

9. PRIMJENE INTEGRALA

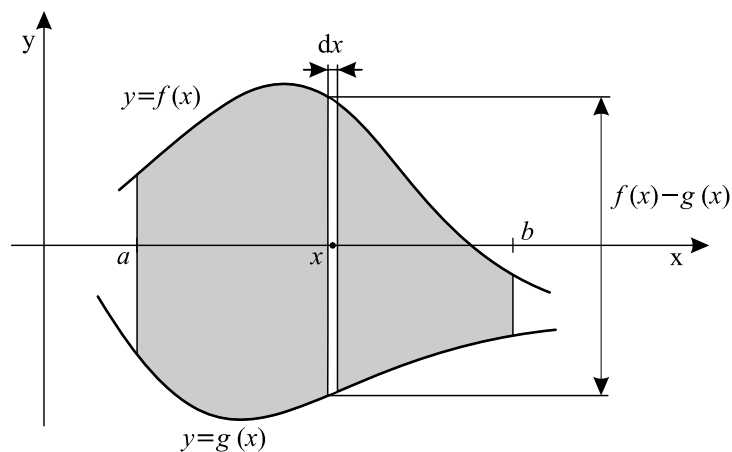
1. Površina
2. Volumen
3. Duljina luka
4. Površina plohe
5. Težište
6. Snaga, energija i rad

9.1 POVRŠINA

POVRŠINA U PRAVOKUTNIM KOORDINATAMA

Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$ i $f(x) \geq g(x)$, za $x \in [a, b]$, onda je površina područja koje se proteže između $y = f(x)$ i $y = g(x)$, od $x = a$ do $x = b$, jednaka integralu (usp. sl.1. i 4.5)

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Slika 1.

PRIMJER 1.

Izračunajmo površinu područja omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $y = -x$. U kojem omjeru os parabole dijeli tu površinu?

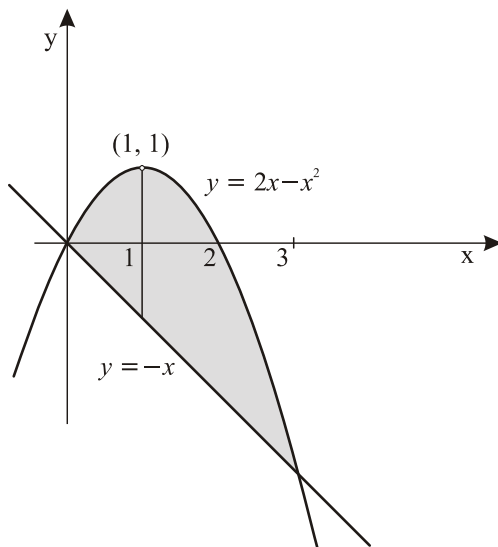
Rješenje:

Zbog negativnog koeficijenta uz x^2 , os parabole se proteže od njezinog tjemena na dolje (tj. u negativnom smjeru osi y). Svođenjem na puni kvadrat jednadžbu parabole možemo napisati u obliku $y - 1 = -(x - 1)^2$, što znači da joj je tjeme u točki $(1, 1)$. Apscise sjecišta zadane parabole $y = 2x - x^2$ i zadanog pravca $y = -x$ nalazimo iz jednadžbi

$$2x - x^2 = -x, \quad 3x - x^2 = x(3 - x) = 0, \quad x_{1,2} = 0, 3.$$

Dakle, zadano se područje proteže između $y = 2x - x^2$ i $y = -x$, od $x = 0$ do $x = 3$ (v. sl.2.), pa je njegova površina,

$$P = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$



Slika 2.

Os parabole, $x = 1$, dijeli površinu P na dvije površine P_1 i P_2 , koje se protežu od $x = 0$ do $x = 1$, te od $x = 1$ do $x = 3$ (v. sl.2) i iznose:

$$P_1 = \int_0^1 ((2x^2 - x^2) - (-x)) dx = \int_0^1 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6},$$

$$P_2 = \int_1^3 ((2x^2 - x^2) - (-x)) dx = \int_1^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{10}{3}.$$

Omjer tih površina je

$$P_1:P_2 = \frac{7}{6}:\frac{10}{3} = \frac{7}{20} = 7:20.$$

PRIMJER 2.

Izračunajmo površinu lika omeđenog kružnicom $x^2 + y^2 = 2$ i parabolom $y = x^2$ (unutar parabole).

Rješenje:

Sjecišta zadanih krivulja nalazimo rješavanjem sustava $x^2 + y^2 = 2$, $y = x^2$. Dakle,

$$y^2 + y = 2, \quad y^2 + y - 2 = 0, \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2, 1.$$

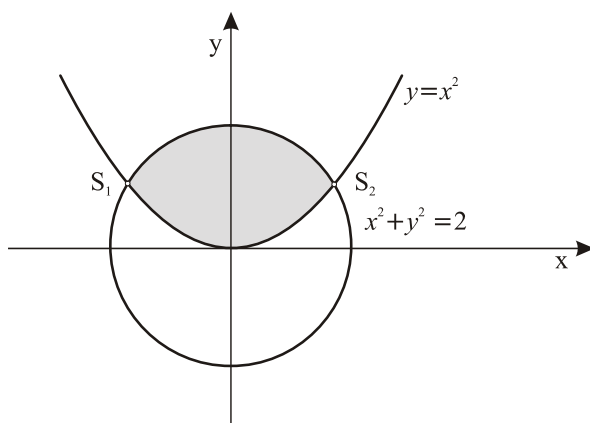
Oдавде, zbog $x = \pm\sqrt{y}$, slijedi,

$$x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i \quad \text{i} \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

Nas zanimaju samo realna sjecišta. To su $S_1(-1, 1)$ i $S_2(1, 1)$, što znači da se naše područje proteže od $x = -1$ do $x = 1$, između gornje polukružnice $y = \sqrt{2-x^2}$ i parabole $y = x^2$ (v. sl.3.)

Njegova je površina:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{2-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \arcsin \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Slika 3.

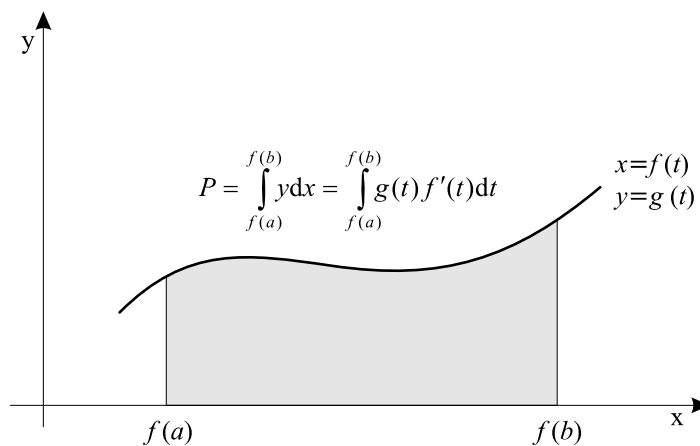
POVRŠINA U PRAVOKUTNIM KOORDINATAMA
ZADANA PARAMETARSKI

Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$ i ako je krivulja zadana parametarski (usp. 2.3) s jednažbama $x = f(t)$, $y = g(t)$, za $t \in [a, b]$, onda je površina područja koje se proteže između te krivulje i osi x , od $x = f(a)$ do $x = f(b)$, (v. sl.4.) jednaka integralu:

$$P = \int_a^b g(t) f'(t) dt.$$

Naime, supstitucijom nalazimo:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} y dx = \begin{cases} y = g(t) \\ x = f(t) \\ dx = f'(t) dt \end{cases} = \int_a^b g(t) f'(t) dt.$$



Slika 4.

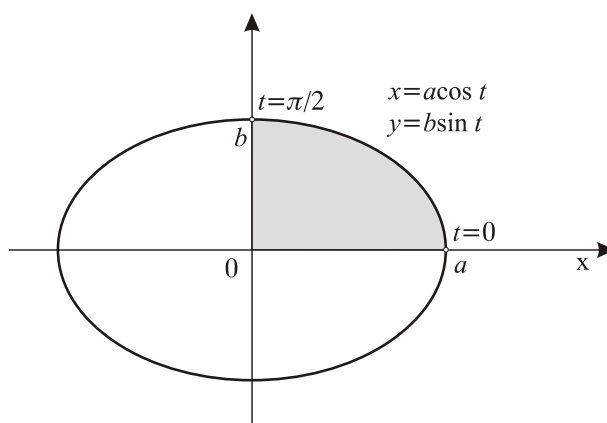
PRIMJER 3.

Izračunajmo površinu omeđenu elipsom $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Rješenje:

Četvrtina zadanog područja proteže se između elipse i osi x , od $x = 0$ do $x = a$ (v. sl. 5.), pa je tražena površina

$$\begin{aligned} 4 \int_0^a y dx &= 4 \int_{\pi/2}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2ab \frac{\pi}{2} = ab\pi. \end{aligned}$$



Slika 5.

PRIMJER 4.

Izračunajmo površinu omeđenu astroidom $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Rješenje:

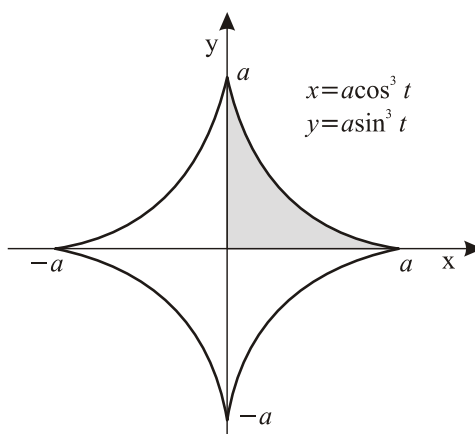
Iz $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ slijedi $(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = (a^{1/3})^2$, što znači da vrijednosti $(x^{1/3}, y^{1/3})$ leže na kružnici radijusa $a^{1/3}$, pa se mogu prikazati parametarski sa:

$$x^{1/3} = a^{1/3} \cos t, \quad y^{1/3} = a^{1/3} \sin t,$$

to jest sa:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Kada se t mijenja od 0 do 2π točka (x, y) opisuje astroidu na sl.6.



Slika 6.

Lako se provjerava da je astroida simetrična s obzirom na os x i os y , pa je dovoljno izračunati

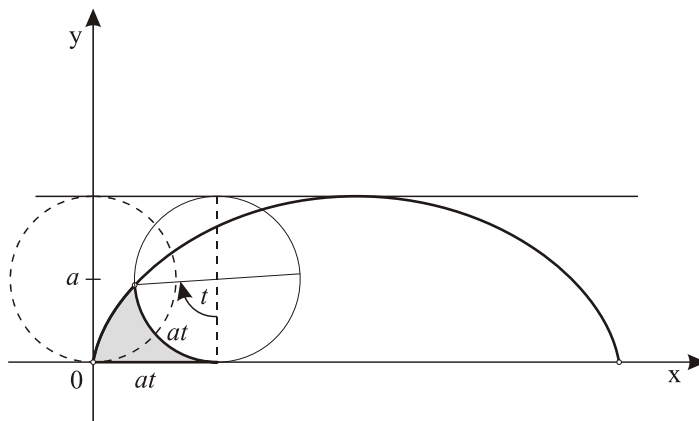
četvrtinu zadane površine. Ona se proteže između osi x i astroide, od $x=0$ ($t = \frac{\pi}{2}$) do $x=a$ ($t=0$):

$$P = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\pi/2}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt =$$

$$= (\text{v. 8.4 primjer 2}) = \frac{12a^2}{16} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{3} \sin^3 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2 \pi}{8}.$$

PRIMJER 5.

Izračunajmo površinu omeđenu prvim svodom cikloide i osi x , gdje je cikloida putanja koju opisuje rubna točka kruga radijusa a , kada se on kotrlja po osi x (v. sl.7.).



Slika 7.

Rješenje:

Iz sl. 7 lako nalazimo parametarske jednadžbe cikloide

$$x = at - a \sin t, \quad y = a - a \cos t, \quad \text{tj. } x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Prvi svod cikloide dobija se za $t \in [0, 2\pi]$, tj. za jedan puni okret kruga koji se kotrlja po osi x . Dakle, tražena površina je

$$P = \int_0^{2a\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 \left(t - 2 \sin t + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = 3a^2 \pi.$$

Površinu ispod svoda cikloide jednaka je trostrukoj površini kruga koji generira tu cikloidu.

POVRŠINA U POLARNIM KOORDINATAMA

Ako je funkcija f integrabilna na $[\alpha, \beta]$ i ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama (usp. 5.6) sa $r = h(\varphi)$, za $\varphi \in [\alpha, \beta]$, onda je površina područja koje se proteže od pola do zadane krivulje, između $\varphi = \alpha$, i $\varphi = \beta$ (v. sl. 8), jednaka integralu:

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (h(\varphi))^2 d\varphi.$$

Ako su funkcije f i g integrabilne na $[\alpha, \beta]$ i $f(\varphi) \leq g(\varphi)$ za $\varphi \in [\alpha, \beta]$, onda je površina područja koje se u polarnom sustavu proteže od $r = f(\varphi)$ do $r = g(\varphi)$, između $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ (v. sl.9.), jednaka integralu:

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} ([g(\varphi)]^2 - [f(\varphi)]^2) d\varphi.$$

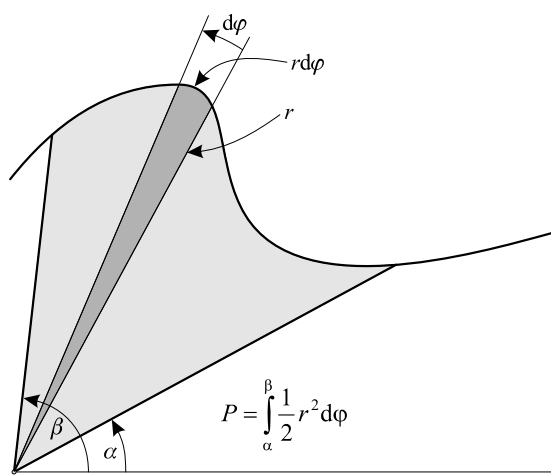
Naime, područje na sl.8. sastavljeno je od infinitezimalnih (beskonačno malih) kružnih isječaka s radijusom $r = h(\varphi)$ i lukom $r d\varphi = h(\varphi) d\varphi$, čija je površina $\frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} [h(\varphi)]^2 d\varphi$, pa je ukupna površina područja jednaka kontinuiranoj sumi svih tih isječaka, tj. integralu

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [h(\varphi)]^2 d\varphi.$$

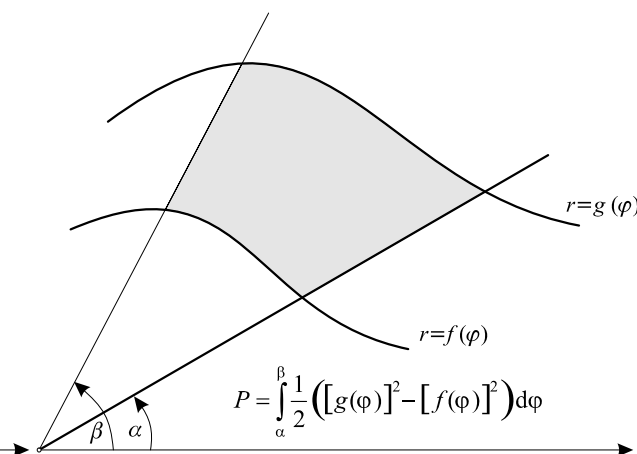
Površina područja na sl.9. jednaka je razlici dvaju područja upravo razmotrene vrste, pa odatle i slijedi odgovarajuća formula:

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [g(\varphi)]^2 d\varphi - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\varphi)]^2 d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} ([g(\varphi)]^2 - [f(\varphi)]^2) d\varphi.$$

Strogi dokaz ovih rezultata koji se ne poziva na infinitezimalne kružne isječke i kontinuirane sume, zainteresiranom čitatelju nudimo na kraju ovog odjeljka.



Slika 8.



Slika 9.

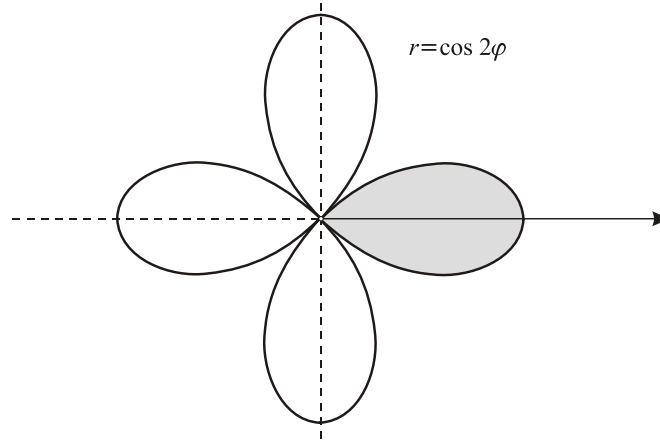
PRIMJER 6.

Izračunajmo površinu jedne od latica što ih omeđuje krivulja $r = \cos 2\varphi$.

Rješenje:

Zadana krivulja izgleda kao na sl. 10. a jedna njezina latica dobije se za φ od $-\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{4}$ (usp. 5.6 primjer 4.). Dakle, tražena površina je:

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\varphi d\varphi = \left\{ \begin{array}{l} u = 2\varphi \\ du = 2d\varphi \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{8} \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$



Slika 10.

PRIMJER 7.

Izračunajmo površinu lika omeđenoga kardioidom $r = a(1 + \cos \varphi)$.

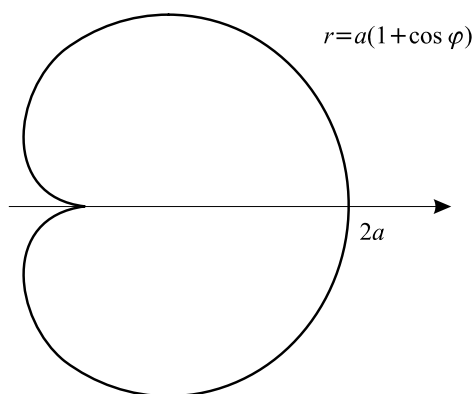
Rješenje:

Kardioida je simetrična s obzirom na polarnu os, jer je $r(-\varphi) = r(\varphi)$ (usp. 5.6). Kada φ raste od 0 do π , r pada od $2a$ do 0 preko slijedećih vrijednosti:

φ	0	$\pi/2$	π
r	$2a$	a	0

Dakle, kardioida izgleda kao na sl. 11. Ona omeđuje površinu:

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} d\varphi + a^2 \int_0^{\pi} 2 \cos \varphi d\varphi + a^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= a^2 \varphi \Big|_0^{\pi} + 2a^2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = a^2 \pi + a^2 \frac{\pi}{2} = \frac{3a^2 \pi}{2}. \end{aligned}$$



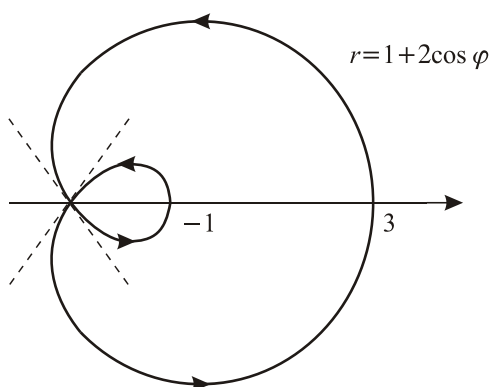
Slika 11.

