

## 5. Neodređeni integral

### 5.1. Definicija i osnovne osobine

Ako za funkciju  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  postoji funkcija  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , koja ima izvod  $F'(x)$  nad intervalom  $(a, b)$  i pri tom važi

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b),$$

onda kažemo da je  $F(x)$  **primitivna funkcija** funkcije  $f(x)$  nad intervalom  $(a, b)$ .

**Definicija 5.1.** Skup svih primitivnih funkcija funkcije  $f(x)$  nad nekim intervalom  $(a, b)$  naziva se *neodređeni integral* funkcije  $f(x)$  i označava se sa  $\int f(x) dx$ , odnosno

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\},$$

što kraće pišemo

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C.}$$

U ovoj definiciji  $f(x)$  se naziva podintegralna funkcija,  $f(x)dx$  podintegralni izraz, a  $C$  je integraciona konstanta.

**Teorema 5.2.** *Ako je funkcija  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna nad intervalom  $(a, b)$  tada postoji primitivna funkcija  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  nad intervalom  $(a, b)$ , tj. postoji neodređeni integral funkcije  $f(x)$  nad datim intervalom.*

### Osobine neodređenog integrala

1.  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x),$
2.  $\int f'(x) dx = f(x) + C,$
3.  $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, a \in \mathbb{R},$
4.  $\int (f_1(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx.$

### 5.2. Tablica integrala

$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1, a \neq 0$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C, a \neq 0$
$\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + c, a \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C, a \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C_1, a > 0$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln \left  x + \sqrt{x^2 + A} \right  + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	

Podrazumeva se da date jednakosti važe nad onim intervalima nad kojima su podintegralne funkcije neprekidne.

**Zadatak 5.3.** Izračunati: a)  $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$ ; b)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .

**Rešenje.**

$$\text{a) } \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + C = \frac{8}{15} x^{\frac{15}{8}} + C$$

$$\text{b) } \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

### 5.3. Integracija pomoću smene

Neka surjekcija  $\varphi : I_1 \rightarrow I \subset \mathbb{R}$  ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom  $I_1$  i neka za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  postoji neodređeni integral nad intervalom  $I$ . Tada važi

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,}$$

(pri tom se podrazumeva da se posle integracije desne strane stavi  $t = \varphi^{-1}(x)$ ).

**Zadatak 5.4.** Izračunati  $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$ .

**Rešenje.**

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

**Zadatak 5.5.** Izračunati  $I = \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4 + x^2} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4 + x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{1 + (\frac{x}{2})^2} dx = \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \\ 2dt = \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int t dt = \frac{t^2}{4} + C = \frac{1}{4} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right)^2 + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.6.** Izračunati  $I = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x \ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x \ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2} dx = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx + \int \frac{x \ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2} \\ s = \ln(1 + x^2) \Rightarrow ds = \frac{2x dx}{1+x^2} \end{array} \right] = \int e^t dt + \frac{1}{2} \int s ds + \int \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= e^t + \frac{s^2}{4} + \operatorname{arctg} x + C = e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4} \ln^2(1 + x^2) + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.7.** Izračunati  $I = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow 1+\ln x = t^2 \\ \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t dt \end{array} \right] \\ &= \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (t^2-1) dt = 2 \frac{t^3}{3} - 2t + C \\ &= \frac{2}{3} t (t^2-3) + C = \frac{2}{3} \sqrt{1+\ln x} (\ln x - 2) + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.8.** Izračunati  $I = \int \sqrt{a^2-x^2} dx$   $a > 0$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{a} \end{array} \right] = \int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \cdot a \cos t dt \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a}{2} x \sqrt{1-\sin^2 t} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a}{2} x \sqrt{1-\sin^2 \left( \arcsin \frac{x}{a} \right)} + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a}{2} x \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C. \end{aligned}$$

#### 5.4. Parcijalna integracija

Neka su  $u(x)$  i  $v(x)$  diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije  $u'(x)v(x)$ . Tada postoji primitivna funkcija funkcije  $u(x)v'(x)$  i pri tom važi jednakost

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du.}$$

**Zadatak 5.9.** Izračunati  $I = \int \ln x dx$ .

**Rešenje.**

$$I = \int \ln x dx = \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

**Zadatak 5.10.** Izračunati  $I = \int x^5 e^{-x^2} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int x^5 e^{-x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} -x^2 = t \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int t^2 e^t dt = \left[ \begin{array}{l} u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left( t^2 e^t - 2 \int t e^t dt \right) = -\frac{1}{2} t^2 e^t + \int t e^t dt = \left[ \begin{array}{l} u_1 = t \Rightarrow du_1 = dt \\ dv_1 = e^t dt \Rightarrow v_1 = e^t \end{array} \right] \\ &= -\frac{1}{2} t^2 e^t + t e^t - \int e^t dt = -\frac{1}{2} t^2 e^t + t e^t - e^t + C = -e^{-x^2} \left( 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.11.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \cdot x dx \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \cdot x dx}_{I_2} \end{aligned}$$

Sada ćemo uvesti smenu kako bismo našli rešenje integrala  $I_2$ . Integral rešavamo parcijalnom integracijom na sledeći način

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$\begin{aligned} dv &= \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2} \Rightarrow v = \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2} = \left[ t = x^2 + a^2 \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2}, \end{aligned}$$

pa je

$$I_2 = \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \cdot x dx = -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2 + a^2)} + C.$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2 + a^2)} \right) + C \\ &= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.12.** Izračunati  $I = \int \cos^2(\ln x) dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^2(\ln x) dx = \left[ \begin{array}{l} u = \cos^2(\ln x) \Rightarrow du = 2 \cos(\ln x) \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] \\ &= x \cos^2(\ln x) + 2 \int \cos(\ln x) \sin(\ln x) dx = x \cos^2(\ln x) + \int \sin(2 \ln x) dx, \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili trigonometrijsku formulu  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ .

Dalje, neka je

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin(2 \ln x) dx = \left[ \begin{array}{l} u = \sin(2 \ln x) \Rightarrow du = \frac{2}{x} \cos(2 \ln x) dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] \\ &= x \sin(2 \ln x) - 2 \int \cos(2 \ln x) dx = \left[ \begin{array}{l} u_1 = \cos(2 \ln x) \Rightarrow du_1 = -\sin(2 \ln x) \frac{2dx}{x} \\ dv_1 = dx \Rightarrow v_1 = x \end{array} \right] \\ &= x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x) - 4 \underbrace{\int \sin(2 \ln x) dx}_{I_1}, \end{aligned}$$

pa dobijamo da je

$$I_1 = \frac{1}{5} \left( x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x) \right) + C.$$

Konačno rešenje je

$$I = \int \cos^2(\ln x) dx = x \cos^2(\ln x) + \frac{1}{5} \left( x \sin(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x) \right) + C.$$

**Napomena:**

1. Integrale oblika  $\int P_n(x) \sin(ax) dx$  i  $\int P_n(x) \cos(ax) dx$ , gde je  $P_n(x)$  polinom  $n$ -tog stepena, rešavamo parcijalnom integracijom

$$\left[ u = P_n(x), dv = \sin(ax) dx \right] \text{ odnosno } \left[ u = P_n(x), dv = \cos(ax) dx \right]$$

i potrebno je uraditi  $n$  puta parcijalnu integraciju.

2. Integral oblika  $\int P_n(x) \ln^m x dx$ , gde je  $P_n(x)$  polinom  $n$ -tog stepena i  $m \in \mathbb{N}$ , rešavamo parcijalnom integracijom

$$\left[ u = \ln^m x, dv = P_n(x) dx \right]$$

i potrebno je uraditi  $m$  puta parcijalnu integraciju.

3. Integral oblika  $\int P_n(x) e^{ax} dx$ , gde je  $P_n(x)$  polinom  $n$ -tog stepena i  $a \in \mathbb{R}$ , rešavamo parcijalnom integracijom

$$\left[ u = P_n(x)x, dv = e^{ax} dx \right]$$

i potrebno je uraditi  $n$  puta parcijalnu integraciju.

**5.5. Integrali sa kvadratnim trinomom**

I Integrali oblika  $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$  ( $a \neq 0, b^2 - 4ac < 0$ ) rešavaju se na sledeći način:

a)  $m = 0$

$$ax^2 + bx + c = a[(x+k)^2 + l], \quad k, l = \text{const.}$$

$$\int \frac{n}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{n}{a} \int \frac{dx}{(x+k)^2 + l}$$

b)  $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx &= \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b) + n - \frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c} dx \\ &= \frac{m}{2a} \underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx}_{[t=ax^2+bx+c \Rightarrow dt=2ax+b]} + \underbrace{\int \frac{n - \frac{mb}{2a}}{ax^2+bx+c} dx.}_a \end{aligned}$$

Primitimo da je prva jednakost dobijena na osnovu ideje da se u brojiocu dobije izvod imenioca, kako bi se nakon toga uvela odgovarajuća smena.

**Zadatak 5.13.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \left[ \begin{array}{l} x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right] \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.14.** Izračunati  $I = \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4) - 2 + 6}{x^2-4x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2-4x+5} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + 4 \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \left[ \begin{array}{l} x^2-4x+5 = t \Rightarrow (2x-4) dx = dt \\ x-2 = s \Rightarrow dx = ds \end{array} \right] \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} + 4 \int \frac{ds}{s^2+1} = \frac{3}{2} \ln|t| + 4 \operatorname{arctg} s + C = \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+5) + 4 \operatorname{arctg}(x-2) + C. \end{aligned}$$

II Integrali oblika  $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$  ( $a \neq 0$ ,  $b^2-4ac < 0$ ) rešavaju se na sličan način kao integrali oblika I.

III Integrali oblika  $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$  ( $m \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b^2-4ac < 0$ ) se pomoću smene  $mx+n = \frac{1}{t}$  svode na integrale oblika II.

**Zadatak 5.15.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \left[ \begin{array}{l} x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \\ \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right] \\ &= - \int \frac{\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2} + 2\frac{1-t}{t}}} = - \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{(1-t)^2+2t-2t^2}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= - \arcsin t + C = - \arcsin \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

IV Integrali oblika  $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$  ( $a \neq 0$ ,  $b^2-4ac < 0$ ) svode se na integrale oblika  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$  i  $\int \sqrt{x^2+A} dx$ .

