7. Diferencijalne jednačine

7.1. Diferencijalne jednačine prvog reda

Jednačina oblika $F(x,y,y')=0$, odnosno oblika $y'=f(x,y)$, naziva se diferencijalna jednačina prvog reda.

1. $F(x,y,y')=0$ je opšti ili implicitni oblik diferencijalne jednačine
2. $y'=f(x,y)$ je normalni ili eksplicitni oblik diferencijalne jednačine

Razlikujemo tri vrste rešenja diferencijalne jednačine:

1. **Opšte rešenje** diferencijalne jednačine oblika $F(x,y,y')=0$ je funkcija $y=y(x,C)$, koja zavisi od $C\in\mathbb{R}$, a za koju važi:
   - zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu, tj. $F\big(x,y(x,C),y'(x,C)\big)=0$;
   - za svaki početni uslov $(x,y)=(x_0,y_0)$ iz oblasti rešenja D, može se jednoznačno odrediti konstanta $C=C_0$, takva da $y=y(x,C_0)$ zadovoljava početnu jednačinu, tj. $y_0=y(x_0,C_0)$. Geometrijski ovo znači da tražimo ono rešenje koje prolazi kroz tačku (x_0,y_0).
2. **Partikularno rešenje** diferencijalne jednačine je ona funkcija koja se dobija iz opšteg rešenja za $C=C_0$.
3. **Singularno rešenje** se obično dobija iz ograničenja i nije ga moguće dobiti iz opšteg ni za jednu vrednost konstante C.

U nastavku se bavimo rešavanjem nekih tipova diferencijalnih jednačina prvog reda.

7.1.1. Jednačine koje razdvajaju promenljive

Diferencijalna jednačina ovog tipa je oblika $y'=F(x,y)$, čija se desna strana može zapisati u obliku proizvoda dve neprekidne funkcije, od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj.

$$y'=f(x)g(y).$$

Sada imamo,

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx,\;\; g(y)\neq 0\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx.$$

Zadatak 7.1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y(x^2-1)y'=-x(y^2-1).$$

Rešenje: Koristeći jednakost $y'=\dfrac{dy}{dx}$, imamo da je

$$y(x^2-1)\,\frac{dy}{dx}=-x(y^2-1)\quad\Rightarrow\quad\frac{y}{y^2-1}\,dy=-\frac{x}{x^2-1}\,dx.$$

Uzimajući integral leve i desne strane jednakosti dobijamo,

$$\int\frac{y}{y^2-1}\,dy=-\int\frac{x}{x^2-1}\,dx\quad\Leftrightarrow\quad\int\frac{2y}{y^2-1}\,dy=-\int\frac{2x}{x^2-1}\,dx.$$

Levi integral rešavamo smenom $t=y^2-1$, odakle je $dt=2y\,dy$. Slično, desni integral rešavamo smenom $s=x^2-1$, odakle je $ds=2x\,dx$, te dobijamo

$$\int\frac{dt}{t}=-\int\frac{ds}{s}\quad\Rightarrow\quad\ln|t|=-\ln|s|+\ln|C|.$$

Sada, vraćanjem smena dobijamo opšte rešenje jednačine

$$\begin{aligned}\ln|t| = \ln\left|\frac{C}{s}\right| \quad &\Rightarrow \quad \ln|y^2-1| = \ln\left|\frac{C}{x^2-1}\right| \\ &\Rightarrow \quad |y^2-1| = \left|\frac{C}{x^2-1}\right| \\ &\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad y^2 = 1+\frac{C}{x^2-1} \\ &\Rightarrow \quad y = \sqrt{1+\frac{C}{x^2-1}} \ \vee \ y = -\sqrt{1+\frac{C}{x^2-1}}.\end{aligned}$$

$(*)$ Primetimo da važi

$$|g(y)| = |Cf(x)| \quad \Rightarrow \quad g(y) = \pm Cf(x).$$

Međutim, kako je očigledno

$$\{Cf(x) : C \in \mathbb{R}\} = \{-Cf(x) : C \in \mathbb{R}\},$$

dovoljno je uzeti $g(y) = Cf(x)$.

Zadatak 7.2. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = 2xy - y$.