PRIMJER 8.

Izračunajmo površinu lika koji je omeđen krivuljom $r = 1 + 2\cos \varphi$, (a) za $r \geq 0$ i (b) za $r \leq 0$.

Rješenje:

Graf funkcije $r = 1 + 2\cos \varphi$ izgleda kao na sl.12., pri čemu vanjski dio krivulje ima vrijednosti $r \geq 0$, za $\varphi \in [-5\pi/6, 5\pi/6]$, dok unutarnji dio krivulje ima vrijednosti $r \leq 0$, za $\varphi \in [5\pi/6, 7\pi/6]$; usp. 5.6. primjer 8.



Slika 12.

- (a) Površina P^+ omeđena vanjskim dijelom krivulje ($r \geq 0$) jednaka je, zbog simetrije s obzirom na polarnu os, dvostrukoj vrijednosti integrala od 0 do $5\pi/6$:

$$\begin{aligned} P^+ &= 2 \int_0^{5\pi/6} \frac{1}{2} (1 + 2\cos \varphi)^2 d\varphi = \int_0^{5\pi/6} (1 + 4\cos \varphi + 4\cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= (\varphi + 4\sin \varphi + (2\varphi + \sin 2\varphi)) \Big|_0^{5\pi/6} = \frac{5\pi}{6} + 2 + \frac{10\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(5\pi + 4 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

- (b) Površina P^- omeđena unutarnjim dijelom krivulje ($r \leq 0$) jednaka je, zbog simetrije s obzirom na polarnu os, dvostrukoj vrijednosti integrala od $5\pi/6$ do π :

$$P^- = 2 \int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + 2 \cos \varphi)^2 d\varphi = (\varphi + 4 \sin \varphi + 2\varphi + \sin 2\varphi) \Big|_{5\pi/6}^{\pi} =$$

$$= 3\pi - \left(\frac{5\pi}{6} + 2 + \frac{10\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\pi - 4 + \sqrt{3}).$$

PRIMJER 9.

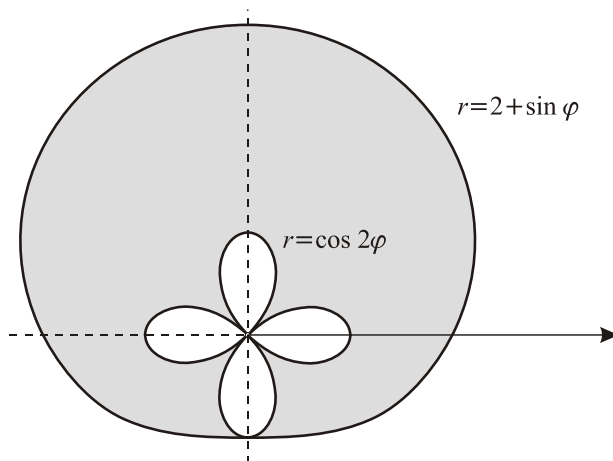
Izračunajmo površinu područja koje se nalazi između krivulja $r = \cos 2\varphi$ i $r = 2 + \sin \varphi$.

Rješenje:

Krivulja $r = \cos 2\varphi$ i $r = 2 + \sin \varphi$ skicirane su na sl. 13. Površina zatamnjenog područja koje se nalazi između tih krivulja iznosi:

$$P = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} ((2 + \sin \varphi)^2 - (\cos 2\varphi)^2) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 + 4 \sin \varphi + \sin^2 \varphi - \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(4\varphi - 4 \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) - \frac{1}{4} \left(2\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$



Slika 13.

Za zainteresiranog čitatelja, na kraju ovog odjeljka, formulu za izračunavanje površine u polarnim koordinatama dokazujemo bez poziva na infinitezimalne (beskonačno male) kružne isječke i njihove kontinuirane sume.

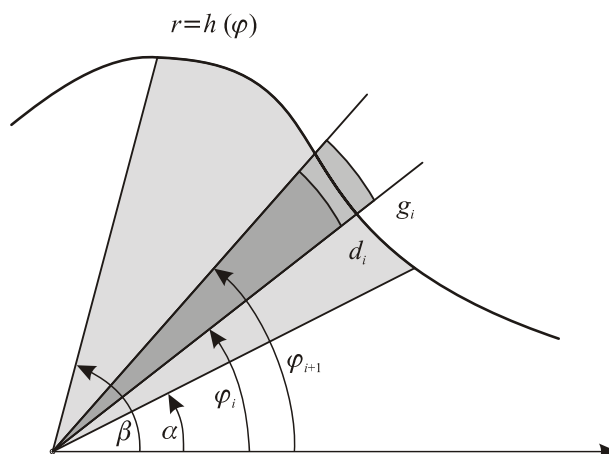
Razmotrimo, dakle, područje koje se proteže od pola do krivulje zadane s $r = h(\varphi)$, između $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ (v. sl.14.), gdje je funkcija h integrabilna na $[\alpha, \beta]$. Ako je $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$ particija intervala $[\alpha, \beta]$ za koju je $d_i \leq h(\varphi)$ i $g_i \geq h(\varphi)$, za $\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, onda je $D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} d_i^2 \Delta\varphi_i$ donja, a

$G = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} g_i^2 \Delta\varphi_i$ gornja aproksimacija zadane površine. Naime, $\frac{1}{2} d_i^2 \Delta\varphi_i$ je površina i -tog kružnog

isječka sadržanog u i -tom dijelu zadane površine (jače zatamnjeno na sl. 14.), dok je $\frac{1}{2}g_i^2 \Delta\varphi_i$ površina i -tog kružnog isječka koji sadrži i -ti dio zadane površine (jače i slabije zatamnjeno na sl. 14.). Zato je zadana površina veća od svih takvih donjih, a manja od svih takvih gornjih aproksimacija. S druge strane te su aproksimacije donje i gornje sume za funkciju $\frac{1}{2}[h(\varphi)]^2$, pa je jedina vrijednost, koja se nalazi između svih donjih i svih gornjih suma, integral te funkcije. Dakle, iznos zadane površine P je

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\varphi)]^2 d\varphi,$$

što smo i trebali dokazati.



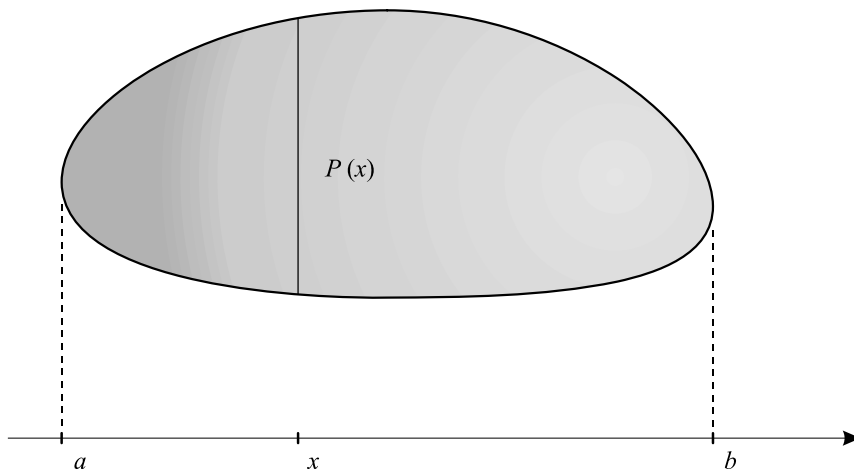
Slika 14.

9.2 VOLUMEN

Površina lika koji se proteže od $x = a$ do $x = b$ i koji ima presjek poznate duljine $p(x)$ (v. sl.1.), jednaka je integralu:

$$P = \int_a^b p(x) dx .$$

To slijedi iz osnovne formule prethodnoga odjeljka, $P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$, budući da je $f(x) - g(x) = p(x)$.



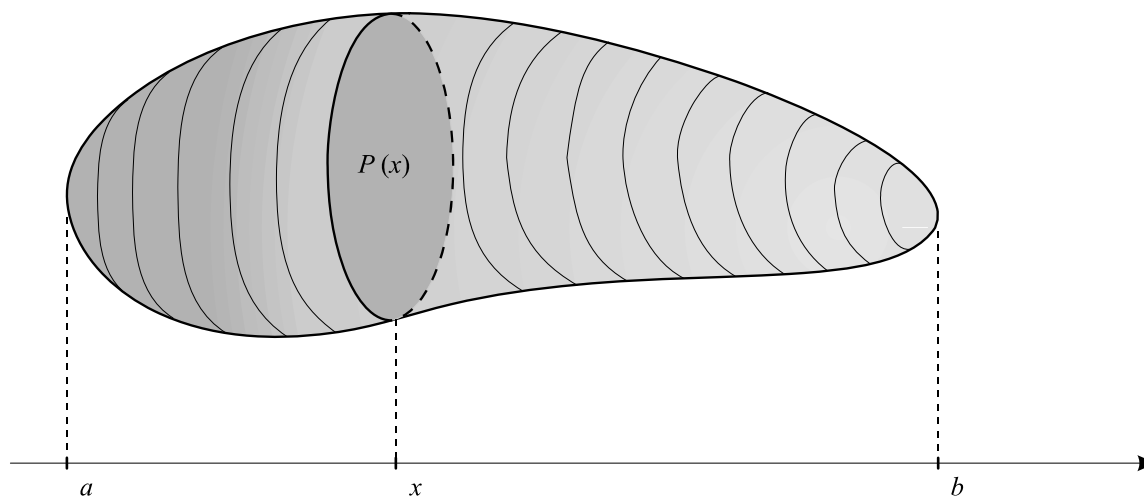
Slika 1.

Na potpuno isti način računamo volumen tijela s presjekom poznate površine:

VOLUMEN TIJELA POZNATOG PRESJEKA METODA ODREZAKA

Ako se tijelo proteže duž osi x , od $x = a$ do $x = b$ (v. sl.2.), i ako na razini x ima presjek poznate površine $P(x)$, te ako je funkcija $P(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, onda je njegov volumen jednak integralu:

$$V = \int_a^b P(x) dx .$$



Slika 2.

To ćemo strogo dokazati na kraju odjeljka.

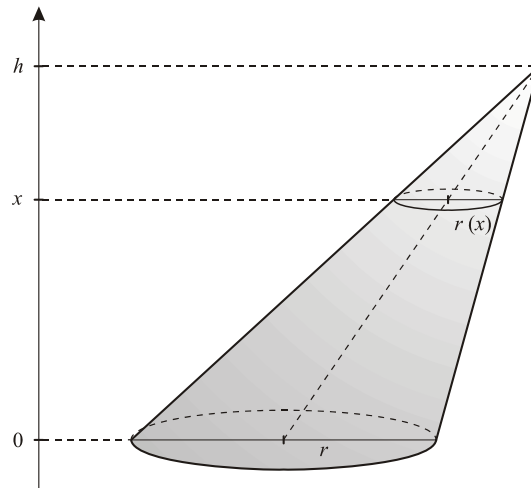
PRIMJER 1.

Izračunajmo volumen kosoga kružnog stošca čija baza ima radijus r i čija je visina h .

Rješenje:

Stožac se proteže od razine $x = 0$ do razine $x = h$. Presjek stošca na razini x ima radijus $r(x) = (h - x)r/h$, jer iz sličnosti trokuta na sl.3. Slijedi $r(x)/r = (h - x)/h$. To znači da je odgovarajuća površina presjeka $P(x) = r^2(x)\pi = [(h - x)r/h]^2\pi$, pa je traženi volumen:

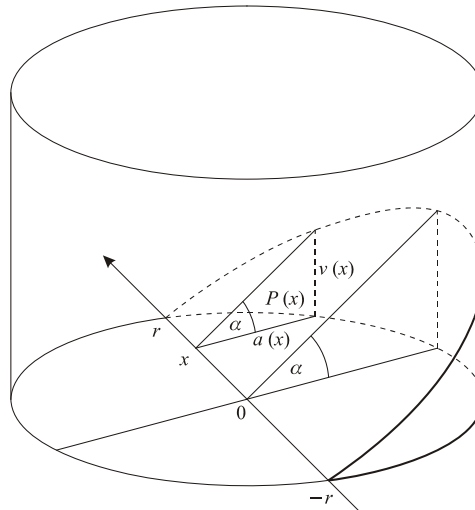
$$\begin{aligned} V &= \int_0^h P(x) dx = \int_0^h \frac{(h-x)^2}{h^2} r^2 \pi dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hx + x^2) dx = \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(h^2 x - hx^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^h = \frac{1}{3} r^2 \pi h. \end{aligned}$$



Slika 3.

PRIMJER 2.

Izračunajmo volumen klina na sl. 4. koji je pod kutom α isječen iz valjka radijusa r .



Slika 4.

Rješenje:

Klin se proteže od $x = -r$ do $x = r$. Površina njegovog presjeka na razini x je $P(x) = \frac{1}{2} a(x) \cdot v(x)$,

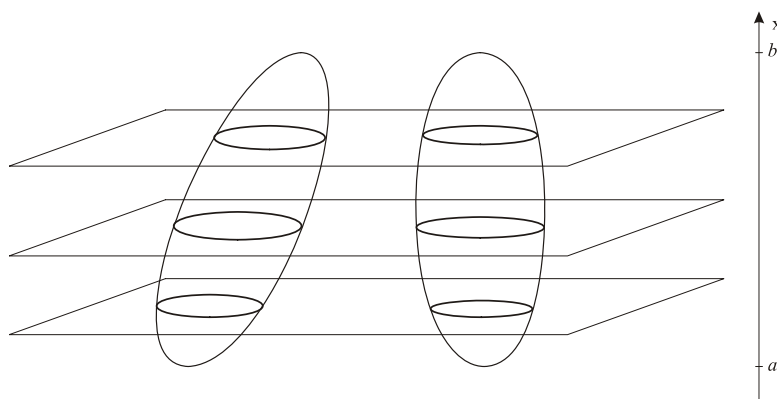
gdje je $a(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ i $v(x) = a(x) \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{r^2 - x^2} \operatorname{tg} \alpha$, pa je $P(x) = \frac{1}{2} (r^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha$. Dakle,

traženi je volumen:

$$V = \int_{-r}^r P(x) dx = \int_{-r}^r \frac{1}{2} (r^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{2}{3} r^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

CAVALIERIJEVA METODA

Ako su dva tijela presiječena familijom paralelnih ravnina tako da su im odgovarajući presjeci uvijek jednakih površina, onda su volumeni tih tijela jednaki (v. sl.5.)



Slika 5.

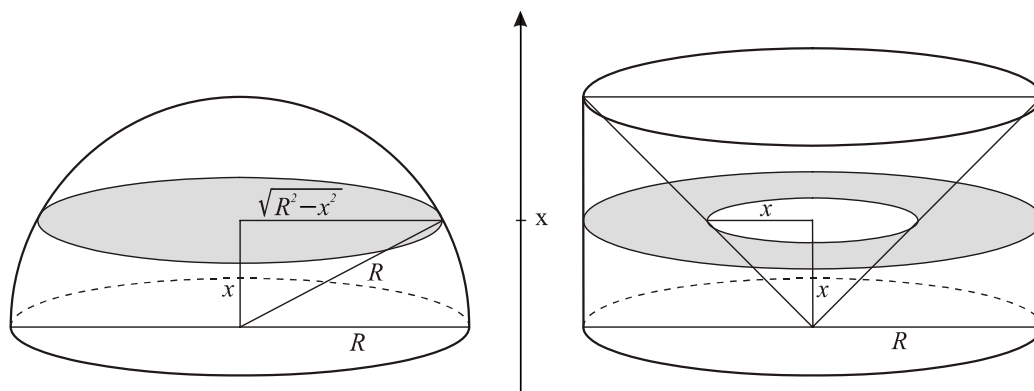
Naime, ako os x postavimo okomito na tu familiju paralelnih ravnina, te ako se tijela protežu od $x = a$ do $x = b$, te na svakoj razini x imaju presjek površine $P(x)$, onda po metodi odrezaka slijedi da oba tijela imaju volumen $\int_a^b P(x)dx$.

PRIMJER 3.

Koristeći se Cavalierijevom metodom izračunajmo volumen kugle radijusa R .

Rješenje:

Razmotrimo, na sl. 6., pola kugle radijusa R i valjak istoga radijusa R i visine R , iz kojeg je odstranjen stožac istog radijusa i visine.



Slika 6.

Presječemo li oba tijela, sa sl. 6., ravninom paralelnom s njihovim bazama, na visini x , dobit ćemo presjeke jednakih površina:

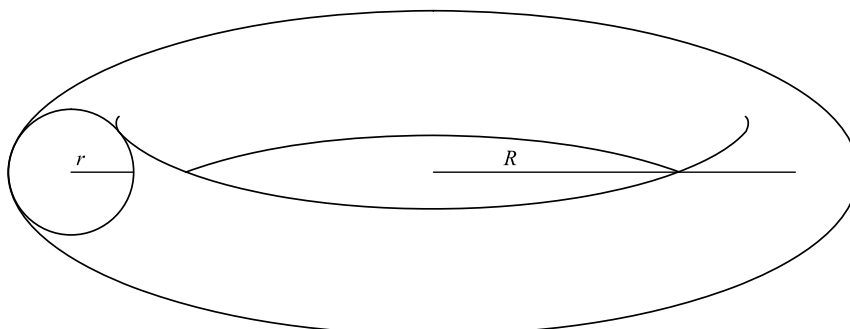
$$\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \pi = R^2 \pi - x^2 \pi .$$

Po Cavalierijevoj metodi slijedi da je pola volumena kugle jednako volumenu valjka umanjenom za volumen stošca:

$$\frac{1}{2}V = R^2 \pi R - \frac{1}{3}R^2 \pi R , \quad \text{tj.} \quad V = \frac{4}{3}R^3 \pi$$

PRIMJER 4.

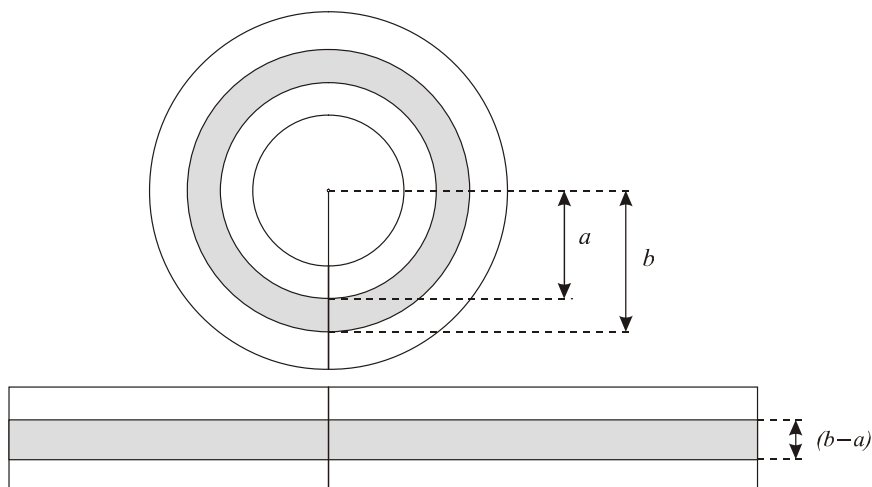
Koristeći se Cavalierijevom metodom izračunamo volumen torusa (npr. zračnice), kojem je R veliki radijus, dok mu je r mali radijus presječnoga kruga; v. sl.7.