**Zadatak 5.16.** Izračunati  $I = \int \sqrt{x-x^2} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x-x^2} dx = \left[ x-x^2 = -\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \right] \\ &= \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x-\frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right] \\ &= \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} dt = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - t^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2x-1}{4} \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8} \arcsin(2x-1) + C. \end{aligned}$$

### 5.6. Integrali racionalnih funkcija

Racionalna funkcija je količnik dva polinoma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Prava racionalna funkcija je racionalna funkcija za koju važi  $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ . Svaku nepravu racionalnu funkciju ( $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ ) možemo napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)},$$

gde je  $T(x)$  polinom (količnik pri deljenju polinoma  $P(x)$  polinomom  $Q(x)$ ), a  $\frac{R_1(x)}{Q(x)}$  je prava racionalna funkcija ( $R_1(x)$  je ostatak pri deljenju  $P(x)$  sa  $Q(x)$ , pa je  $\deg(R_1(x)) < \deg(Q(x))$ ).

Posmatrajmo sada pravu racionalnu funkciju, neka je  $P(x)$  polinom stepena manjeg od  $n$ , a  $Q(x)$  polinom oblika

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_p)^{k_p} (x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1} \cdots (x^2 + b_qx + c_q)^{\ell_q},$$

gde je  $k_1 + k_2 + \cdots + k_p + 2(\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_q) = n$ ,  $n$  je stepen polinoma  $Q(x)$ ,  $a_i, b_j$  i  $c_j$  su realni brojevi za koje važi  $b_j^2 - 4c_j < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$  (drugim rečima, polinom  $Q(x)$  je faktorisan nad poljem  $\mathbb{R}$ ).

Tada se  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  može napisati u obliku

$$R(x) = \left( \frac{A_{11}}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) + \cdots + \left( \frac{A_{p1}}{x - a_p} + \cdots + \frac{A_{pk_p}}{(x - a_p)^{k_p}} \right) + \left( \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{B_{1\ell_1}x + C_{1\ell_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1}} \right) + \cdots + \left( \frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2 + b_qx + c_q} + \cdots + \frac{B_{q\ell_q}x + C_{q\ell_q}}{(x^2 + b_qx + c_q)^{\ell_q}} \right).$$

Nepoznati koeficijenti  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  i  $C_{ij}$  određuju se tako što se gornja jednakost pomnoži sa  $Q(x)$ , što nam daje jednakost polinoma, te izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo sistem jednačina.

Razlomci oblika  $\frac{A}{(x - a)^k}$  i  $\frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^\ell}$  nazivaju se prosti ili parcijalni razlomci.

**Zadatak 5.17.** Izračunati  $I = \int \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx$ .

**Rešenje.**

Podintegralna funkcija je prava racionalna funkcija. Međutim, za rastavljanje na sumu parcijalnih razlomaka prvo je potrebno faktorisati polinom u imeniocu, tj.

$$\frac{x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{x^2}{(x - 1)^2(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{(x - 2)^2}.$$

Nakon množenja cele jednakosti sa  $(x - 1)^2(x - 2)^2$  sledi

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x - 1)(x - 2)^2 + B(x - 2)^2 + C(x - 1)^2(x - 2) + D(x - 1)^2 \\ &= x^3(A + C) + x^2(-5A + B - 4C + D) + x(8A - 4B + 5C - 2D) + (-4A + 4B - 2C + D) \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} A & & + & C & & = & 0 \\ -5A & + & B & - & 4C & + & D = 1 \\ 8A & - & 4B & + & 5C & - & 2D = 0 \\ -4A & + & 4B & - & 2C & + & D = 0 \end{aligned}$$

čijim rešavanjem se dobija  $A = 4$ ,  $B = 1$ ,  $C = -4$  i  $D = 4$ . Otuda je

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{(x^3 - 3x + 2)^2} dx = \int \left( \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx \\ &= 4 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= \left[ \begin{array}{l} x-1 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-2 = s \Rightarrow dx = ds \end{array} \right] = 4 \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} - 4 \int \frac{ds}{s} + 4 \int \frac{ds}{s^2} \\ &= 4 \ln |t| - \frac{1}{t} - 4 \ln |s| - \frac{4}{s} + C = 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + C \\ &= \ln \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^4 - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + C. \end{aligned}$$

### 5.7. Integrali iracionalnih funkcija

**I tip:** Integral oblika  $\int R \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_k} \right] dx$ .

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od  $x$  i od različitih stepena izraza  $\frac{ax+b}{cx+d}$ , pri čemu je  $ad - bc \neq 0$  (inače se izraz svodi na konstantu).

Neka je  $s$  najmanji zajednički sadržalac imenilaca racionalnih eksponenata  $r_1, r_2, \dots, r_k$ . Tada se smenom  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$  polazni integral svodi na integral racionalne funkcije.

**Zadatak 5.18.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}}$ .

**Rešenje.**

Primitimo da je podintegralna funkcija racionalna funkcija po  $x$  i da se javlja izraz  $x+1$  na stepene redom  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{1}{2}$ . Kako je  $NZS\{2, 3\} = 6$ , smena koja se uvodi je  $x+1 = t^6$ .

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}} = \left[ \begin{array}{l} x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] \\ &= \int \frac{6t^5}{t^4 - t^3} dt = 6 \int \frac{t^5}{t^3(t-1)} dt = 6 \int \frac{t^2}{t-1} dt. \end{aligned}$$

U poslednjem integralu podintegralna funkcija je nepravna racionalna funkcija. Potrebno je podeliti  $t^2$  sa  $t-1$ . Može se izvršiti klasično deljenje polinoma, međutim oduzimanjem i dodavanjem broja 1 brojiocu brže ćemo izvršiti deljenje.

