mathrm{d}u = 3\left(\frac{u^{11}}{11}-\frac{12u^8}{8}+\frac{48u^5}{5}-\frac{64u^2}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{3}{11}(x^2+4)^{11/3}-\frac{9}{2}(x^2+4)^{8/3}+\frac{144}{5}(x^2+4)^{5/3}-\frac{96}{11}(x^2+4)^{2/3}+C.$$

Slijedeći je primjer nešto složeniji.

## PRIMJER 2.

Izračunajmo $\int \frac{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}{2x+1}\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Uočimo najprije da je:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}{2x+1} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2x+1} = \frac{(x+1)^{2/3}}{2x+1}.$$

Da bismo se riješili razlomljenog eksponenta supstituiramo $u=(x+1)^{1/3}$:

$$\int \frac{(x+1)^{2/3}}{2x+1}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u=(x+1)^{1/3} & x=u^3-1 \\ u^2=(x+1)^{2/3} & \mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u \end{array}\right\} = \int \frac{u^2 3u^2\mathrm{d}u}{2(u^3-1)+1} = \frac{3}{2}\int \frac{u^4\mathrm{d}u}{u^3-1/2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u^4 : \left(u^3-1/2\right) = u + \dfrac{1}{2}\dfrac{u}{u^3-1/2} \\ \underline{-\left(u^4-u/2\right)} \\ \qquad u/2 \end{array} \right\} = \frac{3}{2}\int u\mathrm{d}u + \frac{3}{4}\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^3-1/2} = \frac{3}{4}u^2 + \frac{3}{4}\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^3-1/2}$$

Nazivnik posljednje podintegralne funkcije, $u^3-1/2$, ima korijen $1/\sqrt[3]{2}$, pa je jedan njegov faktor $u-1/\sqrt[3]{2}$, a drugi nalazimo dijeljenjem:

$$\begin{array}{l} \left(u^3-\dfrac{1}{2}\right):\left(u-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = u^2 + \dfrac{u}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ \underline{-\left(u^3-\dfrac{u^2}{\sqrt[3]{2}}\right)} \\ \qquad \dfrac{u^2}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1}{2} \\ \qquad \underline{-\left(\dfrac{u^2}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{u}{\sqrt[3]{4}}\right)} \\ \qquad\qquad \dfrac{u}{\sqrt[3]{4}}-\dfrac{1}{2} \\ \qquad\qquad \underline{-\left(\dfrac{u}{\sqrt[3]{4}}-\dfrac{1}{2}\right)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Dakle, $\left(u^3-\dfrac{1}{2}\right) = \left(u-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(u^2+\dfrac{u}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

Faktor $\left(u^2+\dfrac{u}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ ima kompleksne korijene, pa se ne može dalje faktorizirati. Dakle,

$$\frac{u}{u^3-1/2} = \frac{A}{u-1/\sqrt[3]{2}} + \frac{Bu+C}{u^2+u/\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}}.$$

Množenjem sa $u^3-1/2$ nalazimo:

$$u = A\left(u^2+\frac{u}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) + (Bu+C)\left(u-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Za $u=1/\sqrt[3]{2}$ imamo $1/\sqrt[3]{2} = 3A/\sqrt[3]{4}$, tj. $A=\sqrt[3]{2}/3$. Za $u=0$ imamo $0=1/6\sqrt[3]{2}-C/\sqrt[3]{2}$, tj. $C=1/3$. Uspoređujući koeficijente uz $u^2$ imamo $A+B=0$, tj. $B=-A=-\sqrt[3]{2}/3$. Dakle,

$$\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^3-1/2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1/\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\int \frac{u-1/\sqrt[3]{2}}{u^2+u/\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}}\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\ln\left|u-1/\sqrt[3]{2}\right| - \frac{\sqrt[3]{2}}{6}\int \frac{2u+1/\sqrt[3]{2}-3/\sqrt[3]{2}}{u^2+u/\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}}\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\ln\left|u-1/\sqrt[3]{2}\right| - \frac{\sqrt[3]{2}}{6}\int \frac{2u+1/\sqrt[3]{2}}{u^2+u/\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}}\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u/\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\ln\left|u-1/\sqrt[3]{2}\right| - \frac{\sqrt[3]{2}}{6}\ln\left|u^2+u/\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}\right| + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u+1/2\sqrt[3]{2})^2+3/4\sqrt[3]{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\ln\left|u-1/\sqrt[3]{2}\right| - \frac{\sqrt[3]{2}}{6}\ln\left|u^2+u/\sqrt[3]{2}+1/\sqrt[3]{4}\right| + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}u + C\,.$$

Uvrstimo li taj rezultat u početnu jednadžbu, konačno nalazimo:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2+2x+1}}{2x+1}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{x^2+2x+1}$$

$$+\frac{\sqrt[3]{2}}{4}\ln\left|\sqrt[6]{x^2+2x+1}-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right| - \frac{\sqrt[3]{2}}{8}\ln\left|\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\sqrt[6]{x^2+2x+1}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right| + C.$$

## PRIMJER 3.

Izračunajmo $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ .

## Rješenje:

Množenjem brojnika i nazivnika sa $\sqrt[3]{x+1}$ integral će se bitno pojednostaviti:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \left\{\begin{matrix} t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} & x+1=\dfrac{2t^3}{t^3-1} \\ x=\dfrac{t^3+1}{t^3-1} & \mathrm{d}x=-\dfrac{6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t \end{matrix}\right\} = -\int \frac{t6t^2(t^3-1)}{(t^3-1)^2 2t^3}\mathrm{d}t =$$

$$= -3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3-1} = (\text{usp. primjer 9. i 10. u 8.5}) = -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln\left|t^2+t+1\right| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}} + C.$$

Integral oblika

$$\int R(\sin\varphi, \cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\ ,$$

gdje je R racionalna funkcija od $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$, svodi se na integral racionalne funkcije supstitucijom

$$t=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\ .$$

Naime (usp. 2.3. primjer 3.), tada je

$$\sin\varphi=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\varphi=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}\varphi=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\ ,$$

pa je

$$\int R(\sin\varphi, \cos\varphi)\mathrm{d}\varphi=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}\ ,$$

što je integral racionalne funkcije.

## PRIMJER 4.

Izračunajmo $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{2+\cos\varphi}$.

## Rješenje:

Koristeći se supstitucijom $t=\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, iz koje slijedi $\sin\varphi=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ i $\mathrm{d}\varphi=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$, nalazimo:

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{2+\cos\varphi}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\frac{1}{2+(1-t^2)/(1+t^2)}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+(1-t^2)}=$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)+C\ .$$

## PRIMJER 5.

Izračunajmo $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi}$.

## Rješenje:

Iz $t=\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ slijedi $\mathrm{d}\varphi=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$ i $\cos\varphi=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Osim toga $t=0$ za $\varphi=0$ i $t=1/\sqrt{3}$ za $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Dakle,

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)(1-t)} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{1/\sqrt{3}} = \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Integral oblika $\int R(\sin\varphi,\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$ može se izračunati i slijedećim (jednostavnijim) supstitucijama:

$$t=\cos\varphi \quad \text{ako je} \quad R(-\sin\varphi,\cos\varphi) = -R(\sin\varphi,\cos\varphi),$$

$$t=\sin\varphi \quad \text{ako je} \quad R(\sin\varphi,-\cos\varphi) = -R(\sin\varphi,\cos\varphi),$$

$$t=\mathrm{tg}\,\varphi \quad \text{ako je} \quad R(-\sin\varphi,-\cos\varphi) = R(\sin\varphi,\cos\varphi).$$

Evo nekoliko primjera koji to ilustriraju.

## PRIMJER 6.

Izračunajmo $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{2\cos^2 x-1}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Budući da je

$$\frac{(-\sin x)+(-\sin x)^3}{2\cos^2 x-1} = -\left(\frac{\sin x+\sin^3 x}{2\cos^2 x-1}\right),$$

tj. $R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$, primijenit ćemo supstituciju $t=\ \cos x$:

$$\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{2\cos^2 x-1}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\sin^2 x}{2\cos^2 x-1}\sin x\mathrm{d}x = \int \frac{1+(1-\cos^2 x)}{2\cos^2 x-1}\sin x\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{Bmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\mathrm{d}x \end{Bmatrix} = \int \frac{1+(1-t^2)}{2t^2-1}(-\mathrm{d}t) = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1-3}{2t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-1} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1/2} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right| + C.$$

## PRIMJER 7.

Izračunajmo $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}\mathrm{d}x$ .

## Rješenje:

Budući da je

$$\frac{(-\cos x)^3}{\sin^2 x + \sin x} = -\left(\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x}\right),$$

tj. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, primijenit ćemo supstituciju $t = \sin x$:

$$\int \frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \sin x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \sin x} = \left\{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\mathrm{d}x \end{matrix}\right\} = \int \frac{(1-t^2)\mathrm{d}t}{t^2 + t} =$$

$$= \int \frac{(1-t)(1+t)}{t(1+t)}\mathrm{d}t = \int \frac{1-t}{t}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t} - 1\right)\mathrm{d}t = \ln|t| - t + C = \ln|\sin x| - \sin x + C.$$

## PRIMJER 8.

Izračunajmo $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

## Rješenje:

Budući da je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$:

$$\frac{1}{(-\sin x)^2 + 2(-\sin x)(-\cos x) - (-\cos x)^2} = \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x},$$

primijenit ćemo supstituciju $t = \operatorname{tg} x$, iz koje slijedi $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x/\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1} = \left\{\begin{matrix} t = \operatorname{tg} x \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\cos^2 x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2 - 2} = \left\{\begin{matrix} u = t+1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \end{matrix}\right\} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - 2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

## PRIMJER 9.

Izračunajmo $\int \operatorname{tg}^2 x\mathrm{d}x$.

## Rješenje:

Primijenit ćemo supstituciju $u = \operatorname{tg} x$ :

$$\int \operatorname{tg}^2 x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{matrix} u = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} u \end{matrix} \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \right\} = \int \frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u =$$

$$= \int \frac{1+u^2-1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u = u - \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{tg} x - x + C.$$