Slika 7.

Rješenje:

Na ravnini na kojoj leži torus položimo, duž njegove izvodnice, valjak radijusa r i visine $2R\pi$; (v. sl.8.). Oba tijela presijecimo familijom ravnina paralelnih s ravninom na koju su tijela položena. Ako ravnina te familije presjeca torus u kružnome vijencu nutarnjega radijusa a i vanjskog radijusa b , onda ona valjak presjeca u pravokutniku duljine $2R\pi$ i širine $b - a$ (usp. sl. 8.). Naime, ta ravnina presjeca izvodne krugova torusa i valjka (koji se vide kao debele linije na sl.8.) na istoj visini, koja određuje iste a i b .



Slika 8.

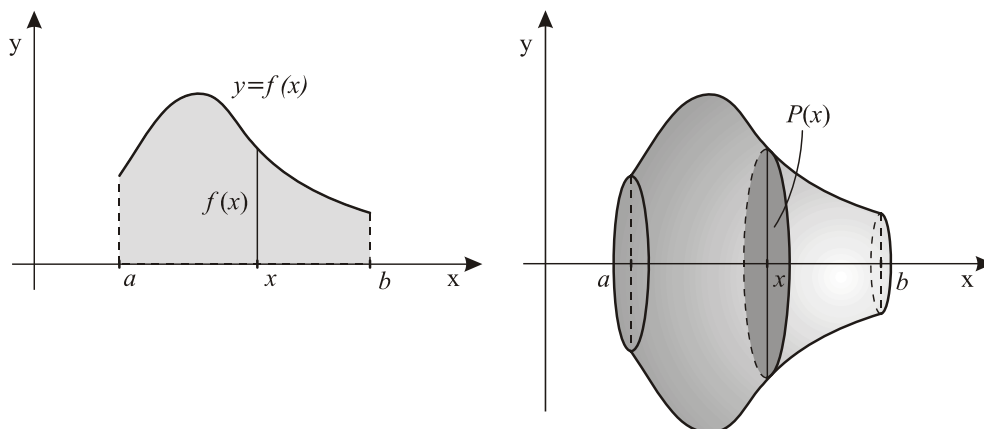
Površine tih presjeka su jednake:

$$b^2\pi - a^2\pi = 2R\pi(b - a),$$

jer je R (zbog simetrije) srednja vrijednost između a i b , tj. $R = \frac{1}{2}(a + b)$. Po Cavalierijevoj metodi slijedi da je volumen torusa jednak volumenu valjka, tj.

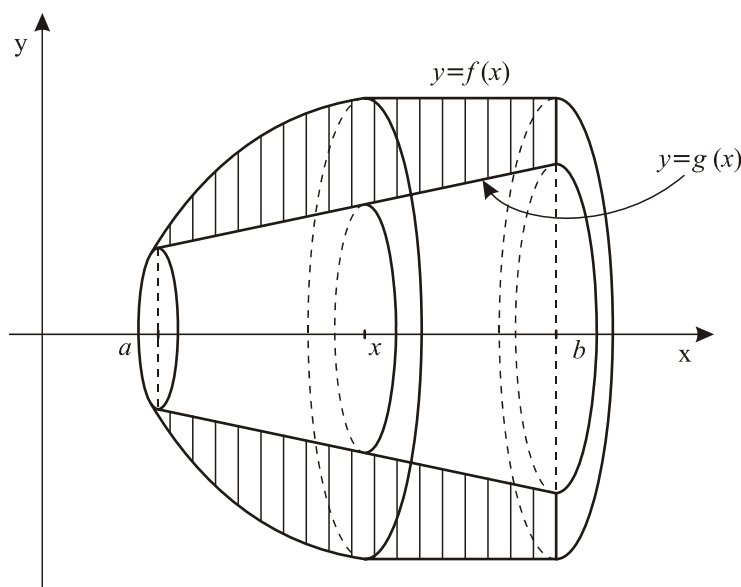
$$V = r^2\pi 2R\pi.$$

Volumene rotacijskih tijela često možemo lako izračunati, jer je njihov presjek na svakoj razini krug, čija nam je površina dobro poznata. Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi x , onoga lika koji se proteže između intervala $[a, b]$ na osi x i grafa $y=f(x)$, onda je presjek toga rotacijskog tijela, na razini x , krug s radijusom $f(x)$ i površinom $[f(x)]^2\pi$, usp. sl. 9. Dakle, volumen toga rotacijskog tijela je $\int_a^b [f(x)]^2 dx$ (uz pretpostavljenu integrabilnost funkcije f , dakle i f^2 , na $[a, b]$).



Slika 9.

Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi x , onoga lika (usp. sl. 10.) koji se od $x=a$ do $x=b$ proteže između $y=f(x)$ i $y=g(x)$, uz $f(x)\geq g(x)$, onda je njegov volumen jednak razlici dvaju volumena prethodnoga tipa, $\int_a^b [f(x)]^2 \pi dx - \int_a^b [g(x)]^2 \pi dx$, tj. jednak je integralu $\int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$ (uz pretpostavljenu integrabilnost funkcija f i g , dakle i f^2, g^2 , na $[a, b]$).



Slika 10.

**VOLUMEN ROTACIJSKOG TIJELA
(METODA DISKOVA)**

Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi x , onoga lika koji se proteže između intervala $[a, b]$ na osi x i grafa integrabilne funkcije $y = f(x)$, onda je njegov volumen (v. sl. 9.)

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi x , onoga lika koji se proteže nad intervalom $[a, b]$ između grafova integrabilnih funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gdje je $f(x) \geq g(x)$, onda je njegov volumen (v. sl. 10.):

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

PRIMJER 5.

Kugla radijusa r presječena je na tri dijela paralelnim ravninama koje su od njezinog središta udaljenje za $r/3$. Izračunajmo volumen svakog od dijelova i volumen cijele kugle.

Rješenje:

Kugla radijusa r nastaje rotacijom oko osi x , onoga lika koji se proteže od intervala $[-r, r]$ na osi x do grafa $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (usp. sl. 11.). Zato cijela kugla ima volumen:

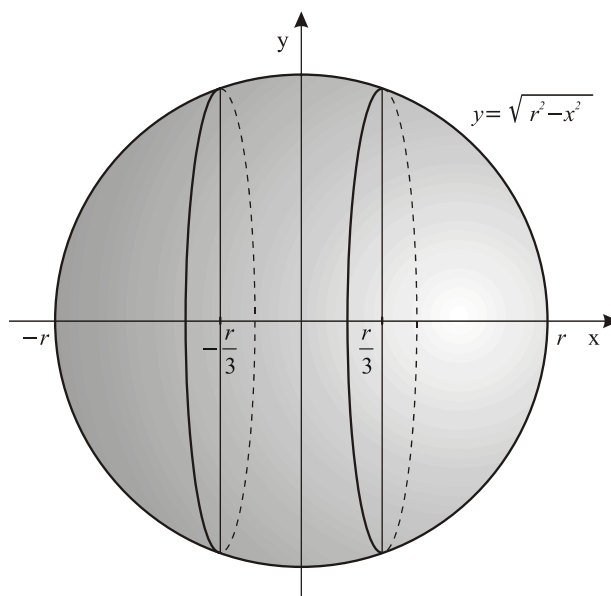
$$V = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Njezin središnji dio ima volumen (v. sl. 11.):

$$V = \pi \int_{-r/3}^{r/3} y^2 dx = \pi \int_{-r/3}^{r/3} (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r/3}^{r/3} = \frac{52}{81} r^3 \pi.$$

Slijedi da je volumen rubnih dijelova kugle (v. sl.11.):

$$V_r = \frac{1}{2}(V - V_s) = \frac{1}{2} \left(\frac{108}{81} - \frac{52}{81} \right) r^3 \pi = \frac{28}{81} r^3 \pi.$$



Slika 11.

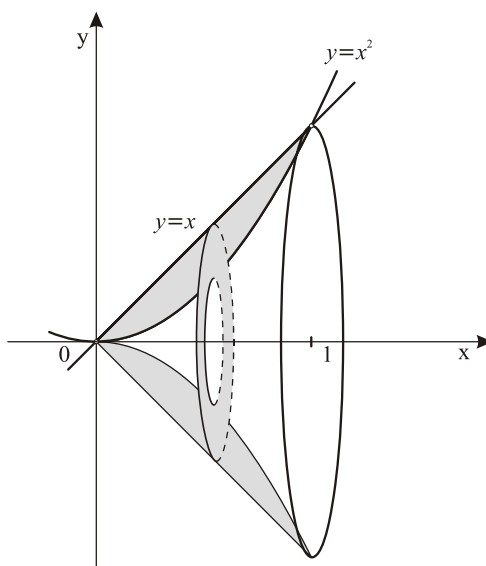
PRIMJER 6.

Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x , lika omeđenog s $y = x^3$ i $y = x$ (u prvom kvadrantu).

Rješenje:

Grafovi $y = x$ i $y = x^3$ (v. sl.12.) sijeku se, u prvom kvadrantu, u točkama s apscisama $x = 0$ i $x = 1$ (jer sustav $x = x^3$ ima rješenja $x = -1, 0, 1$ od kojih $x = 0, 1$ daju točke u prvom kvadrantu). Zato je traženi volumen:

$$V = \pi \int_0^1 ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^6) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{21}.$$



Slika 12.

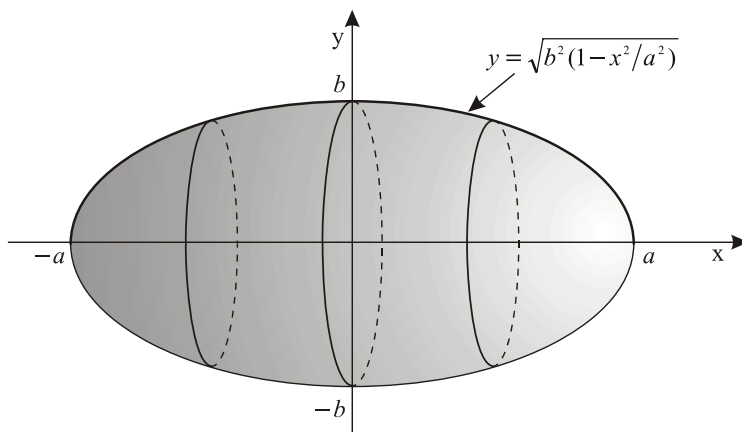
PRIMJER 7.

Izračunajmo volumen rotacijskog elipsoida koji nastaje rotacijom lika (v. sl.13. i 14.) omeđenog elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a) oko osi x , (b) oko osi y .

Rješenje:

(a) Rotacijski elipsoid nastaje rotacijom oko osi x onoga lika koji se, od $x = -a$ do $x = a$, proteže između osi x i grafa $y = \sqrt{b^2(1 - x^2/a^2)}$. Zato je njegov volumen:

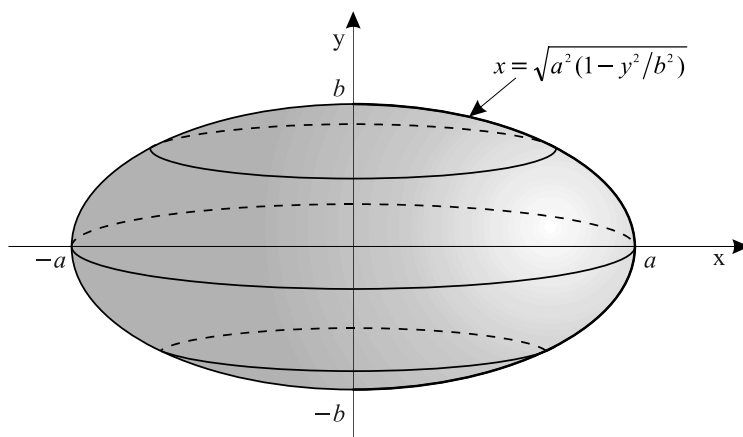
$$V_x = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = b^2 \pi \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$



Slika 13.

(b) Rotacijski elipsoid nastaje rotacijom oko osi y lika koji se, od $y = -b$ do $y = b$, proteže između osi y i grafa $x = \sqrt{a^2(1 - y^2/b^2)}$. Budući da su x i y sada zamijenili uloge njegov je volumen:

$$V_y = \pi \int_{-b}^b x^2 dy = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = a^2 \pi \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Big|_{-b}^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$



Slika 14.

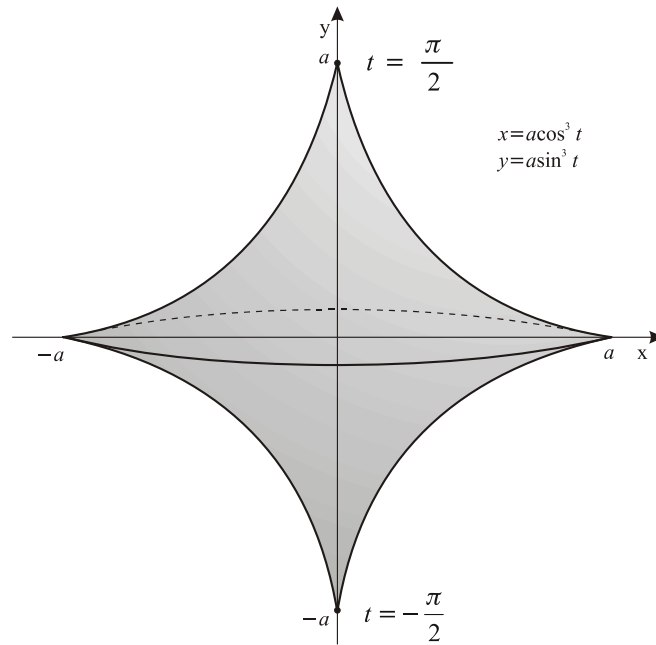
PRIMJER 8.

Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi y , lika omeđenog astroidom koja je parametarski zadana sa $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (usp. 9.1 primjer 4.).

Rješenje:

Kada se t mijenja od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ točka (x, y) opisuje desnu polovicu astroide na sl.15. Zadani volumen nastaje rotacijom oko osi y , lika koji se od $y = -a$ do $y = a$ proteže između osi y i desne polovice astroide. Budući da su x i y sada zamijenili uloge zadani je volumen:

$$\begin{aligned}
 V_y &= \pi \int_{-a}^a x^2 dy = \left\{ \begin{array}{l} x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \\ dy = 3a \sin^2 t \cos t dt \end{array} \right\} = 3\pi a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 t \sin^2 t \cos t dt = \\
 &= 3\pi a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^3 \sin^2 t \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t dt \end{array} \right\} = 3\pi a^3 \int_{-1}^1 (1 - u^2)^3 u^2 du = \\
 &= 3\pi a^3 \int_{-1}^1 (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) du = 3\pi a^3 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^7}{7} - \frac{u^9}{9} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{32\pi a^3}{105}.
 \end{aligned}$$



Slika 15.

PRIMJER 9.

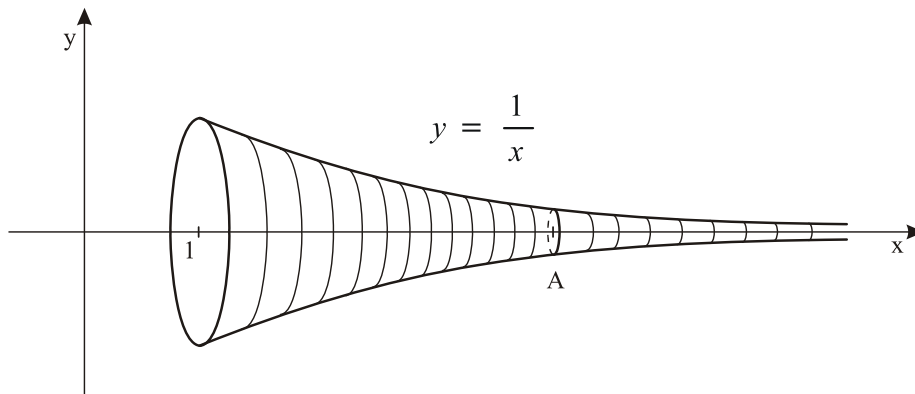
Izračunajmo volumen “tuljka” koji nastaje rotacijom oko osi x , lika koji se proteže od $x = 1$ do $x = A$ između osi x i hiperbole $y = \frac{1}{x}$. Što se zbiva s volumenom kada $A \rightarrow \infty$, tj. kada se “tuljak” proteže u beskonačnost?

Rješenje:

Volumen zadanog “tuljka” iznosi (v. sl.16.):

$$V = \pi \int_1^A y^2 dx = \pi \int_1^A \frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{x} \Big|_1^A = \pi - \frac{\pi}{A}.$$

Ako $A \rightarrow \infty$ onda $V \rightarrow \pi$. To znači da je volumen beskonačno protegnutog “tuljka” na sl. 16. konačan.

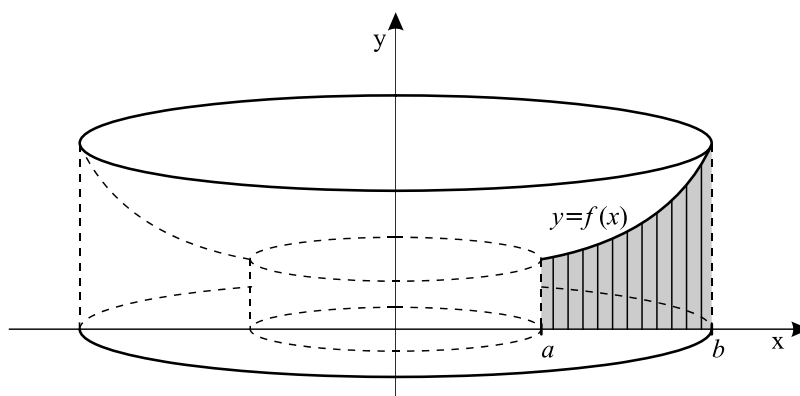


Slika 16.

Primijetimo da presjek beskonačno protegnutog “tuljka” s ravninom xy nema beskonačnu površinu (usp. 7.2 primjer 8.) iako sam “tuljak” ima beskonačni volumen.