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = 6 \int \frac{(t-1)(t+1) + 1}{t-1} dt = 6 \int (t+1) dt + 6 \int \frac{dt}{t-1} \\ &= 3t^2 + 6t + 6 \ln |t-1| + C = 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6 \ln |\sqrt[6]{x+1} - 1| + C. \end{aligned}$$

**II tip:** Integrali binomnog diferencijala

Integral binomnog diferencijala je integral oblika  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ , gde su  $m$ ,  $n$  i  $p$  racionalni brojevi ( $n, p \neq 0$ ), a  $a$  i  $b$  realni brojevi različiti od nule. Uvođenjem pomoćne smene

$$x^n = t, \quad \text{tj.} \quad x = t^{\frac{1}{n}},$$

odakle je

$$dx = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt,$$

integral se svodi na

$$\frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p dt = \frac{1}{n} \int t^q (a+bt)^p dt,$$

gde je  $\frac{m+1}{n} - 1 = q$  takođe racionalan broj.

Uvođenje naredne smene zavisi od vrednosti  $p$  i  $q$ . Razlikujemo tri slučaja:

1.  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ .

Tada je  $\int t^{\frac{r}{s}} (a+bt)^p dt = \int R(t, t^{\frac{r}{s}}) dt$ , koji se smenom  $t = z^s$  svodi na integral racionalne funkcije od  $z$ .

2.  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $p = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ .

Tada je  $\int t^q (a+bt)^{\frac{r}{s}} dt = \int R(t, (a+bt)^{\frac{r}{s}}) dt$ , koji se smenom  $a+bt = z^s$  svodi na integral racionalne funkcije od  $z$ .

3.  $p+q \in \mathbb{Z}$  i neka je  $p = \frac{r}{s}$ .

Tada je  $\int t^q (a+bt)^p dt = \int t^{p+q} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt = \int R\left[t, \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dt$ , pri čemu se poslednji integral smenom  $\frac{a+bt}{t} = z^s$  svodi na integral racionalne funkcije od  $z$ .

Naredna tri zadatka će ilustrovati redom navedene slučajeve.

**Zadatak 5.19.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})}$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}}(4-x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx = \left[ \begin{array}{l} x^{\frac{1}{3}} = t \Rightarrow x = t^3 \\ \Rightarrow dx = 3t^2 dt \end{array} \right] \\ &= 3 \int t^{-\frac{3}{2}}(4-t)^{-1} t^2 dt = 3 \int t^{\frac{1}{2}}(4-t)^{-1} dt = \left[ \begin{array}{l} t = z^2 \\ dt = 2z dz \end{array} \right] \\ &= 6 \int z(4-z^2)^{-1} z dz = 6 \int \frac{z^2}{4-z^2} dz = -6 \int \frac{z^2-4+4}{z^2-4} dz \\ &= -6 \int dz - 24 \int \frac{dz}{z^2-2^2} = -6z - 24 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{z-2}{z+2} \right| + C \\ &= -6t^{\frac{1}{2}} - 6 \ln \left| \frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}+2} \right| + C = -6\sqrt[6]{x} - 6 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.20.** Izračunati  $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \begin{array}{l} x^{\frac{1}{3}} = t \Rightarrow x = t^3 \\ \Rightarrow dx = 3t^2 dt \end{array} \right] \\ &= 3 \int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{2}} t^2 dt = 3 \int (1+t)^{\frac{1}{2}} dt = \left[ \begin{array}{l} 1+t = z^2 \\ dt = 2z dz \end{array} \right] \\ &= 6 \int z^2 dz = 6 \cdot \frac{z^3}{3} + C = 2 \cdot (\sqrt{1+t})^3 + C = 2 \cdot (1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.21.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \left[ \begin{array}{l} x^2 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-1} (1+t)^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}} (1+t)^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} \cdot \frac{(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-3} \cdot \left( \frac{1+t}{t} \right)^{-\frac{3}{2}} dt = \left[ \begin{array}{l} \frac{1+t}{t} = z^2 \Rightarrow t = \frac{1}{z^2-1} \\ \Rightarrow dt = \frac{-2z}{(z^2-1)^2} dz \end{array} \right] \\ &= - \int \frac{(z^2-1)^3}{z^3} \cdot \frac{z}{(z^2-1)^2} dz = - \int \frac{z^2-1}{z^2} dz = -z - \frac{1}{z} + C \\ &= -\sqrt{\frac{1+t}{t}} - \sqrt{\frac{t}{1+t}} + C = -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

**III tip:** Integrali oblika  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Neka je dat integral  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ ,  $a \neq 0$ , gde je  $R$  racionalna funkcija od  $x$  i  $\sqrt{ax^2+bx+c}$ . Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije primenom jedne od Ojlerovih smena.

- 1)  $a > 0 \rightsquigarrow$  smena:  $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$  (prva Ojlerova smena);
- 2)  $c > 0 \rightsquigarrow$  smena:  $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$  (druga Ojlerova smena);
- 3)  $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \rightsquigarrow$  smena:  $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1) \cdot t$  (treća Ojlerova smena).

**Zadatak 5.22.** Izračunati  $I = \int \frac{2 dx}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}$ .

**Rešenje.**

Kako je  $a > 0$  koristimo prvu Ojlerovu smenu:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2x+3} = t-x &\Rightarrow x^2+2x+3 = t^2-2xt+x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-3}{2t+2} \\ \Rightarrow dx &= \frac{2t(2t+2) - (t^2-3)2}{4(t+1)^2} dt = \frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2} dt \\ \Rightarrow x+1+\sqrt{x^2+2x+3} &= t+1. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \int \frac{2 dx}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{2 \cdot \frac{t^2+2t+3}{2(t+1)^2} dt}{t+1} = \int \frac{t^2+2t+3}{(t+1)^3} dt.$$

Rastavljamo podintegralnu funkciju na zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{t^2+2t+3}{(t+1)^3} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} = \frac{A(t+1)^2 + B(t+1) + C}{(t+1)^3},$$

$$t^2+2t+3 = At^2 + (2A+B)t + A+B+C.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcl} A & & = 1 \\ 2A + B & & = 2 \\ A + B + C & & = 3 \end{array}$$

dobija se da je  $A = 1$ ,  $B = 0$  i  $C = 2$ , odakle je

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{t+1} + 2 \int \frac{dt}{(t+1)^3} = \left[ \begin{array}{l} t+1 = s \\ dt = ds \end{array} \right] = \int \frac{ds}{s} + 2 \int \frac{ds}{s^3} \\ &= \ln |s| + 2 \cdot \frac{s^{-2}}{-2} + C = \ln |t+1| - \frac{1}{(t+1)^2} + C, \end{aligned}$$

gde je  $t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ .

**Zadatak 5.23.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$ .

**Rešenje.**

Kako je  $c > 0$  koristimo drugu Ojlerovu smenu:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 2x - x^2} = xt - 1 &\Rightarrow 1 - 2x - x^2 = x^2 t^2 - 2xt + 1 \Rightarrow x = \frac{2t - 2}{t^2 + 1} \\ \Rightarrow dx &= \frac{2(t^2 + 1) - (2t - 2)2t}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{-2(t^2 - 2t - 1)}{(t^2 + 1)^2} dt \\ \Rightarrow 1 + \sqrt{1 - 2x - x^2} = xt &= \frac{2(t^2 - t)}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{\frac{-2(t^2 - 2t - 1)}{(t^2 + 1)^2} dt}{\frac{2(t^2 - t)}{t^2 + 1}} = - \int \frac{t^2 - 2t - 1}{t(t-1)(t^2 + 1)} dt.$$

Dakle, polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije, koju je potrebno rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka

$$\begin{aligned} \frac{t^2 - 2t - 1}{t(t-1)(t^2 + 1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} \\ &= \frac{A(t-1)(t^2 + 1) + Bt(t^2 + 1) + (Ct + D)t(t-1)}{t(t-1)(t^2 + 1)} \end{aligned}$$

Otuda je

$$t^2 - 2t - 1 = (A + B + C)t^3 + (-A - C + D)t^2 + (A + B - D)t - A.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcccccc} A & + & B & + & C & & = & 0 \\ -A & & & - & C & + & D & = & 1 \\ A & + & B & & & - & D & = & -2 \\ -A & & & & & & & = & -1 \end{array}$$

dobija se da je  $A = 1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 0$  i  $D = 2$ .

Konačno,

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= - \ln |t| + \ln |t-1| - 2 \operatorname{arctg} t + C \\ &= \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + C, \end{aligned}$$

gde je  $t = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}$ .

**Zadatak 5.24.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{2x-x^2}}$ .

**Rešenje.**

Kako je  $a = 0$ ,  $c < 0$  i  $2x - x^2 = x(2 - x)$ , koristićemo treću Ojlerovu smenu

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-x^2} = xt &\Rightarrow 2x-x^2 = x^2t^2 \Rightarrow x = \frac{2}{1+t^2} \\ \Rightarrow dx &= \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt \\ \Rightarrow x+1+\sqrt{2x-x^2} &= \frac{2}{1+t^2} + 1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2+2t+3}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Sada je

$$I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt}{\frac{t^2+2t+3}{1+t^2}} = \int \frac{-4t}{(t^2+1)(t^2+2t+3)} dt.$$

Potrebno je napisati podintegralnu funkciju u obliku zbira parcijanih razlomaka

$$\begin{aligned}\frac{-4t}{(t^2+1)(t^2+2t+3)} &= \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+2t+3} = \frac{(At+B)(t^2+2t+3) + (Ct+D)(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+2t+3)}, \\ -4t &= (A+C)t^3 + (2A+B+D)t^2 + (3A+2B+C)t + 3B+D.\end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcccc} A & & + & C & = & 0 \\ 2A & + & B & & + & D & = & 0 \\ 3A & + & 2B & + & C & & = & -4 \\ & & 3B & & & + & D & = & 0 \end{array}$$

dobija se da je  $A = -1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$  i  $D = 3$ . Otuda je

$$\begin{aligned}I &= -\int \frac{t+1}{t^2+1} dt + \int \frac{t+3}{t^2+2t+3} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{t^2+2t+3} dt + 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2+2} \\ &= \left[ \begin{array}{l} t^2+1 = s \Rightarrow 2t dt = ds \\ t^2+2t+3 = z \Rightarrow (2t+2) dt = dz \\ t+1 = m \Rightarrow dt = dm \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{ds}{s} - \int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} + 2 \int \frac{dm}{m^2+2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln|s| - \arctg t + \frac{1}{2} \ln|z| + \frac{2}{\sqrt{2}} \arctg \frac{m}{\sqrt{2}} + C = \ln \sqrt{\frac{t^2+2t+3}{t^2+1}} - \arctg t + \sqrt{2} \arctg \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C,\end{aligned}$$

gde je  $t = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$ .