Volumene rotacijskih tijela možemo izračunavati i tzv. metodom ljustaka. Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi y , onoga lika koji se proteže od $x=a$ do $x=b$ između osi x i grafa integrabilne funkcije $y=f(x)$, onda se ono sastoji od infinitezimalnih (beskonačno tankih) kružnih ljustaka debljine dx , visine $f(x)$ i duljine $2x\pi$,

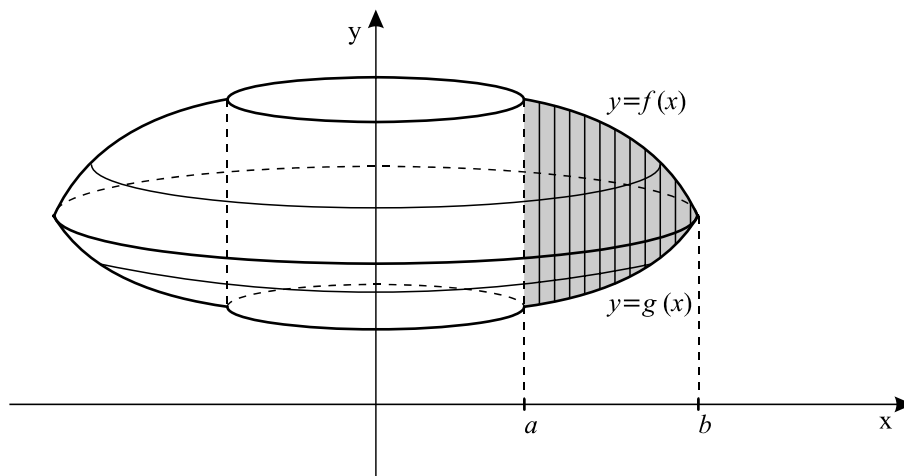
čiji je volumen $2\pi xf(x)dx$. Kontinuirana suma svih ljustaka od $x=a$ do $x=b$, dakle $\int_a^b 2\pi xf(x)dx$, jednaka je volumenu tog rotacijskog tijela (usp. sl. 17.)



Slika 17.

Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi y , onoga lika koji se proteže od $x=a$ do $x=b$ između grafova integrabilnih funkcija $y=f(x)$ i $y=g(x)$, $f(x)\geq g(x)$, onda je njegov volumen jednak razlici dvaju volumena prethodno razmotrene vrste, dakle (usp. sl. 18.):

$$\int_a^b 2\pi xf(x)dx - \int_a^b 2\pi xg(x)dx, \quad \text{tj.} \quad \int_a^b 2\pi x(f(x) - g(x))dx.$$



Slika 18.

VOLUMEN ROTACIJSKOG TIJELA

METODA LJUSAKA

Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi y , onoga lika koji se proteže između intervala $[a, b]$ na osi x i grafa integrabilne funkcije $y = f(x)$, onda je njegov volumen (v. sl.17.):

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$

Ako tijelo nastaje rotacijom oko osi y , onoga lika koji se proteže nad intervalom $[a, b]$ između integrabilnih funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gdje je $f(x) \geq g(x)$, onda je njegov volumen (v. sl.18.):

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx.$$

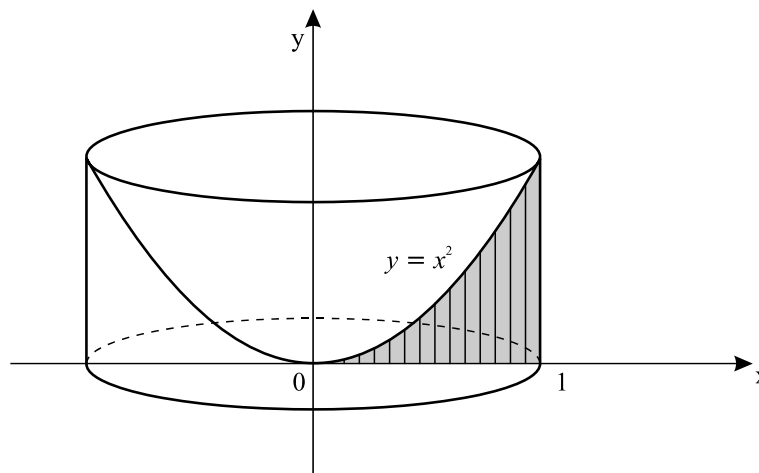
PRIMJER 10.

Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi y , lika koji se proteže od intervala $[0, 1]$ na osi x do grafa $y = x^2$.

Rješenje:

Traženi volumen je (v. sl. 19.):

$$2\pi \int_0^1 xx^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$



Slika 19.

PRIMJER 11.

Iz kugle radijusa R izdubljena je (kroz njezino središte) rupa radijusa r . Koliki dio volumena kugle je time odstranjen?

Rješenje:

Pola odstranjenog volumena nastaje rotacijom, oko osi y , onoga lika koji se proteže od intervala $[0, r]$ na osi x do grafa $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (v. sl.20.). Zato je iznos odstranjenog volumena:

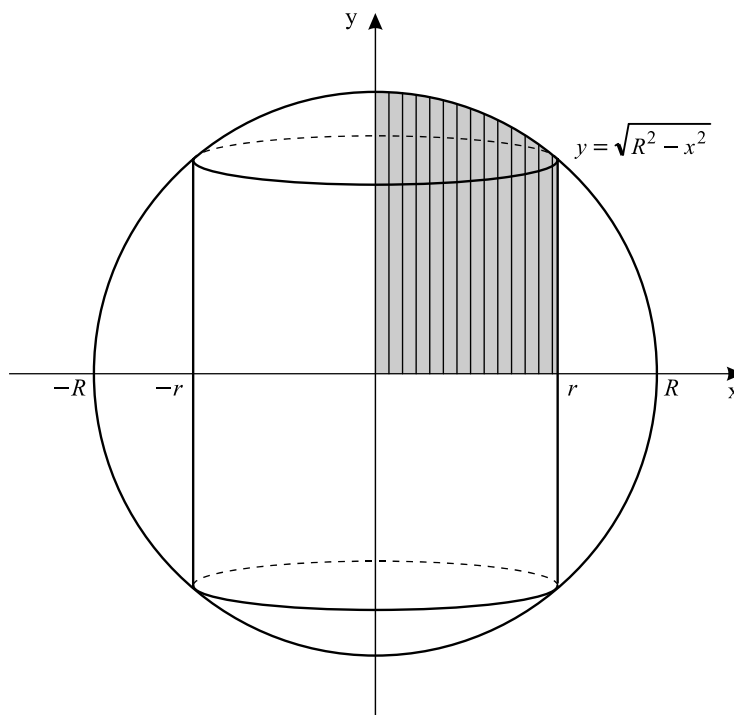
$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot 2\pi \int_0^r x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = R^2 - x^2 \\ du = -2x dx \end{array} \right\} = -2\pi \int_{R^2}^{R^2-r^2} \sqrt{u} du = \\ &= 2\pi \int_{R^2-r^2}^{R^2} \sqrt{u} du = 2\pi \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{R^2-r^2}^{R^2} = \frac{4}{3} \pi (R^3 - (R^2 - r^2)^{3/2}) = \\ &= \frac{4}{3} R^3 \pi \left(1 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} \right). \end{aligned}$$

Omjer odstranjenog volumena i volumena kugle je

$$\frac{\frac{4}{3} R^3 \pi \left(1 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} \right)}{\frac{4}{3} R^3 \pi} = 1 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2}.$$

Na primjer, polovina kugle je odstranjena onda ako je

$$1 - \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2} = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{4 - \sqrt[3]{2}}}{4} R.$$

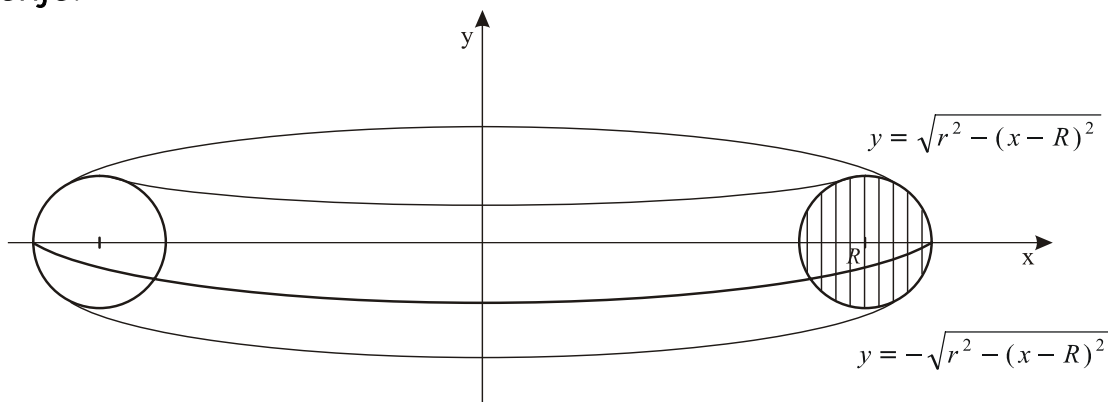


Slika 20.

PRIMJER 12.

Izračunajmo volumen torusa koji nastaje rotacijom kruga omeđenog kružnicom $(x - R)^2 + y^2 = r^2$, oko osi y (usp. primjer 4.).

Rješenje:



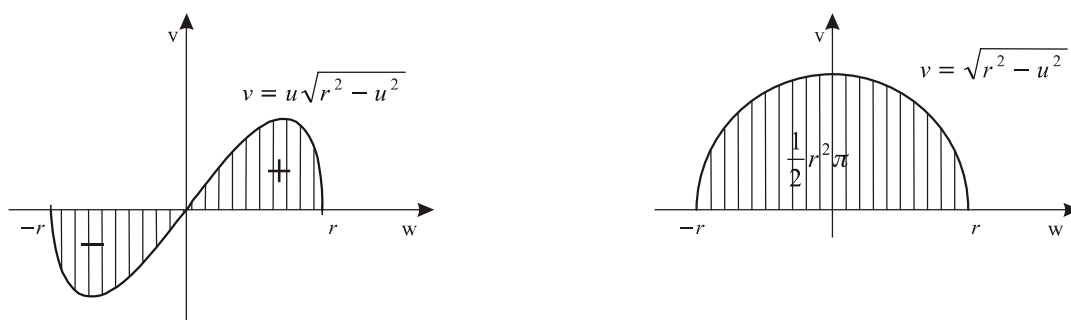
Slika 21.

Traženi volumen nastaje rotacijom, oko osi y , onoga lika koji se nad intervalom $[R - r, R + r]$ na osi x proteže između grafa $y = \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$ i grafa $y = -\sqrt{r^2 - (x - R)^2}$ (v. sl.21), pa je po metodi ljusaka njegov iznos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x \left(\sqrt{r^2 - (x - R)^2} + \sqrt{r^2 - (x - R)^2} \right) dx = \\ &= 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x - R \\ du = dx \end{array} \right\} = 4\pi \int_{-r}^r (u + R) \sqrt{r^2 - u^2} du = \\ &= 4\pi \int_{-r}^r u \sqrt{r^2 - u^2} du + 4R\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2} du = 0 + 4R\pi \cdot \frac{1}{2} r^2 \pi = 2R\pi \cdot r^2 \pi. \end{aligned}$$

Naime, $v = u \sqrt{r^2 - u^2}$ je neparna funkcija, pa je $\int_{-r}^r u \sqrt{r^2 - u^2} du = 0$ (v. sl. 22.), dok je

$v = \sqrt{r^2 - u^2}$ jednadžba gornje polovice kružnice radijusa r , pa je $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2} du = \frac{1}{2} r^2 \pi$ (v.sl.22.).



Slika 22.

Volumen rotacijskog tijela najčešće možemo računati s obje metode, dakle i metodom diskova i metodom ljusaka.

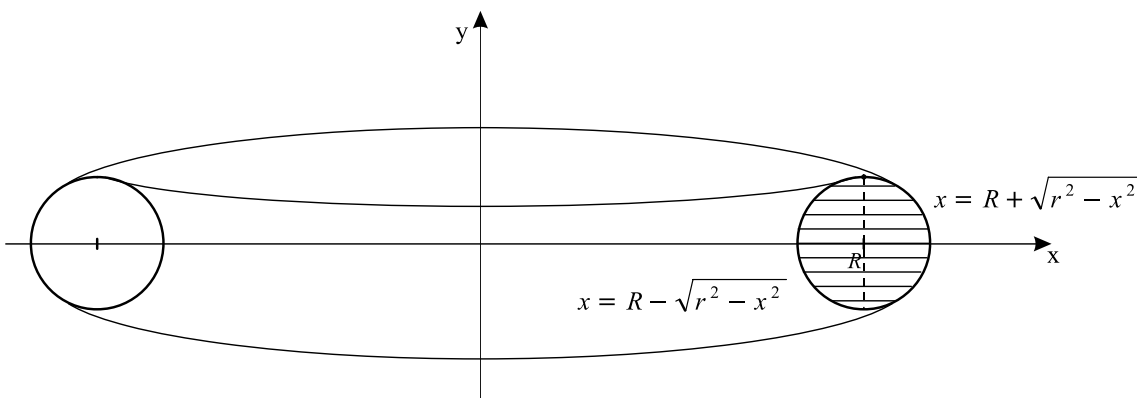
PRIMJER 13.

Volumen torusa iz 12. primjera izračunajmo metodom diskova.

Rješenje:

Traženi volumen nastaje rotacijom, oko osi y , lika koji se nad intervalom $[-r, r]$, na osi x , proteže između grafa $x = R + \sqrt{r^2 - y^2}$ i grafa $x = R - \sqrt{r^2 - y^2}$ (v. sl. 23.), pa prema metodi diskova iznosi:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r \left[\left(R + \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 \right] dy = \\ &= \pi \int_{-r}^r 4R\sqrt{r^2 - y^2} dy = 4R\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 4R\pi \frac{1}{2} r^2 \pi = 2R\pi \cdot r^2 \pi. \end{aligned}$$



Slika 23.

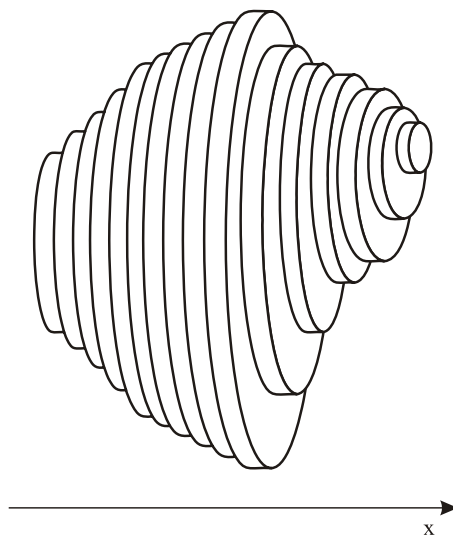
I na kraju, zainteresiranom čitatelju nudimo i stroge dokaze valjanosti naših metoda. Promotrimo najprije tijelo poznatog presjeka. Ako se ono sastoji od n ravni ploča površine $P(x_i)$ i debljine Δx_i (čiji je volumen

$P(x_i)\Delta x_i$), onda je ukupni volumen takvoga tijela $\sum_{i=1}^n P(x_i)\Delta x_i$, što je integral stepenaste funkcije $P(x) =$

$P(x_i)$, za $x \in [x_{i-1}, x_i]$, tj. volumen tijela je tada $\int_a^b P(x)dx$; usp. sl. 24. U općem slučaju tijelo zadanog

presjeka $P(x)$ može se odozdo aproksimirati takvim pločastim (stepenastim) tijelom, koje je tada potpuno sadržano u zadanom tijelu, i isto se tako može odozgo aproksimirati takvim pločastim (stepenastim) tijelom, koje tada potpuno obuhvaća zadano tijelo. Volumeni tih gornjih i donjih aproksimacija su gornje i donje sume za $P(x)$ na $[a, b]$. Naša metoda pretpostavlja da je funkcija $P(x)$ integrabilna na $[a, b]$, pa postoji točno jedna vrijednost koja je smještena između svih takvih donjih i gornjih aproksimacija. To je po definiciji

$\int_a^b P(x)dx$, i on je jednak volumenu zadanog tijela poznatog presjeka $P(x)$. To smo i trebali dokazati.



Slika 24.

Metoda diskova samo je jedna konkretna primjena metode odrezaka, čija je valjanost upravo dokazana, pa je stoga i ona sama valjana. Valjanost metode ljsuka može se dokazati na sličan način, korištenjem gornjih i donjih aproksimacija, što prepuštamo čitatelju da sam provede.

9.3 DULJINA LUKA

Duljina dijela neke ravninske krivulje zovemo duljinom luka te krivulje. Razmotrimo najprije krivulju koja je zadana parametarski sa $x = f(t)$, $y = g(t)$, za $t \in [a, b]$. Ona je sastavljena od infinitezimalnih segmenata ds , koji su hipotenuze infinitezimalnih pravokutnih trokuta s katetama dx i dy (v. sl.1.). Prema Pitagorinom

teoremu $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. No, $dx = (dx/dt)dt = f'(t)dt$ i $dy = (dy/dt)dt = g'(t)dt$, što znači da je

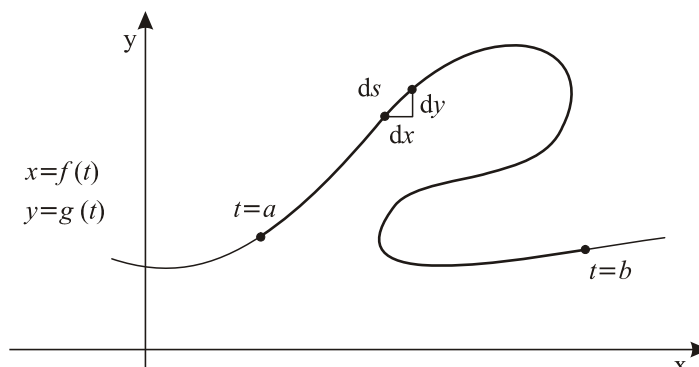
$ds = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$. Ukupnu duljina luka, od $t = a$ do $t = b$, nalazimo kontinuiranim zbrajanjem svih infinitezimalnih segmenata ds , tj.

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt .$$

Ako je krivulja graf funkcije $y = f(x)$, nad intervalom $[a, b]$, onda za parametar x imamo $x = x$ i $y = f(x)$, uz $x \in [a, b]$, pa je duljina u tom slučaju

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Strože opravdanje naših formula za duljinu luka, koje se ne poziva na infinitezimalne segmente i njihovo kontinuirano zbrajanje, zainteresiranom čitatelju nudimo na kraju odjeljka.



Slika 1.

DULJINA LUKA U PRAVOKUTNIM KOORDINATAMA

Ako je luk krivulje parametarski zadan funkcijama $x=f(t)$ i $y=g(t)$, za $t \in [a, b]$, te ako te funkcije imaju integrabilne derivacije $dx/dt=f'(t)$ i $dy/dt=g'(t)$, onda je duljina tog luka jednaka integralu:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2} dt.$$

Ako je luk zadan kao graf funkcije $y=f(x)$, za $x \in [a, b]$, te ako ta funkcija ima integrabilnu derivaciju $dy/dx=f'(x)$, onda je duljina zadanog luka:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

PRIMJER 1.

Izračunajmo duljinu kružnice $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje:

Prema uokvirenoj formuli

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r,$$

što nam je dobro poznato.

PRIMJER 2.

Izračunajmo duljinu parabole $y = x^2$, od $x = 0$ do $x = 1$.