Ojlerove smene u većini slučajeva dovode do integrala prilično glomaznih racionalnih funkcija, pa se preporučuje da se one koriste samo u slučajevima kada nema drugih mogućnosti integracije. Razmotrićemo zbog toga neke specijalne slučajeve integrala  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$  za koje postoje metodi rešavanja pogodniji od Ojlerovih smena.

#### a) Metod Ostrogradskog.

Integral oblika  $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ ,  $a \neq 0$ , gde je  $P_n(x)$  polinom  $n$ -tog stepena od  $x$  ( $n \geq 1$ ), rešava se primenom identiteta

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde je  $Q_{n-1}(x)$  polinom stepena  $n-1$  sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a  $\lambda$  neodređena (nepoznata) konstanta. Nađemo izvod leve i desne strane poslednje jednakosti i sređivanjem po stepenima od  $x$ , određuju se koeficijenti polinoma  $Q_{n-1}(x)$  i  $\lambda$ , rešavanjem sistema od  $n+1$  nepoznatih.

**Zadatak 5.25.** Izračunati  $I = \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$ .

**Rešenje.**

Kako je polinom u brojiocu drugog stepena, primenjujemo gore navedeni identitet za  $n = 2$ , dakle  $Q_1(x) = Ax + B$ , odnosno

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + x + 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Diferenciranjem ove jednakosti dobija se

$$\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = A\sqrt{x^2 + x + 1} + (Ax + B)\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Nakon množenja cele poslednje jednakosti sa  $2\sqrt{x^2 + x + 1}$ , sledi

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2 &= 2A(x^2 + x + 1) + 2Ax^2 + 2Bx + Ax + B + 2\lambda \\ &= 4Ax^2 + (3A + 2B)x + 2A + B + 2\lambda \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina:

$$\begin{aligned} 4A &= 2 \\ 3A + 2B &= 0 \\ 2A + B + 2\lambda &= 2 \end{aligned}$$

dobija se  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{3}{4}$  i  $\lambda = \frac{7}{8}$ , odakle je

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx &= \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{7}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} \\ &= \frac{1}{4}(2x - 3)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{7}{8} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.26.** Izračunati  $I = \int \sqrt{x^2 + a} dx$ .

**Rešenje.**

Podintegralnu funkciju možemo zapisati u obliku  $\sqrt{x^2 + a} = \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}}$ , pa imamo

$$\int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + a} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Diferenciranjem ove jednakosti dobija se

$$\frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} = A\sqrt{x^2 + a} + (Ax + B)\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Nakon množenja poslednje jednakosti sa  $\sqrt{x^2 + a}$ , sledi

$$\begin{aligned} x^2 + a &= A(x^2 + a) + (Ax + B)x + \lambda \\ &= 2Ax^2 + Bx + Aa + \lambda \end{aligned}$$

odakle je  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = 0$  i  $\lambda = \frac{a}{2}$ , pa imamo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C. \end{aligned}$$

b) Integral oblika  $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \neq 0$ , svodi se na integral prethodnog tipa uvođenjem smene  $x - \alpha = \frac{1}{t}$ .

**Zadatak 5.27.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} &= \left[ x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \Rightarrow x = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} \right] \\ &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^3} \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = \int \frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \sqrt{1-t^2} dt - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t - \arcsin t + C \\ &= \frac{1}{2(x+1)} \sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

### 5.8. Integrali trigonometrijskih funkcija

**I tip:** Integrali oblika  $\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx$ ,  $\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx$ ,  $\int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx$ , gde su  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , rešavaju se primenom trigonometrijskih identiteta:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha x) \cos(\beta x) &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x] \\ \sin(\alpha x) \sin(\beta x) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] \\ \cos(\alpha x) \cos(\beta x) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.28.** Izračunati  $I = \int \cos x \cos(2x) \cos(3x) dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \cos x \cos(2x) \cos(3x) dx = \frac{1}{2} \int \cos x [\cos x + \cos(5x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \cos x dx + \frac{1}{2} \int \cos x \cos(5x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int [1 + \cos(2x)] dx + \frac{1}{4} \int [\cos(4x) + \cos(6x)] dx \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \sin(2x) + \frac{1}{16} \sin(4x) + \frac{1}{24} \sin(6x) + C. \end{aligned}$$

**II tip:** Integrali oblika  $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Posmatrajmo integral kod koga je podintegralna funkcija racionalna funkcija od  $\sin x$  i  $\cos x$ . Svaki ovakav integral može se svesti na integral racionalne funkcije po novoj promenljivoj, tzv. univerzalnom trigonometrijskom smenom  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Otuda je  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ , odnosno  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ . Koristeći poznate trigonometrijske identitete dobijamo

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{i} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Sledi da je

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

gde je  $R_1$  nova racionalna funkcija.

**Zadatak 5.29.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} = \left[ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right] = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} dt \\ &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2dt}{2(t^2+2t+2)} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} \\ &= \operatorname{arctg}(t+1) + C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) + C. \end{aligned}$$

Smjena  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  često dovodi do integrala glomaznih racionalnih funkcija, pa je preporučljivo izbegavati je onda kada je to moguće. Navešćemo neke od specijalnih slučajeva integrala racionalne funkcije od  $\sin x$  i  $\cos x$ , u kojima je pogodnije uvesti neku drugu smenu.