Rješenje:

Prema uokvirenoj formuli

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2} dx =$$

$$= 2 \left(x \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2} \right| \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right) \approx 5.9.$$

PRIMJER 3.

Izračunajmo duljinu asteroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (v. 9.1 primjer 4.).

Rješenje:

Zbog simetrije vrijedi

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t dt = 6a \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

PRIMJER 4.

Izračunajmo duljinu spirale $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $t \in [0, 4\pi]$.

Rješenje:

Iz $\frac{dx}{dt} = \sin t + t \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t - t \sin t$ slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + \cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t \\ &= (\sin^2 t + \cos^2 t)(1 + t^2) = 1 + t^2. \end{aligned}$$

Dakle,

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \ln|t + \sqrt{1+t^2}| \right) \Big|_0^{4\pi} \approx 80.8.$$

PRIMJER 5.

Izračunajmo opseg lika omeđenog krivuljom $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2-x^2}$.

Rješenje:

Oredimo sjecišta zadanih krivulja. Iz $y^3 = x^2$ i $y^2 = 2-x^2$ slijedi $y^3 + y^2 - 2 = 0$. Očito je $y = 1$ jedno rješenje te kubne jednadžbe, pa se polinom $y^3 + y^2 - 2$ može faktorizirati na linearni faktor $y - 2$ i kvadratni faktor koji nalazimo dijeljenjem:

$$\begin{array}{r} y^3 + y^2 - 2 : y - 2 = y^2 + y + 2 \\ -(y^3 - 2y) \\ \hline 2y^2 - 2 \\ -(2y^2 - 2y) \\ \hline 2y - 2 \\ -(2y - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

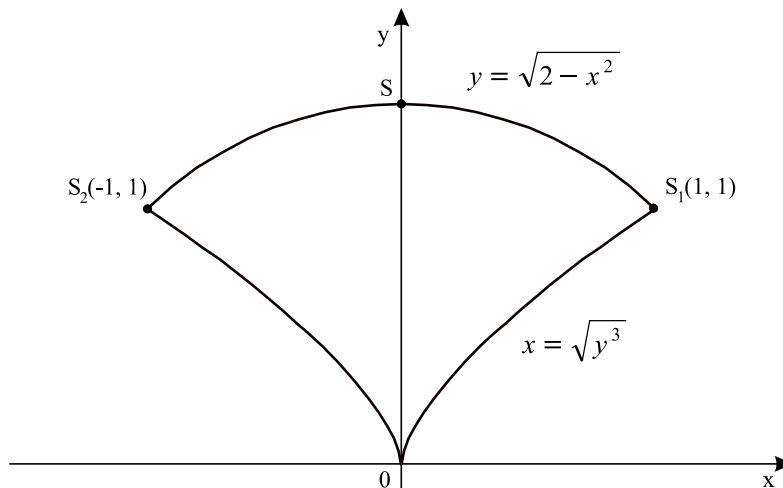
To znači da se kubna jednadžba $y^3 + y^2 - 2 = 0$ može napisati u obliku $(y - 2)(y^2 + y + 2) = 0$, odakle slijedi da su njezini preostali korijeni kompleksni. Dakle, $y = 1$ je jedino realno rješenje našega sustava, kojem odgovaraju vrijednosti $x = \sqrt{y^3} = \sqrt{1} = \pm 1$. Tražena sjecišta su $S_1(1, 1)$ i $S_2(-1, 1)$. Traženi opseg je $OS_1 + S_1S_2 + S_2O = 2(OS_1 + S_1S)$ (v. sl. 2.).

$$\begin{aligned} OS_1 &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2 + 1} dy = \int_0^1 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (4 + 9y)^{1/2} dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{9} \frac{2}{3} (4 + 9y)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{27} ((4 + 9)^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8). \end{aligned}$$

$$S_1S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{2-x^2}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Dakle, traženi opseg je

$$L = 2(OS_1 + S_1S) = \frac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \approx 5.1.$$



Slika 2.

Ako parametarske jednadžbe $x = f(t)$, $y = g(t)$ opisuju gibanje točke (x, y) u vremenu t , onda je

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

put što ga točka prijeđe od trenutka a do trenutka t . Prema osnovnom teoremu infinitezimalnog računa (usp. 4.3) brzina opisanoga gibanja $s'(t)$ je

$$v(t) = s'(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

BRZINA GIBANJA

Ako se točka (x, y) giba u skladu sa $x = f(t)$, $y = g(t)$, onda je njezina brzina u trenutku t

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}.$$

PRIMJER 6.

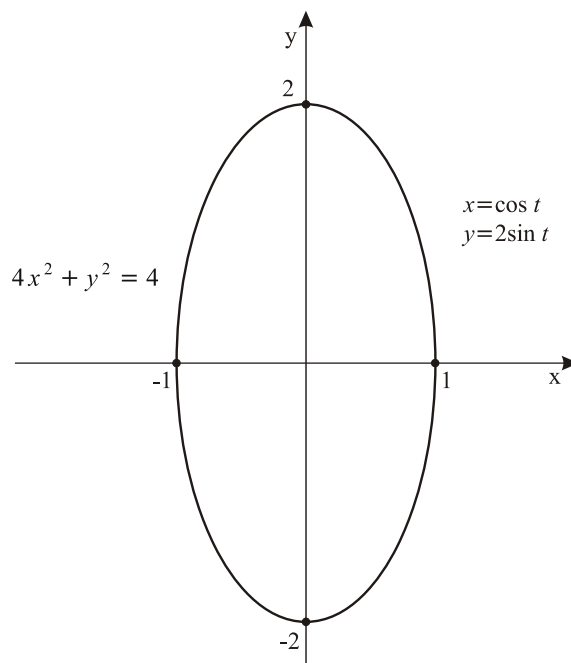
Čestica se giba po elipsi $4x^2 + y^2 = 4$ u skladu s jednadžbama $x = \cos t$, $y = 2\sin t$. Kada je njezina brzina najveća, a kada najmanja?

Rješenje:

Prema uokvirenoj formuli brzina čestice, u trenutku t , je

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}.$$

Brzina je očito najveća kada je $\cos^2 t$ najveći, tj. kada je $\cos t = \pm 1$. Te vrijednosti dobijamo za $t = 0, \pi, 2\pi, \dots$ tj. u tjemenu elipse na osi x . Brzina je najmanja kada je $\cos^2 t$ najmanje, tj. kada je $\cos t = 0$. Te vrijednosti dobijemo za $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$, tj. u tjemenu elipse na osi y (v. sl. 3.).



Slika 3.

PRIMJER 7.

Izračunajmo duljinu prvog luka cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Prethodne jednadžbe opisuju gibanje obodne točke kruga koji se jediničnom kutnom brzinom kotrlja po osi x ; (usp. 9.1 primjer 5). Kada se ta točka giba najbrže?

Rješenje:

Duljina prvoga luka cikloide je (usp. 9.1 primjer 5., sl.7.):

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Brzina gibanja obodne točke kruga je:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2a}\sqrt{1 - \cos t}.$$

Ona je najveća kada je $\cos t$ najmanji, tj. za $t = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ kada je obodna točka na vrhu kotrljajućeg kruga. Brzina tada iznosi $2a$.

Ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama s $r = f(\varphi)$ i $\varphi \in [\alpha, \beta]$, onda iz $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (usp. 5.6) slijedi da su

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

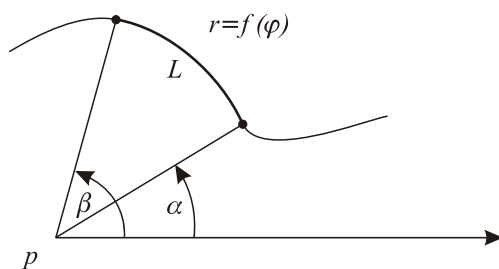
njezine parametarske jednadžbe. Dakle, duljina luka te krivulje, od $\varphi = \alpha$ do $\varphi = \beta$, iznosi

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi]^2 + [f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi]^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\varphi)]^2 + [f'(\varphi)]^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (dr/d\varphi)^2} d\varphi \end{aligned}$$

DULJINA LUKA U POLARNIM KOORDINATAMA

Ako je luk krivulje zadan u polarnim koordinatama s $r = f(\varphi)$ i $\varphi \in [\alpha, \beta]$, te ako su funkcije f i njezina derivacija integrabilne, onda je duljina tog luka (v. sl.4.) jednaka integralu

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\varphi)]^2 + [f'(\varphi)]^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$



Slika 4.

PRIMJER 8.

Izračunajmo duljinu luka krivulje $r = \sin \varphi$, za $\varphi \in [0, \pi/2]$,

Rješenje:

Prema uokvirenoj formuli tražena je duljina:

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Uočimo da je to četvrtina kružnice (usp. 5.6 primjer 3.)

PRIMJER 9.

Izračunajmo duljinu kardiode $r = a(1 + \cos \varphi)$; usp. 9.1 primjer 7, sl.11.

Rješenje:

Prema uokvirenoj formuli tražena duljina je:

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \\ &= 2a\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left[2 \sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$, a ne $\cos \frac{\varphi}{2}$. Da smo pogrešno uvrstili $\cos \frac{\varphi}{2}$ dobili bismo

netočni rezultat 0, a ne točni $8a$. Naravno za $\varphi \in [0, \pi]$, tj. za $\frac{\varphi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \cos \frac{\varphi}{2}$.

PRIMJER 10.

Izračunajmo duljinu luka krivulje $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, za $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje:

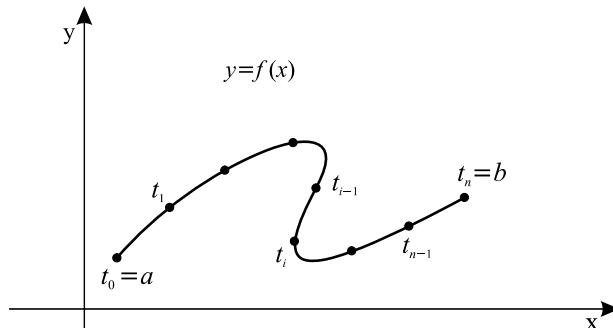
Iz $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ slijedi $\frac{dr}{d\varphi} = 3a \cos^2 \frac{\varphi}{3} \left(-\sin \frac{\varphi}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -a \cos^2 \frac{\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3}$.

Dakle, tražena duljina luka je

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \cos^4 \frac{\varphi}{3} \sin^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \\ &= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^4 \frac{\varphi}{3} \left(\cos^2 \frac{\varphi}{3} + \sin^2 \frac{\varphi}{3}\right)} d\varphi = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^4 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \cos \frac{2}{3} \varphi\right) d\varphi = \frac{a}{2} \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2}{3} \varphi\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a}{8} (2\pi + 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Za zainteresiranog čitatelja još jednom ćemo razmotriti naše formule za duljinu luka, ne pozivajući se više na infinitezimalne segmente i njihovo kontinuirano zbrajanje (usp. početak odjeljka).

Luk krivulje $x = f(t)$, $y = g(t)$, za $t \in [a, b]$, podijelimo diobenim točkama koje odgovaraju parametrima $t_0 = a, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{n-1}, t_n = b$. One cijeli luk duljine l dijele na n manjih lukova duljine $\Delta l_1, \dots, \Delta l_i, \dots, \Delta l_n$, tj. $l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$ (v. sl. 5.).



Slika 5.

Svaki od manjih lukova Δl_i nastaje gibanjem točke (x, y) od $t = t_{i-1}$ do $t = t_i$, uz varijabilnu horizontalnu brzinu dx/dt i varijabilnu vertikalnu brzinu dy/dt . Ako bi se točka gibala konstantnom horizontalnom brzinom d_{xi} (odnosno g_{xi}) koja je manja (odnosno veća) od svih trenutnih brzina dx/dt na intervalu $[t_{i-1}, t_i]$ i konstantnom vertikalnom brzinom d_{yi} (odnosno g_{yi}) koja je manja (odnosno veća) od svih trenutnih brzina dy/dt na $[t_{i-1}, t_i]$, onda bi ona prešla put koji je manji (odnosno veći) od Δl_i . Dakle,

$$\sqrt{(d_{xi}\Delta t_i)^2 + (d_{yi}\Delta t_i)^2} \leq \Delta l_i \leq \sqrt{(g_{xi}\Delta t_i)^2 + (g_{yi}\Delta t_i)^2}$$

odakle slijedi,

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{d_{xi}^2 + d_{yi}^2} \Delta t_i \leq l \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{g_{xi}^2 + g_{yi}^2} \Delta t_i.$$

Iz definicija d_{xi} i d_{yi} , te g_{xi} i g_{yi} , slijedi da su lijeva i desna strana prethodne jednadžbe donja i gornja suma funkcije $\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$, na intervalu $[a, b]$. Ako je ta funkcija integrabilna onda je njezin integral jedinstveni broj smješten između njezinih gornjih i donjih suma, tj.

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

9.4 POVRŠINA PLOHE

Ako luk neke krivulje rotiramo oko zadane osi, dobit ćemo rotacijsku plohu čija se površina nalazi integracijom na slijedeći način.

POVRŠINA ROTACIJSKE PLOHE

Ako je luk krivulje zadan parametarski (usp. 2.3) s jednadžbama

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \text{za } a \leq t \leq b,$$

onda je površina koja nastaje rotacijom tog luka oko osi x (v. sl.1.):

$$P = \int_a^b 2\pi y ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Površina plohe koja nastaje rotacijom tog luka oko osi y je (v. sl. 2.):

$$P = \int_a^b 2\pi x ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Ako je luk krivulje zadan eksplicitno sa

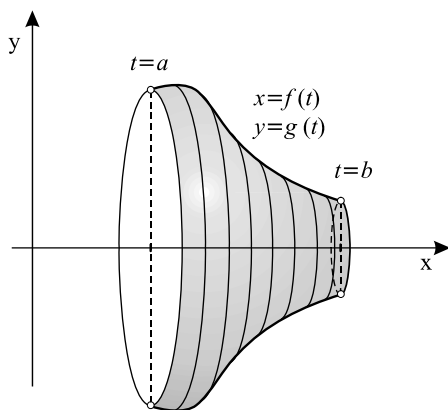
$$y = g(x), \quad \text{za } a \leq x \leq b,$$

onda površina koja nastaje njegovom rotacijom oko osi x iznosi

$$P = \int_a^b 2\pi y ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

a površina plohe koja nastaje njegovom rotacijom oko osi y iznosi

$$P = \int_a^b 2\pi x ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



Slika 1.



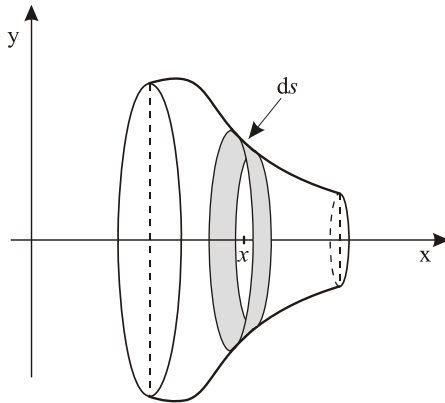
Slika 2.

U točnost uokvirenih formula možemo se uvjeriti na slijedeći način. Ploha koja nastaje rotacijom luka $x=f(t)$, $y=g(t)$ za $a \leq t \leq b$, oko osi x , sastavljena je od infinitezimalnih traka koje nastaju rotacijom infinitezimalnih segmenata ds (v. sl. 3.). Svaka takva traka je plašt krnjoga stošca čija je površina $2\pi y ds$ (v. sl. 4.). Ukupnu površinu rotacijske plohe nalazimo kontinuiranim zbrajanjem svih infinitezimalnih traka,

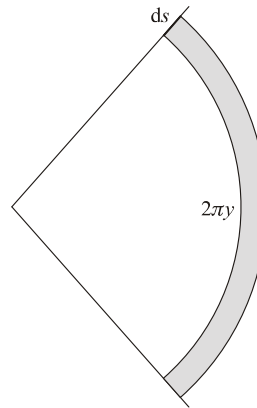
od $t=a$ do $t=b$, tj. $P = \int_a^b 2\pi y ds$. Budući da je $ds = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt$ (usp. 9.3.) slijedi da je

tražena površina $P = \int_a^b 2\pi y \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt$.

Na isti način opravdava se i valjanost druge formule, dok treća i četvrta slijede iz prve i druge (jer je $dx/dx = 1$).



Slika 3.



Slika 4

Za zainteresiranog čitatelja na kraju odjeljka dajemo strože opravdavanje naših formula, koje se ne poziva na infinitezimalne trake i kontinuirano zbrajanje.

PRIMJER 1.

Izračunajmo površinu sfere radijusa r .

Rješenje:

Sfera nastaje rotacijom polukružnice

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r,$$

ili ekvivalentno

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

oko osi x . Dakle, tražena površina je

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-r}^r 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \\
 &= \int_{-r}^r 2\pi r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 4r^2 \pi,
 \end{aligned}$$

ili ekvivalentno

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^\pi 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^\pi 2\pi r \sin t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \\
 &= \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin t dt = 2\pi r^2 \cos t \Big|_0^\pi = 4r^2 \pi.
 \end{aligned}$$

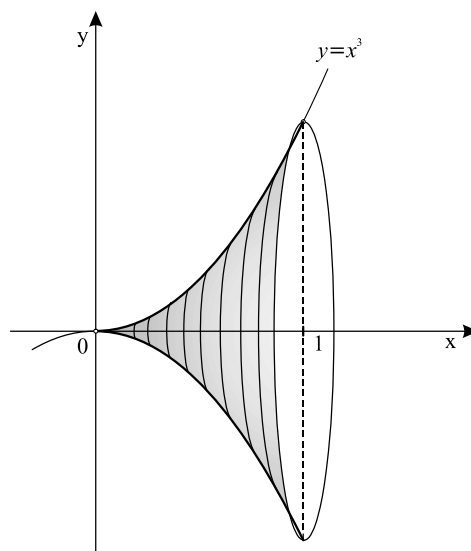
PRIMJER 2.

Izračunajmo površinu plohe koja nastaje rotacijom luka krivulje $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, oko osi x .

Rješenje:

Površina zadane plohe (v. sl. 5.) jednaka je integralu

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^1 2\pi y ds = \int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} v = 1 + 9x^4 \\ dv = 36x^3 dx \end{array} \right\} = \frac{\pi}{18} \int_1^{10} \sqrt{v} dv = \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} v^{3/2} \Big|_1^{10} = \frac{\pi}{18} (10^{3/2} - 1) \approx 3.56.
 \end{aligned}$$



Slika 5.