- 1)  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \rightsquigarrow$  smena:  $\sin x = t$  ( $\cos x dx = dt$ );
- 2)  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \rightsquigarrow$  smena:  $\cos x = t$  ( $-\sin x dx = dt$ );
- 3)  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \rightsquigarrow$  smena:  $\operatorname{tg} x = t$  ( $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ).

**Zadatak 5.30.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)}$ .

**Rešenje.**

Koristeći trigonometrijske identitete  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ , sledi

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)} = \int \frac{dx}{2 \sin x \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} dx.$$

Podintegralna funkcija je

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)},$$

kako je

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} = -R(\sin x, \cos x),$$

uvodimo smenu  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$ .

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} \\ &= -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.31.** Izračunati  $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^4 x} \sin x dx \\ &= \left[ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right] = - \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^4} dt = - \int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt \\ &= - \int dt + 2 \int t^{-2} dt - \int t^{-4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C \\ &= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.32.** Izračunati  $I = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ .

**Rešenje.**

Prisetimo se trigonometrijskih identiteta:  $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$  i  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \end{aligned}$$

**Zadatak 5.33.** Izračunati integral  $I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$ .

**Rešenje.**

Deljenjem brojioca i imenioca podintegralne funkcije sa  $\cos x$ , dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 2} dx = \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right] \\ &= \int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t-1}{(t+2)(t^2+1)} dt. \end{aligned}$$

Polazni integral smo sveli na integral prave racionalne funkcije, pa je podintegralnu funkciju potrebno rastaviti na sumu parcijalnih razlomka.

$$\frac{t-1}{(t+2)(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct + 2Bt + 2C}{(t+2)(t^2+1)}$$

$$t-1 = (A+B)t^2 + (2B+C)t + A+2C$$

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{rcl} A + B & & = 1 \\ & 2B + C & = 1 \\ A + & 2C & = -1 \end{array}$$

dobijamo da je  $A = -\frac{3}{5}$ ,  $B = \frac{3}{5}$  i  $C = -\frac{1}{5}$ .

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3}{5} \int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5} \int \frac{3t-1}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{3}{5} \int \frac{dt}{t+2} + \frac{3}{10} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= -\frac{3}{5} \ln|t+2| + \frac{3}{10} \ln|t^2+1| - \frac{1}{5} \operatorname{arctg} t + C \\ &= -\frac{3}{5} \ln|\operatorname{tg} x + 2| - \frac{3}{10} \ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| - \frac{1}{5} x + C. \end{aligned}$$

**III tip:** Integrali oblika  $\int (\sin(\alpha x))^m (\cos(\beta x))^n dx$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  rešavaju se pomoću Ojlerovih formula:

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x i} - e^{-\alpha x i}}{2i}, \quad \cos(\beta x) = \frac{e^{\beta x i} + e^{-\beta x i}}{2}$$

**Zadatak 5.34.** Izračunati  $I = \int \sin^3 x \cos^2(3x) dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cos^2(3x) &= \left( \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \right)^3 \left( \frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi}}{-8i} \cdot \frac{e^{6xi} + 2 + e^{-6xi}}{4} \\ &= -\frac{1}{32i} \left( e^{9xi} + 2e^{3xi} + e^{-3xi} - 3e^{7xi} - 6e^{xi} - 3e^{-5xi} \right. \\ &\quad \left. + 3e^{5xi} + 6e^{-xi} + 3e^{-7xi} - e^{3xi} - 2e^{-3xi} - e^{-9xi} \right) \\ &= -\frac{1}{16} \cdot \frac{e^{9xi} - e^{-9xi}}{2i} + \frac{3}{16} \cdot \frac{e^{7xi} - e^{-7xi}}{2i} - \frac{3}{16} \cdot \frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} \\ &\quad - \frac{1}{16} \cdot \frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} + \frac{6}{16} \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \\ &= -\frac{1}{16} \sin 9x + \frac{3}{16} \sin 7x - \frac{3}{16} \sin 5x - \frac{1}{16} \sin 3x + \frac{6}{16} \sin x \end{aligned}$$

Sada rešavamo polazni integral

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{16} \int \sin 9x dx + \frac{3}{16} \int \sin 7x dx - \frac{3}{16} \int \sin 5x dx - \frac{1}{16} \int \sin 3x dx + \frac{6}{16} \int \sin x dx \\ &= \frac{1}{144} \cos 9x - \frac{3}{112} \cos 7x + \frac{3}{80} \cos 5x + \frac{1}{48} \cos 3x - \frac{3}{8} \cos x + C. \end{aligned}$$

**IV tip:** Integral oblika

$$I = \int \left( P_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) + Q_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \right) dx,$$

gde je  $P_n(x)$  polinom  $n$ -tog stepena,  $Q_m(x)$  polinom  $m$ -tog stepena, a  $\alpha$  i  $\beta$  proizvoljne konstante, rešava se primenom identiteta

$$I = R_k(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) + T_k(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C,$$

gde su  $R_k(x)$  i  $T_k(x)$  polinomi  $k$ -tog stepena sa neodređenim (nepoznatim) koeficijentima, a  $k = \max\{m, n\}$ . Diferenciranjem leve i desne strane, izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od  $x$  i rešavanjem sistema od  $2k+2$  jednačina sa  $2k+2$  nepoznatih, dobijaju se koeficijenti polinoma  $R_k(x)$  i  $T_k(x)$ .