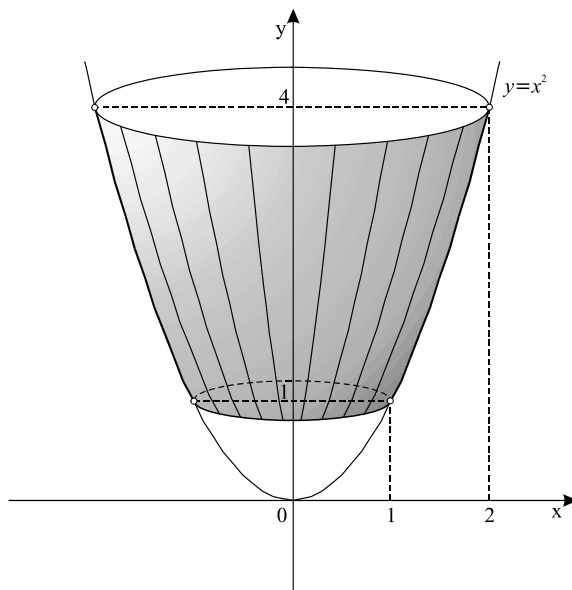
PRIMJER 3.

Izračunajmo površinu plohe koja nastaje rotacijom, oko osi y , luka krivulje $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$.

Rješenje:

Površina zadane plohe (v. sl. 6.) je

$$\begin{aligned}
 P &= \int_1^2 2\pi x ds = \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + 4x^2 \\ du = 8x dx \end{array} \right\} = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_5^{17} = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 30.85.
 \end{aligned}$$



Slika 6.

PRIMJER 4.

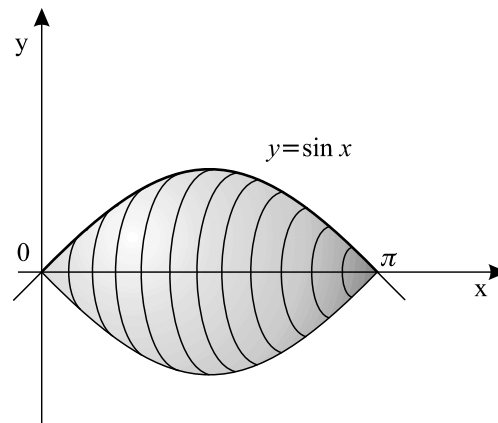
Izračunajmo površinu plohe koja nastaje rotacijom jednoga poluvala sinusoide $y = \sin x$, oko osi x .

Rješenje:

Površina zadane plohe (v. sl. 7.) je:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^\pi 2\pi y ds = \int_0^\pi 2\pi y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt = \\
 &= 2\pi \left[\frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1 + t^2}| \right]_{-1}^1 = \pi \left(\sqrt{2} + \ln |1 + \sqrt{2}| + \sqrt{2} - \ln |-1 + \sqrt{2}| \right) =
 \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{2}\pi + \pi \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}\pi + \pi \ln(\sqrt{2}+1)^2 = 2\sqrt{2}\pi + 2\pi \ln(\sqrt{2}+1) = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$$



Slika 7.

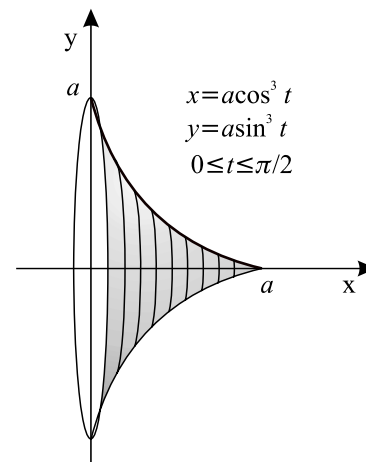
PRIMJER 5.

Izračunajmo površinu plohe koja nastaje rotacijom astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, za $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, oko osi x .

Rješenje:

Površina zadane plohe (v. sl. 8.) je:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi/2} 2\pi y ds = \int_0^{\pi/2} 2\pi y \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} a\sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 6a^2 \pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \\ &= 6a^2 \pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = 6a^2 \pi \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{6}{5} a^2 \pi. \end{aligned}$$



Slika 8.

PRIMJER 6.

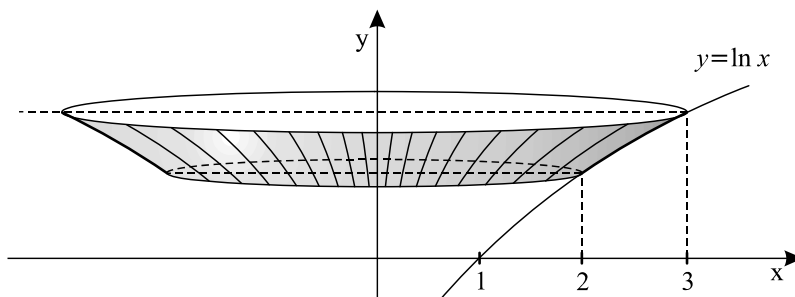
Izračunajmo površinu plohe koja nastaje rotacijom grafa $y = \ln x$, $2 \leq x \leq 3$ oko osi y .

Rješenje:

Površina zadane plohe (v. sl. 9.) je:

$$P = \int_2^3 2\pi x ds = \int_2^3 2\pi x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = 2\pi \int_2^3 x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = 2\pi \int_2^3 \sqrt{x^2 + 1} dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| \right) \Big|_2^3 = \pi \left(3\sqrt{10} - 2\sqrt{5} + \ln \frac{3 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5}} \right).$$



Slika 9.

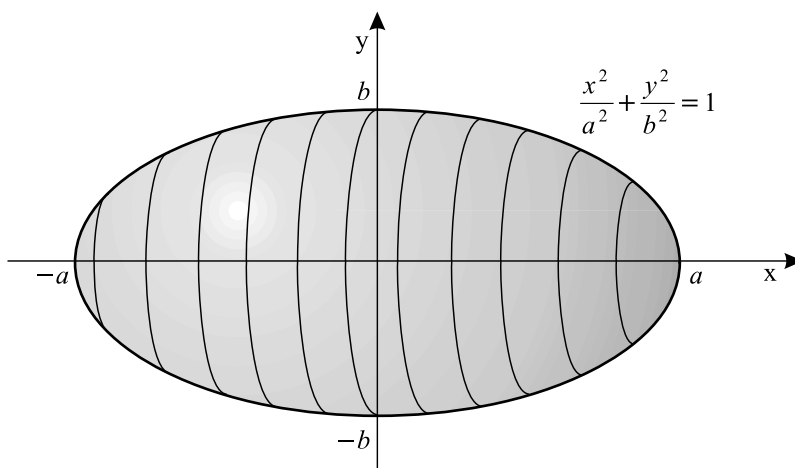
PRIMJER 7.

Izračunajmo oplošje rotacijskog elipsoida koji nastaje rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko osi x .

Rješenje:

Oplošje zadanog elipsoida (v. sl.10.) je

$$P = 2 \int_0^a 2\pi y ds = 4\pi \int_0^a y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{y^2 + \left(y \frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



Slika 10.

No implicitnim deriviranjem iz $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ slijedi $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$, to jest $y \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2}$.

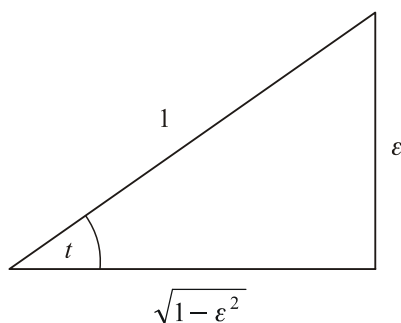
Dakle,

$$\begin{aligned} P &= 4\pi \int_0^a \sqrt{y^2 + \left(y \frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^4 x^2}{a^4}} dx = \\ &= \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2} dx = \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx, \end{aligned}$$

gdje je $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ tzv. ekscentricitet elipse (pretpostavljamo da je $a > b$). Uvedemo li supstituciju $\varepsilon x = a \sin t$, iz koje slijedi $\varepsilon dx = a \cos t dt$, posljednji integral postaje

$$\begin{aligned} \frac{4\pi b}{a} \int_0^{\arcsin \varepsilon} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \frac{a}{\varepsilon} \cos t dt &= \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{\arcsin \varepsilon} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{2\pi ab}{\varepsilon} (t + \sin t \cos t) \Big|_0^{\arcsin \varepsilon} = 2\pi ab \left(\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Naime, iz sl.11 vidimo da je $\cos(\arcsin \varepsilon) = \cos t = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.



Slika 11.

Ako $b \rightarrow a$, onda $\varepsilon \rightarrow 0$, $\arcsin \varepsilon / \varepsilon \rightarrow 1$, $\sqrt{1 - \varepsilon^2} \rightarrow 1$ i elipsoid prelazi u sferu radijusa a , čija je površina $4a^2\pi$.

PRIMJER 8.

Izračunajmo površinu plohe torusa koja nastaje rotacijom kružnice $(x - R)^2 + y^2 = r^2$ oko osi y (usp. 9.2 primjer 12.).

Rješenje:

Površina zadane plohe torusa je:

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \int_{R-r}^{R+r} 2\pi x ds = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{1 + \frac{(x-R)^2}{r^2 - (x-R)^2}} dx = \\
 &= 4\pi r \int_{R-r}^{R+r} \frac{x}{\sqrt{r^2 - (x-R)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x - R \\ dt = dx \end{array} \right\} = 4\pi r \int_{-r}^r \frac{t+R}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = \\
 &= 4\pi r \int_{-r}^r \frac{tdt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + 4\pi r R \int_{-r}^r \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = 0 + 4\pi r R \arcsin \frac{x}{r} \Big|_{-r}^r = 2r\pi \cdot 2R\pi.
 \end{aligned}$$

Uočimo da je $\int_{-r}^r \frac{tdt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = 0$, jer je $\frac{t}{\sqrt{r^2 - t^2}}$ neparna funkcija.

PRIMJER 9.

Izračunajmo površinu beskonačno protegnute plohe koja nastaje rotacijom luka hiperbole $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq \infty$, oko osi x (usp. 9.2 primjer 2.).

Rješenje:

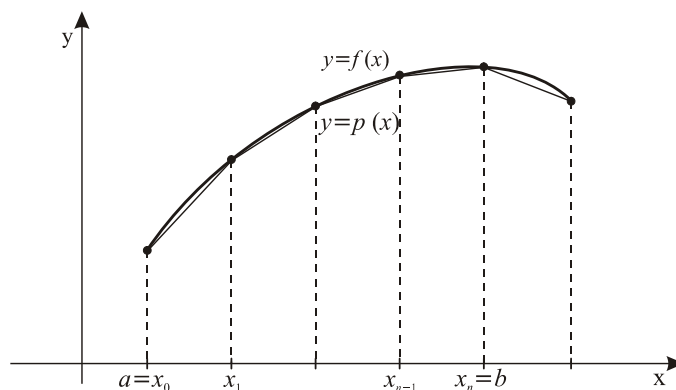
Površina zadane plohe je:

$$P = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A 2\pi y ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \geq \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A 2\pi \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty.$$

Dakle, površina zadane plohe je beskonačna. Uočimo da se radi o beskonačnom oplošju konačnog volumena (usp. 9.2 primjer 2.).

Za zainteresiranog čitatelja još jednom ćemo razmotriti naše formule za površinu rotacijske plohe, ne pozivajući se više na infinitezimalne trake i njihovo kontinuirano zbrajanje (usp. početak odjeljka).

Promotrimo, dakle plohu koja nastaje rotacijom, oko osi x , luka krivulje $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (v. sl. 12.). Ako taj luk podijelimo diobenim točkama $(x_0, f(x_0)) = (a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n)) = (b, f(b))$ i aproksimiramo ga poligonskom linijom koja te točke povezuje dužinama, onda će ploha koja nastaje rotacijom poligonske linije aproksimirati plohu koja nastaje rotacijom luka polazne krivulje.



Slika 12.

Poligonska linija je graf po dijelovima linearne funkcije:

$$p(x) = \begin{cases} k_1x + b_1, & x \in [a, x_1] \\ k_2x + b_2, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ k_{n-1}x + b_{n-1}, & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}] \\ k_nx + b_n, & x \in [x_{n-1}, b] \end{cases}$$

koja na intervalu $[a, b]$ aproksimira funkciju $f(x)$. Dokazat ćemo da je površina plohe, koja nastaje rotacijom poligonske linije, oko osi x , jednaka integralu

$$\int_a^b 2\pi p(x) \sqrt{1 + [p'(x)]^2} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} 2\pi (k_i x + b_i) \sqrt{1 + k_i^2} dx.$$

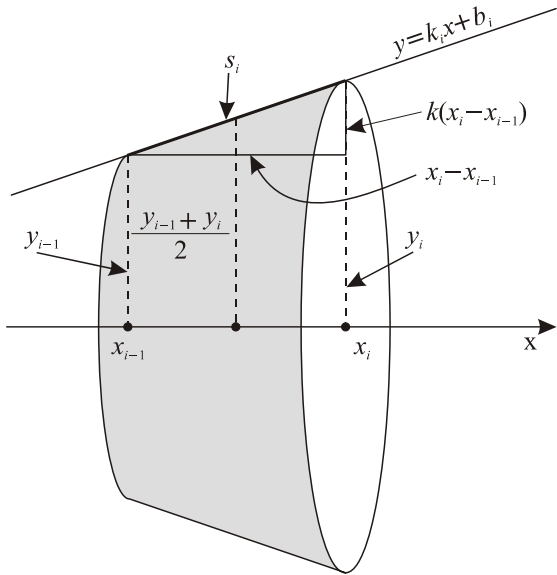
Taj integral je to bolja aproksimacija integrala

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

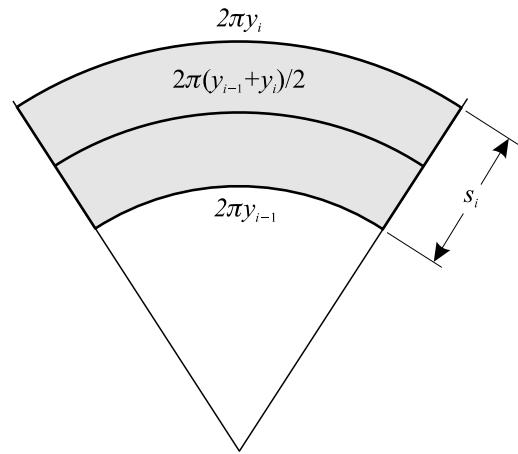
što je $p(x)$ bolja aproksimacija od $f(x)$ (to se može preciznije iskazati i dokazati pomoću donjih i gornjih suma za $2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ na $[a, b]$, kao što smo to učinili za duljinu luka na kraju 9.3). Zato površinu plohe koja nastaje rotacijom luka krivulje $y = f(x)$, za $a \leq x \leq b$ definiramo posljednjim integralom. No to je jedna od naših formula. (Druge se mogu opravdati na isti način.)

Preostaje nam stoga dokazati da je površina plašta krnjoga stošca, koji nastaje rotacijom dužine

$y = k_i x + b_i$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, oko osi x (v. sl.13.), jednaka integralu $\int_{x_{i-1}}^{x_i} 2\pi (k_i x + b_i) \sqrt{1 + k_i^2} dx$.



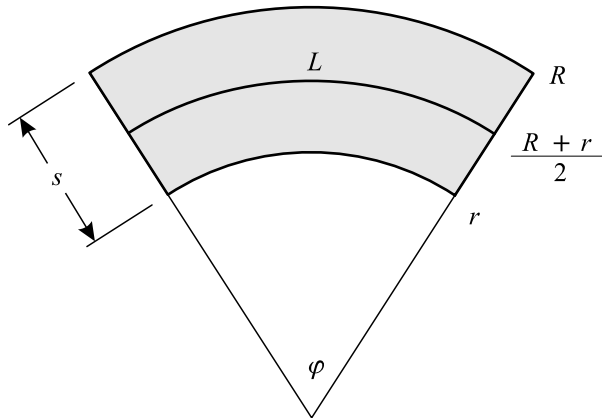
Slika 13.



Slika 14.

Razvijemo li taj plašt (v. sl. 14.) vidjet ćemo da se radi o isječku kružnoga vijenca čija je površina $\pi(y_{i-1} + y_i)s_i$. Naime, površina isječka kružnoga vijenca širine $s = (R - r)$ i srednjice duljine L iznosi sL jer je (v. sl. 15.):

$$P = R^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 \frac{\varphi}{2} = (R^2 - r^2) \frac{\varphi}{2} = (R - r) \left(\frac{R + r}{2} \right) \varphi = sL.$$



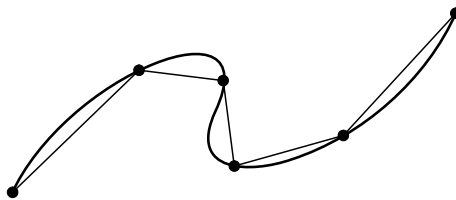
Slika 15.

Dakle, površina plašta krnjoga stošca $\pi(y_{i-1} + y_i)s_i$ (v. sl. 13.) iznosi:

$$\begin{aligned}
& \pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + k_i^2(x_i - x_{i-1})} = \pi(k_i x_{i-1} + b_i + k_i x_i + b_i)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + k_i^2} = \\
& = \pi\sqrt{1 + k_i^2} [k_i(x_i + x_{i-1}) + 2b_i](x_i - x_{i-1}) = \pi\sqrt{1 + k_i^2} [k_i(x_i^2 - x_{i-1}^2) + 2b_i(x_i - x_{i-1})] = \\
& = 2\pi\sqrt{1 + k_i^2} \left[k_i \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} + b_i(x_i - x_{i-1}) \right] = 2\pi\sqrt{1 + k_i^2} \left[k_i \frac{x^2}{2} + b_i x \right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \\
& = \int_{x_{i-1}}^{x_i} 2\pi(k_i x + b_i)\sqrt{1 + k_i^2} dx,
\end{aligned}$$

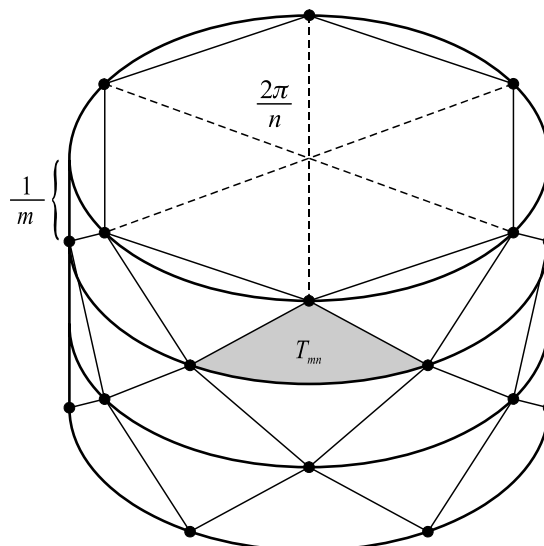
što smo i trebali dokazati.

I na kraju, upozoravam na jednu pogrešnu analogiju. Duljina krivulje aproksimirana je duljinama dužina čiji krajevi leže na krivulji. Što su te dužine manje to je aproksimacija bolja (v. sl.16). Mogli bismo analogno pomisliti da je i površina plohe aproksimirana površinom trokuta čiji vrhovi leže na plohi, te da je aproksimacija to bolja što su ti trokuti manji (v. sl. 17.). To međutim nije točno.



Slika 16.

Promotrimo plašt valjka jedinične visine i jediničnog radijusa, čija je površina očito 2π . Podijelimo taj valjak na m valjaka visine $1/m$. U bazu svakoga od njih upišimo pravilni n -terokut i to tako da je svaki za π/n zaokrenut u odnosu na sljedeći (v. sl. 17). Spojimo točke susjednih n -terokuta tako da $2n$ trokuta “aproksimira” plašt valjka visine $1/m$, a ukupno $2nm$ trokuta “aproksimira” plašt cijelog jediničnog valjka.

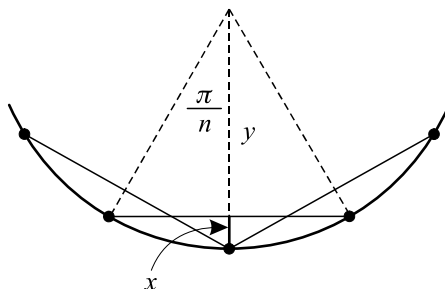


Slika 17.

Površina svakog pojedinog trokuta je $T_{mn} = av/2$, gdje je a stranica pravilnog n -terokuta, a v je hipotenuza pravokutnog trokuta s katetama x i $1/m$. Dakle (v. sl. 18.),

$$a = 2 \sin \frac{\pi}{n}, \quad x = 1 - \cos \frac{\pi}{n}, \quad v = \sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}},$$

$$T_{mn} = \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{m^2}}.$$



Slika 18.

Plášť cijelog jediničnog valjka “aproksimiran” je sa $2mn$ takvih trokuta:

$$P_{mn} = 2mn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{1}{m^2}} = 2\pi \left(\sin \frac{\pi}{n} / \frac{\pi}{n} \right) \sqrt{\frac{(1 - \cos(\pi/n))^2}{\pi/n} \pi^2 \frac{m^2}{n^2} + 1}.$$

Budući da je $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin \alpha / \alpha = 1$ i $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 - \cos \alpha) / \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha / 2$ (jer je $(1 - \cos \alpha) / \alpha = \alpha / 2! - \alpha^3 / 4! + \alpha^5 / 6! - \dots$) slijedi da za $m, n \rightarrow \infty$, “aproksimacija” P_{mn} teži prema:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} 2\pi \sqrt{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \pi^2 \frac{m^2}{n^2} + 1} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} 2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4 m^2}{2n^3}}$$

Dakle,

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} P_{mn} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} 2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4 m^2}{2n^3}}.$$

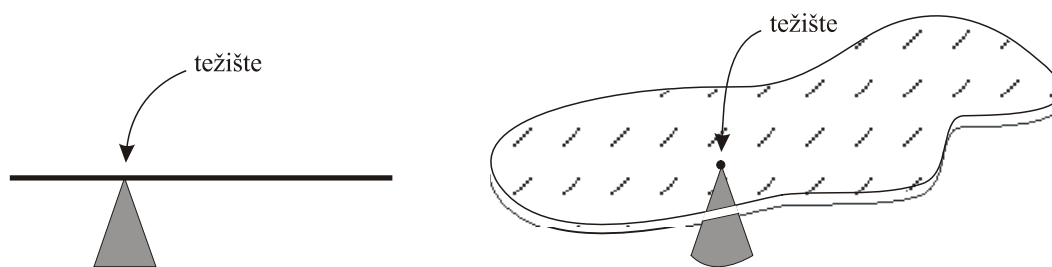
Za $m = n$, $P_{mn} \rightarrow 2\pi$, što je točna vrijednost površine plašta. Ali za $m = n^2$, $P_{mn} \rightarrow \infty$, što sigurno nije točna vrijednost. Za $m = [kn^{3/2}]$ (m je cijeli dio broja u zagradi), $P_{mn} \rightarrow 2\pi k$, za bilo koji $k \geq 1$.

Dakle, trokuti čiji vrhovi leže na plaštu ne aproksimiraju površinu plašta (iako najmanja od svih mogućih “aproksimacija”, koju dobijamo za $m = n$, to čini, a to je i općenito točno).

9.5 TEŽIŠTE

Točka u kojoj možemo poduprijeti ravnu šipku ili ploču, tako da ona miruje u polju sile teže, zove se težištem te šipke odnosno ploče (v. sl.1.).

Nalaženje težišta ravnih ploča i šipki jedna je od mnogobrojnih fizikalnih primjena integriranja.



Slika 1.

Razmotrimo najprije problem šipke, i to najjednostavniji (idealizirani) slučaj dvije točkaste mase m_1 i m_2 smještene na krajevima horizontalne šipke zanemarive mase (v. sl.2.). Ako šipku podupremo u točki koja je na udaljenosti d_1 od mase m_1 , odnosno d_2 od m_2 , ona će (po Arhimedovom zakonu poluge) biti u ravnoteži ako je

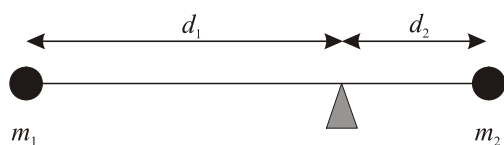
$$m_1 d_1 = m_2 d_2.$$

Postavimo li os x duž horizontalne šipke i označimo li koordinate mase m_1 , mase m_2 i njihova težišta sa x_1 , x_2 i \bar{x} slijedi da je (v. sl.3.)

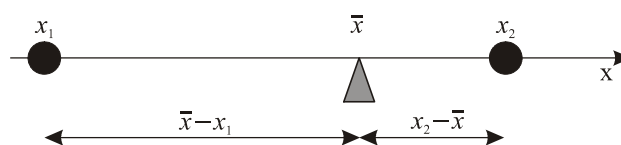
$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

odakle rješavanjem po \bar{x} nalazimo

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



Slika 2.



Slika 3.

Ako je na šipku zanemarive težine raspoređeno n masa, m_1, m_2, \dots, m_n , onda se njihovo težište može odrediti uz pomoć slijedećeg principa superpozicije težišta.

PRINCIP SUPERPOZICIJE TEŽIŠTA

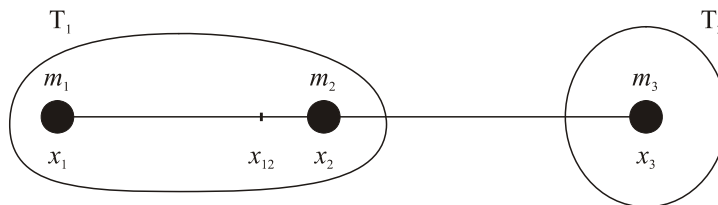
Ako je tijelo T mase M podijeljeno na dva tijela T_1 i T_2 , mase M_1 i M_2 , onda je težište tog tijela jednako težištu točkastoga tijela koja se sastoji od dvije točke mase M_1 i M_2 smještene u težištima tijela T_1 i T_2 .

Razmotrimo točkasto tijelo koje se sastoji od tri mase m_1, m_2 i m_3 smještene na horizontalnoj x osi u x_1, x_2 i x_3 . Podijelimo ga u dva tijela, tako da prvo sadrži mase m_1 i m_2 a drugo masu m_3 (v. sl.4.). Težište prvoga tijela (mase $m_{12} = m_1 + m_2$) nalazi se u točki

$$x_{12} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Po principu superpozicije težišta, težište čitavog tijela nalazi se u točki

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$



Slika 4.

Slično dolazimo do općeg rezultata za točkasto tijelo koje se sastoji od bilo kojeg broja masa.

TEŽIŠTE TOČKASTE ŠIPKE

Ako se točkasto tijelo sastoji od n masa m_1, m_2, \dots, m_n , smještenih na x osi u točkama s koordinatama x_1, x_2, \dots, x_n , onda je njegovo težište smješteno u točki s koordinatom:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

PRIMJER 1.

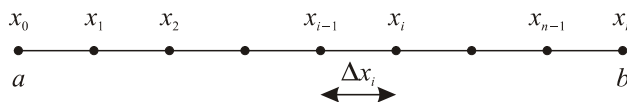
Mase od 30, 20 i 25 kg smještene su u točkama s koordinatama $-3, 0$ i 5 na osi x . Odredimo koordinatu njihovog težišta.

Rješenje:

Koordinata težišta je

$$\bar{x} = \frac{30 \cdot (-3) + 20 \cdot 0 + 25 \cdot 5}{30 + 20 + 25} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}.$$

Ako se šipka kontinuirano proteže duž osi x , od $x = a$ do $x = b$, i ako joj je linearna gustoća zadana funkcijom $g(x)$ onda je možemo podijeliti na n dijelova $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, duljine Δx_i i približne mase $m_i = g(x_i) \Delta x_i$, koje približno možemo shvatiti kao točkaste mase smještene u x_i (v. sl.5).



Slika 5.

Približna masa šipke tada je

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n g(x_i)\Delta x_i$$

dok je približna koordinata njezina težišta

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i g(x_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^n g(x_i)\Delta x_i}.$$

Točne vrijednosti dobijemo kada svi Δx_i teže prema 0. Naravno, tada gornje sume prelaze u integrale:

TEŽIŠTE ŠIPKE

Šipka koje se proteže od $x = a$ do $x = b$ i kojoj je linearna gustoća zadana funkcijom $g(x)$ ima masu

$$m = \int_a^b g(x)dx,$$

a težište joj je u točki s koordinatom

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xg(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

PRIMJER 2.

Šipka se proteže od $x = 0$ do $x = 6$. Njezina linearna gustoća, na tom intervalu, zadana je sa $g(x) = x^2 + x$. Izračunajmo njezinu masu i položaj njezinog težišta.

Rješenje:

Tražena masa je

$$m = \int_0^6 (x^2 + x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^6 = 90.$$

Koordinata težišta šipke na osi x je

$$\bar{x} = \frac{\int_0^6 x(x^2 + x)dx}{\int_0^6 (x^2 + x)dx} = \frac{1}{90} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^6 = \frac{23}{5}.$$

Razmotrimo sada problem ploče i to najprije najjednostavniji (idealizirani) slučaj konačnog broja točkastih masa m_1, \dots, m_n smještenih na horizontalnoj ploči zanemarive mase, u točkama $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$; v. sl. 6. Da bismo odredili položaj težišta takve točkaste ploče, uočimo da će ploča koja miruje kada je poduprta u težištu (\bar{x}, \bar{y}) mirovati i kada bude poduprta u bilo kojem pravcu koji prolazi tim težištem. Uzmimo npr. pravac kroz (\bar{x}, \bar{y}) paralelan sa osi y (v. sl.7.) Ako mase m_1, \dots, m_n povučemo paralelno s tim pravcem, npr. do osi x , ravnoteža se neće poremetiti.



Slika 6., Slika 7.

No tada mase m_1, \dots, m_n smještene u x_1, \dots, x_n tvore točkastu šipku čije je težište u

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Ponavljajući isti postupak s pravcem kroz (\bar{x}, \bar{y}) , koji je paralelan s osi x , našli bismo da je

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

TEŽIŠTE TOČKASTE PLOČE

Ako se točkasto tijelo sastoji od n masa m_1, m_2, \dots, m_n , smještenih na x, y -ravnini u točkama s koordinatama $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, onda je njegovo težište smješteno u točki s koordinatama

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

PRIMJER 3.

Mase od 10, 20 i 30 kg smještene su u točkama $(-1,1)$, $(0,2)$ i $(1,1)$. Odredimo njihovo težište.

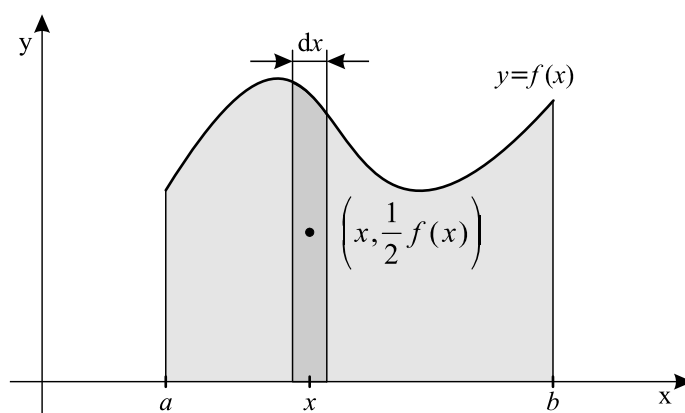
Rješenje:

Koordinate težišta su

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot (-1) + 20 \cdot 0 + 30 \cdot 1}{10 + 20 + 30} = \frac{1}{3}, \quad \bar{y} = \frac{10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 30 \cdot 1}{10 + 20 + 30} = \frac{4}{3}$$

tj. težište je u točki $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Prijelaz na ploče kontinuirane gustoće prevest će gornje sume u tzv. dvostruke integrale, kojima se u ovoj knjizi ne bavimo. Međutim, ako se ograničimo na ploče konstantne (uniformne) gustoće, onda problem nalaženja težišta možemo riješiti i s našim starim (jednostrukim) integralima. Promotrimo dakle ploču uniformne gustoće smještenu između grafa $y=f(x)$, $f(x) \geq 0$, i intervala $[a, b]$ na osi x (v. sl. 8.).



Slika 8.

Podijelimo tu ploču na infinitezimalne stupce visine $f(x)$ i debljine dx . Njihova je masa $\rho f(x)dx$. Težište svakog takvog stupca je (zbog njegove konstante gustoće) u njegovoj sredini, tj. u točki $\left(x, \frac{1}{2} f(x)\right)$.

Zamijenimo li (po principu superpozicije težišta) svaki takav stupac sa točkastom masom $\rho f(x)dx$ smještenom u njegovom težištu i primijenimo li formule za težište točkaste ploče, dobit ćemo

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \rho x f(x) dx}{\int_a^b \rho f(x) dx} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b \rho \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\int_a^b \rho f(x) dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Umjesto suma sada imamo integrale, jer je diskretna točkasta ploča zamijenjena kontinuiranom. Stroži dokaz gornjih formula mogao bi se provesti bez poziva na infinitezimalne stupce i njihovo kontinuirano zbrajanje, kao u prethodnim odjeljcima.

Zapravo vrijede još općenitije formule koje se dokazuju na isti način (što prepuštamo čitatelju),

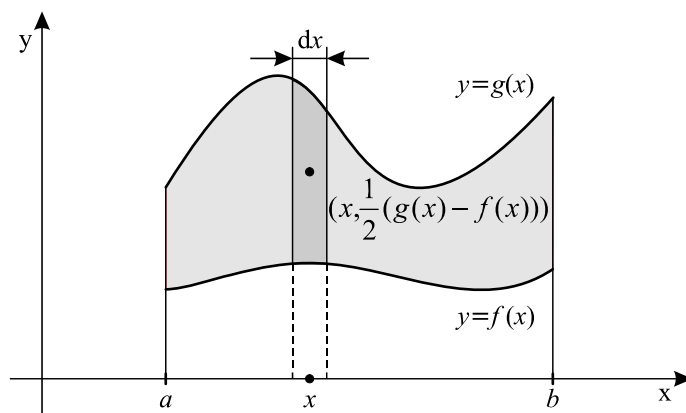
TEŽIŠTE PLOČE UNIFORMNE GUSTOĆE

Ploča uniformne (konstantne) gustoće ρ , koja se proteže (v. sl. 9.) nad intervalom $[a, b]$ od $y=f(x)$ do $y=g(x)$, $f(x)\leq g(x)$, ima masu

$$m = \rho \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

i težište s koordinatama:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[g(x) - f(x)] dx}{\int_a^b [g(x) - f(x)] dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [g(x) + f(x)][g(x) - f(x)] dx}{\int_a^b [g(x) - f(x)] dx}$$



Slika 9.

PRIMJER 4.

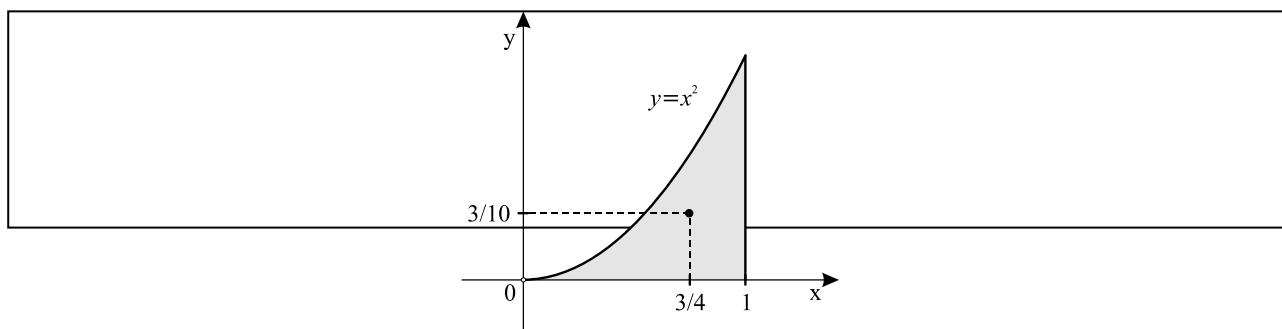
Odredimo težište ploče uniformne gustoće, koja se proteže od intervala $[0, 1]$ na osi x do grafa $y = x^2$.

Rješenje:

Koordinate težišta su

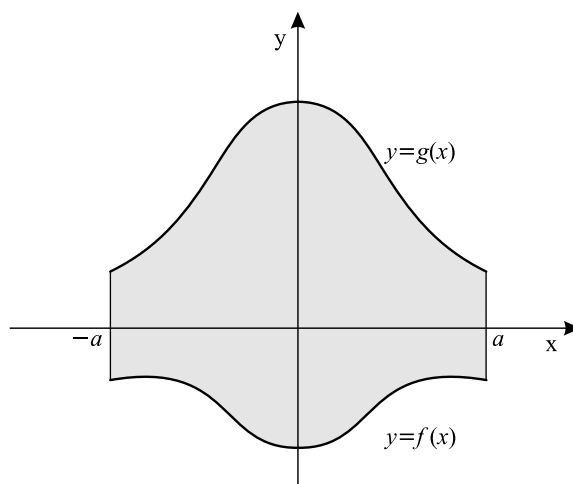
$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{\frac{x^4}{4} \Big|_0^1}{\frac{x^3}{3} \Big|_0^1} = \frac{3}{4}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{\frac{x^5}{10} \Big|_0^1}{\frac{x^3}{3} \Big|_0^1} = \frac{3}{10}.$$

Dakle, težište lika je u točki $(\frac{3}{4}, \frac{3}{10})$; v. sl. 10.



Slika 10.

Ako je ploča uniformne gustoće osno simetrična, te ako kroz njenu os simetrije postavimo os y , njen je oblik opisan parnim funkcijama $f(x)$ i $g(x)$, nad simetričnim intervalom $[-a, a]$; usp. sl. 11. No tada je funkcija $x[g(x) - f(x)]$ neparna, pa je njezin integral nad $[-a, a]$ jednak 0, tj. $\int_{-a}^a x[g(x) - f(x)]dx = 0$, tj. prva koordinata težišta te ploče je $\bar{x} = 0$. To znači da se težište ploče nalazi na osi y , tj. na osi simetrije te ploče.