**Zadatak 5.35.** Izračunati  $I = \int \left( (x^2 - 2)e^{2x} \sin x + xe^{2x} \cos x \right) dx$ .

**Rešenje.**

U ovom slučaju stepeni polinoma su  $n = 2$ ,  $m = 1$ , pa je  $k = \max\{2, 1\} = 2$ . Nepoznati polinomi su  $R_2(x) = Ax^2 + Bx + C$  i  $S_2(x) = Dx^2 + Ex + F$ . Primenjujemo gore navedeni identitet.

$$\begin{aligned} & \int \left( (x^2 - 2)e^{2x} \sin x + xe^{2x} \cos x \right) dx \\ &= [Ax^2 + Bx + C] e^{2x} \sin x + [Dx^2 + Ex + F] e^{2x} \cos x + C / ' \\ (x^2 - 2)e^{2x} \sin x + xe^{2x} \cos x &= \\ &= [2Ax + B] e^{2x} \sin x + [Ax^2 + Bx + C] e^{2x} (2 \sin x + \cos x) \\ &\quad + [2Dx + E] e^{2x} \cos x + [Dx^2 + Ex + F] e^{2x} (2 \cos x - \sin x) \\ &= e^{2x} \sin x [2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C - Dx^2 - Ex - F] \\ &\quad + e^{2x} \cos x [Ax^2 + Bx + C + 2Dx + E + 2Dx^2 + 2Ex + 2F] \\ &= [(2A - D)x^2 + (2A + 2B - E)x + B + 2C - F] e^{2x} \sin x \\ &\quad + [(A + 2D)x^2 + (B + 2D + 2E)x + C + E + 2F] e^{2x} \cos x. \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{cccccc} 2A & & & -D & & = & 1 \\ 2A & +2B & & & -E & = & 0 \\ & B & +2C & & & -F & = & -2 \\ A & & & +2D & & & = & 0 \\ & B & & +2D & +2E & & = & 1 \\ & & C & & +E & +2F & = & 0 \end{array}$$

dobijamo  $A = \frac{2}{5}$ ,  $B = -\frac{1}{25}$ ,  $C = -\frac{116}{125}$ ,  $D = -\frac{1}{5}$ ,  $E = \frac{18}{25}$  i  $F = \frac{13}{125}$ .

Dakle,

$$I = \left( \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{116}{125} \right) e^{2x} \sin x + \left( -\frac{1}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{13}{125} \right) e^{2x} \cos x + C.$$

## 5.9. Integrali eksponencijalne funkcije

Integral oblika  $\int R(e^x) dx$ , gde je  $R$  racionalna funkcija od  $e^x$ , rešava se smenom  $e^x = t$ . Tada je  $x = \ln t$ , odakle je  $dx = \frac{dt}{t}$ , pa je  $\int R(e^x) dx = \int R(t) \frac{dt}{t}$ , što znači da se integral svodi na integral racionalne funkcije od  $t$ .

**Zadatak 5.36.** Izračunati  $I = \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1 + e^x)} dx$ .

**Rešenje.**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1 + e^x)} dx = \left[ \begin{array}{l} e^{\frac{x}{2}} = t \Rightarrow x = 2 \ln t \\ dx = \frac{2}{t} dt \end{array} \right] \\ &= 2 \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1 + t^2)} \cdot \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2(1 + t^2)} dt \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} t \Rightarrow du = \frac{dt}{1+t^2} \\ dv = \frac{dt}{t^2(t^2+1)} \Rightarrow v = \int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)} dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \end{array} \right] \\ &= 2 \left( -\frac{1}{t} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}^2 t + \underbrace{\int \frac{dt}{t(1+t^2)}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt}_{I_2} \right) \end{aligned}$$

Sada je

$$I_1 = \int \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \ln|t| - \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C_1,$$

$$I_2 = \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt = \left[ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} t = z \\ \frac{dt}{1+t^2} = dz \end{array} \right] = \int z dz = \frac{z^2}{2} + C_2 = \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} + C_2.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2 \operatorname{arctg} t}{t} - 2 \operatorname{arctg}^2 t + 2 \ln|t| - \ln|1+t^2| + \operatorname{arctg}^2 t + C \\ &= -\frac{2 \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} - \operatorname{arctg}^2 e^{\frac{x}{2}} + \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C. \end{aligned}$$

### 5.10. Zadaci za samostalan rad

Izračunati sledeće integrale:

$$1. I = \int \frac{dx}{7x^2 - 8}$$

$$2. I = \int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx$$

$$3. I = \int (x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$4. I = \int \arcsin x \ln x dx$$

$$5. I = \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$$

$$6. I = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$$

$$7. I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$$

$$8. I = \int \frac{x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} dx$$

$$9. I = \int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx.$$

$$10. I = \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$11. I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} (1 + \sqrt[6]{x})}.$$

$$12. I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}.$$

$$13. I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x - x^2}} dx.$$

$$14. I = \int \sin(6x) \cos(7x) dx.$$

$$15. I = \int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

$$16. I = \int (x+1) \cdot e^{2x} \cos x dx.$$