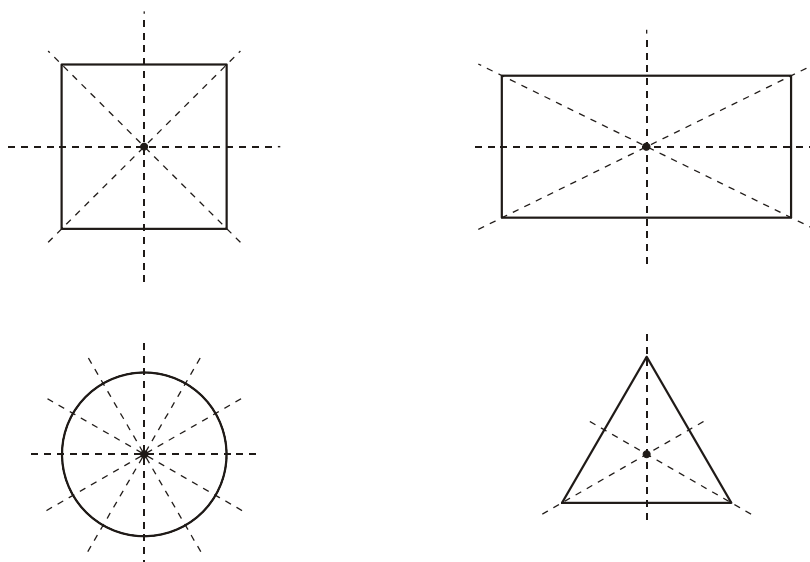
Slika 11.

PRINCIP SIMETRIJE

Ako ploča uniformne gustoće ima os simetrije onda se njezino težište nalazi na toj osi.

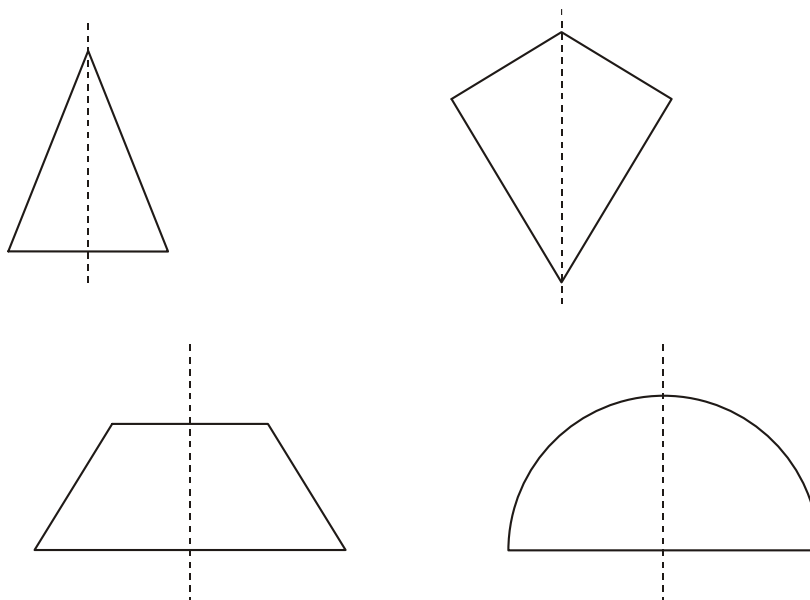
Ako ploča ima više osi simetrije, onda je njezino težište jednoznačno određeno kao sjecište tih osi, jer se mora nalaziti na svima.

Na primjer, na sl. 12, težište kvadrata, pravokutnika, kruga i jednostraničnog trokuta jednoznačno su određena njihovim osima simetrije.



Slika 12.

O težištu jednakokračnog trokuta, deltoida, jednakokračnog trapeza ili polukruga, možemo reći samo to da se nalazi na njihovoj jednoj osi simetrije, usp. sl. 13.



Slika 13.

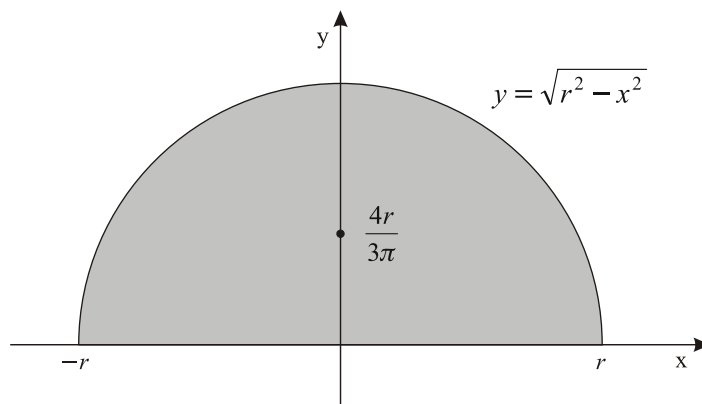
PRIMJER 5.

Odredimo težište polukruga radijusa r .

Rješenje:

Polukrug radijusa r proteže se od intervala $[-r, r]$ na osi x , do grafa $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; (v. sl. 14.).
 Koordinate njegovog težišta su $\bar{x} = 0$ zbog simetrije, i

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx}{\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx} = \frac{\frac{1}{2} (r^2 x - x^3/3) \Big|_{-r}^r}{r^2 \pi/2} = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.42r.$$



Slika 14.

PRIMJER 6.

Odredimo težište područja omeđenog sa $y = \sin x$ i $y = \cos x$ nad $[0, \pi/4]$.

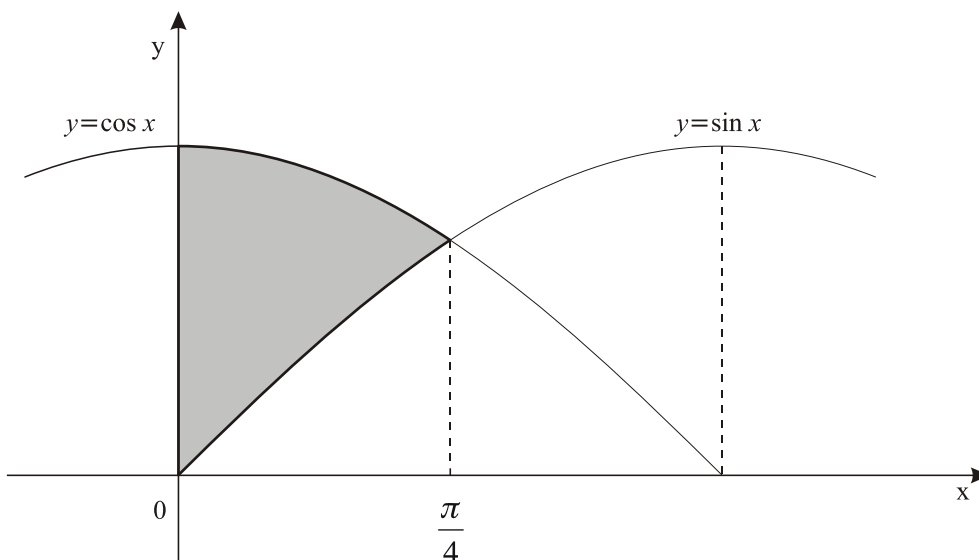
Rješenje:

Koordinate težišta zadanog lika su (v. sl.15.)

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi/4} x(\cos x - \sin x) dx}{\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx} = \frac{(x \sin x + \cos x + x \cos x - \sin x) \Big|_0^{\pi/4}}{(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4(\sqrt{2} - 1)},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) dx}{\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sin 2x \Big|_0^{\pi/4}}{4(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)}.$$

Dakle, težište zadanog lika je u točki $\left(\frac{\sqrt{2}\pi - 4}{4(\sqrt{2} - 1)}, \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)} \right)$.



Slika 15.

9.6 SNAGA, ENERGIJA I RAD

Energija je veličina koja se pojavljuje u raznim oblicima. No, bez obzira na oblik, ona nastaje, ili se troši, tijekom vremena. Brzina kojom neki oblik energije nastaje, ili se troši, zove se snagom naprave koja tu energiju stvara ili troši. Dakle, snaga je derivacija energije.

(U MKS – sustavu jedinica mjera energije je Joule (J), tj. $\text{kg m}^2 / \text{s}^2$, dok je jedinica snage Watt (W), tj. J/s. Jedna konjska snaga (KS) je 746 watta. Kilowatt–sat je jedinica energije jednaka energiji koju proizvede naprave snage 1000 watta za 1 sat, što je 3 600 000 joula.)

SNAGA I ENERGIJA

Snaga S je brzina promjene (dakle proizvodnje ili potrošnje) energije E u vremenu:

$$S = \frac{dE}{dt}.$$

Slijedi da je ukupna promjena (dakle ukupna proizvodnja ili potrošnja) energije, od trenutka a do trenutka b :

$$E = \int_a^b S dt.$$

PRIMJER 1.

Snaga generatora u (wattima) varira vremenski (u sekundama) prema formuli $P = P_0 \sin^2(120\pi t)$, gdje je P_0 maksimalna snaga generatora. Koliko energije generator proizvede za 1 sat? Koja je srednja snaga generatora u toku 1 sata?

Rješenje:

Generator od trenutka $t = 0$ (sekundi) do trenutka $t = 3600$ (sekundi), što čini interval od 1 sata, proizvede energiju:

$$E = \int_0^{3600} P_0 \sin^2(120\pi t) dt = \frac{1}{2} P_0 \int_0^{3600} (1 - \cos(240\pi t)) dt =$$

$$= \frac{1}{2} P_0 \left(t - \frac{\sin(240\pi t)}{240} \right) \Big|_0^{3600} = 1800 P_0 \text{ Joulea.}$$

Srednja snaga generatora je

$$\bar{P} = \frac{1800 P_0}{3600} = \frac{1}{2} P_0 \text{ Watta.}$$

Ako se tijelo (pravocrtno) giba u polju neke sile, onda je njegovo gibanje opisano drugim Newtonovim zakonom: $F = ma$, gdje je m masa i a akceleracija tog tijela. Giba li se tijelo po x osi, $a = d^2x/dt^2$, pa drugi Newtonov zakon glasi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Množeći sa dx/dt dobijamo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} = F \frac{dx}{dt}.$$

Budući da je $\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2 \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt}$ slijedi:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = F \frac{dx}{dt}.$$

Integracijom od trenutka $t = t_0$ do trenutka $t = t_1$, uzimajući u obzir da je dx/dt brzina gibanja v , nalazimo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} F \frac{dx}{dt} dt = \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ dx = \left(\frac{dx}{dt} \right) dt \end{array} \right\} = \int_{x_0}^{x_1} F dx,$$

gdje je $x(t_0) = x_0$ i $x(t_1) = x_1$. Dakle,

$$\frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{x_0}^{x_1} F dx.$$

Lijeva je strana promjena kinetičke energije tijela, $K = \frac{1}{2}mv^2$, od trenutka t_0 do trenutka t_1 , dok je desna

strana $R = \int_{x_0}^{x_1} F dx$, rad sile F na putu koji tijelo pređe od položaja x_0 do položaja x_1 . Dakle, promjena

kinetičke energije tijela jednaka je radu sile (pod čijim utjecajem se tijelo giba) na odgovarajućem putu.

Jedan od temeljnih principa fizike je princip konzervacije (očuvanja) energije, po kojem energija ne može ni nastati ni nestati nego se samo može pretvoriti iz jednog oblika u drugi. Dakle, ako tijelo izgubi kinetičku

energiju $\frac{1}{2}mv^2 \Big|_{t_0}^{t_1}$, onda se ona zapravo pretvara u neki drugi oblik energije, npr. potencijalnu ili toplinsku.

SILA, RAD I ENERGIJA

Rad koji sila izvede na tijelu dok se ono giba od $x = a$ do $x = b$, jednak je integralu te sile po tom putu:

$$R = \int_a^b F dx .$$

(Ako je sila F konstantna, onda je $R = F(b - a)$, tj, $Rad = Sila \cdot Pomak$.)

Ako se tijelo giba pod utjecajem sile F , onda je promjena kinetičke energije tog tijela, od trenutka t_0 do trenutka t_1 , jednaka radu te sile na odgovarajućem putu:

$$\frac{1}{2}mv^2 \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{x_0}^{x_1} F dx .$$

PRIMJER 2.

Ako tijelo mase $m = 1$ kg ispustimo s visine $h = 10$ m, kojom će brzinom ono udariti u tlo? Koliko se toplinske energije stvori tim udarom?

Rješenje:

Promjena kinetičke energije tijela, od ispuštanja do udara, jednaka je radu sile teže mg ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$), od mjesta ispuštanja do mjesta udara:

$$\frac{1}{2}mv^2 \Big|_0^t = \int_0^h mg dx .$$

Početna brzina tijela je 0. Ako brzinu pri udaru označimo sa v_h iz gornje jednačbe dobijamo:

$$\frac{1}{2}mv_h^2 = mgh ,$$

odakle slijedi:

$$v_h = \sqrt{2gh} = \sqrt{196} \approx 14 \text{ m/s} .$$

Kinetička energija se udarom u tlo pretvara u toplinsku, a njen je iznos u trenutku udara

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = 98 \text{ J.}$$

Tijelo je u trenutku ispuštanja imalo kinetičku energiju 0, pa se postavlja dodatno pitanje. Od kuda se stvorila kinetička energija, koju tijelo ima u trenutku udara? Iz potencijalne energije mgh , koju tijelo ima zbog visinske razlike h , početnog i krajnjeg položaja.

PRIMJER 3.

Koliko rada uloži dizač utega kada digne uteg od $m = 50 \text{ kg}$ na visinu od $h = 1 \text{ m}$. Kolika je njegova prosječna snaga tijekom dizanja, ako uteg digne za 2 sekunde?

Rješenje:

Prije i poslije dizanja uteg miruje, tj. ukupna promjena njegove kinetičke energije je 0. No to znači da je i ukupni rad sila koja djeluje na uteg tijekom njegova puta jednak nuli. Riječ je o dvije sile, sili teži i mišićnoj sili dizača. Rad sile teže je mgh (usp. prethodni primjer) pa isti toliki, samo suprotnog smjera, mora biti i rad dizača utega. Dakle, rad koji uloži dizač utega je

$$mgh = 50 \cdot 9.8 \cdot 2 = 980 \text{ J.}$$

(Drugim riječima, dizač je povećao potencijalnu energiju utega za mgh , pa je toliko rada morao i uložiti u njegovo dizanje.)

Prosječna snaga dizača, tijekom toga dizanja, je

$$S = \frac{980 \text{ J}}{2 \text{ s}} = 480 \text{ W} = 0.64 \text{ KS.}$$

PRIMJER 4.

Dokažimo da je $F \cdot v$ snaga kojom sila F djeluje na tijelo koje se giba brzinom v (pod njezinim utjecajem).

Rješenje:

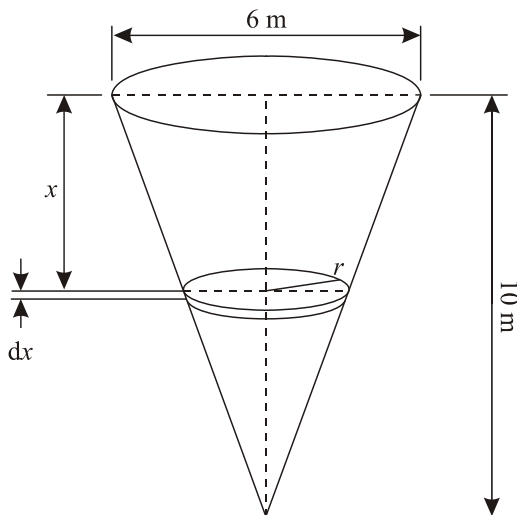
Promjena kinetičke energije tijela ΔE jednaka je uloženom radu sile F , tj. $\Delta E = \int_a^b F dx$. Iz temeljne veze derivacije i integrala slijedi $dE/dx = F$. Dakle snaga je:

$$S = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F \cdot v.$$

(Vrtimo li lončarsko kolo ili dječiji vrtuljak najefikasnije je djelovati silom potiska na vanjskom rubu kola ili vrtuljka, gdje je brzina najveća.)

PRIMJER 5.

Pumpa treba isprazniti spremnik vode u obliku stošca na sl.1. Koliko je energije potrebno za taj posao (1 m³ vode ima 10³ kg)?



Slika 1.

Rješenje:

Promotrimo sloj vode na dubini x debljine dx (v. sl.1.). Iz sličnosti odgovarajućih trokuta slijedi:

$$\frac{r}{10-x} = \frac{6}{10}, r = \frac{3}{5}(10-x),$$

pa je volumen tog sloja

$$dV = r^2 \pi dx = \frac{9\pi}{25}(10-x)^2 dx,$$

tj. masa mu je

$$dm = 10^3 dV = 90\pi(10-x)^2 dx.$$

Da bi se ta masa digla na visinu x (u polju sile teže mg) potreban je rad

$$dR = dm \cdot gx = 90g\pi(10-x)^2 x dx.$$

Dakle, ukupni rad potreban za pražnjenje cijeloga spremnika je

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{10} dR = 90g\pi \int_0^{10} (10-x)^2 x dx = 90g\pi \int_0^{10} (100x - 20x^2 + x^3) dx = \\ &= 90g\pi \left[50x^2 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{10} = 90g\pi \frac{10^4}{12} = 7.5 \cdot 10^4 g\pi \approx 2.3 \cdot 10^6 \text{ J.} \end{aligned}$$

Dakle, energija potrebna za pražnjenje spremnika je $2.3 \cdot 10^6$ J.

PRIMJER 6.

Pumpa koja prazni spremnik vode iz prethodnog primjera ima izlaznu snagu od 10^5 J na sat ($3.6 \cdot 10^8$ W),

- (a) Kolika je razina vode u spremniku nakon 6 minuta pražnjenja?
 (b) Kojom brzinom opada razina vode u spremniku u tom trenutku?

Rješenje:

- (a) Ukupna energija potrebna da se ispumpa gornjih h metara vode iz spremnika je (usp. prethodni primjer):

$$\int_0^h 90g\pi(10-x)^2 x dx = 90g\pi \left(50h^2 - \frac{20}{3}h^3 + \frac{1}{4}h^4 \right) \approx 2770h^2 \left(50 - \frac{20}{3}h + \frac{1}{4}h^2 \right).$$

Na kraju 6 minute (1/10 sata) pumpa je obavila rad od 10^4 Joulea, tj. uložila je u pumpanje 10^4 Joula. Dakle,

$$2770h^2 \left(50 - \frac{20}{3}h + \frac{1}{4}h^2 \right) = 10^4,$$

odakle slijedi (nakon numeričkog rješavanja te jednačbe) da je $h \approx 0.27$ m. Nakon 6 minuta pražnjenja razina vode spustila se za 0.27 m.

- (b) Nakon t sati pražnjenja obavljen je rad od $10^5 t$ Joulea. Dakle,

$$90g\pi \int_0^h (10-x)^2 x dx = 10^5 t,$$

gdje je h dubina gornjega sloja ispumpanog za t sati. Deriviranjem obje strane posljednje jednačbe po t nalazimo

$$90g\pi(10-h)^2 h \frac{dh}{dt} = 10^5,$$

odakle slijedi

$$\frac{dh}{dt} = \frac{10^4}{9g\pi(10-x)^2 h}.$$

Za $h = 0.27$ to iznosi 1.41 m/h.