Rešenje: Transformacijom date jednačine dobijamo

$$y' = y(2x-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y(2x-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = (2x-1)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int (2x-1)\,dx.$$

Kada rešimo dobijene tablične integrale imamo,

$$\ln|y| = x^2 - x + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{x^2-x+C} = e^{x^2-x}\cdot e^C = C_1 e^{x^2-x}.$$

Zadatak 7.3. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1+e^x)yy' = e^x,$$

koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.

Rešenje: Kao i u prethodnim primerima, ideja je da prvo grupišemo sve funkcije po x uz dx, i sve funkcije po y uz dy. Stoga,

$$(1+e^x)y\,\frac{dy}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$$

Levi integral je tablični, dok se desni rešava smenom $t = 1+e^x$, odakle je $dt = e^x dx$, te dobijamo,

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \ln C \quad &\Rightarrow \quad y^2 = 2\ln C(1+e^x) \\ &\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2\ln C(1+e^x)}.\end{aligned}$$

Kako je $y(0) = 1$, imamo

$$\begin{aligned}1 = \sqrt{2\ln C(1+e^0)} \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\ln(2C) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2C) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2C = \sqrt{e} \quad &\Leftrightarrow \quad C = \frac{\sqrt{e}}{2}.\end{aligned}$$

Znači partikularno rešenje date diferencijalne jednačine sa početnim uslovom $y(0) = 1$, je funkcija

$$y = \sqrt{2\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}(1+e^x)\right)}.$$

7.1.2. Homogena diferencijalna jednačina

Svaka homogena diferencijalna jednačina se može svesti na jednačinu oblika $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, gde je f neprekidna funkcija na nekom intervalu (a,b). Ovakve jednačine rešavaju se smenom $t = \frac{y}{x}$, gde je t funkcija od x, tj. $t = t(x)$.
Homogena jednačina $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se smenom

$$t = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = t(x)x \quad \Rightarrow \quad y' = t'x + t$$

svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive

$$t'x + t = f(t) \quad \Rightarrow \quad x\frac{dt}{dx} = f(t) - t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x}.$$

Zadatak 7.4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(x-y)ydx - x^2dy = 0$ i ono partikularno rešenje koje prolazi kroz tačku $T(1,1)$.

Rešenje: Jednostavnom transformacijom date jednačine dobijamo,

$$(x-y)y\,dx = x^2\,dy \quad \Rightarrow \quad xy - y^2 = x^2\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Uvodimo smenu $t = \frac{y}{x}$, odakle je $y' = t'x + t$. Stoga,

$$t'x + t = t - t^2 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dt}{dx} = -t^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

Rešavanjem dobijenih (tabličnih) integrala imamo,

$$\frac{1}{t} = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Vraćanjem smene $t = \frac{y}{x}$, dobijamo opšte rešenje početne jednačine,

$$y = \frac{x}{\ln|Cx|}.$$

Za tačku $T(1,1)$ imamo

$$1 = \frac{1}{\ln|C|} \quad \Rightarrow \quad \ln|C| = 1 \quad \Rightarrow \quad |C| = e,$$

pa je traženo partikularno rešenje

$$y_p = \frac{x}{\ln e|x|} = \frac{x}{1+\ln|x|}.$$

Zadatak 7.5. Odrediti opšte rešenje jednačine $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

Rešenje: Ako i brojilac i imenilac podelimo sa x^2 dobijamo

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{2xy}{x^2}}{\frac{x^2-y^2}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}$$

Uvođenjem smene $\frac{y}{x} = t$, odakle je $y' = t'x + t$ dobija se

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad t'x + t = \frac{2t}{1-t^2} \quad \Rightarrow \quad x \cdot t' = \frac{2t}{1-t^2} - t$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{t+t^3}{1-t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-t^2}{t(1+t^2)}\,dt = \frac{dx}{x}.$$

Na levoj strani jednakosti imamo integral racionalne funkcije

$$\int \frac{1-t^2}{t(1+t^2)}\,dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}\right)dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\right)dt$$
$$= \left[\begin{array}{c} 1+t^2 = z \\ 2t\,dt = dz \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dz}{z}.$$

Sada je

$$\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|t| - \ln|z| = \ln|x| + \ln|C| \ \Rightarrow \ \ln\left|\frac{t}{1+t^2}\right| = \ln|Cx|$$
$$\Rightarrow \quad \left|\frac{t}{1+t^2}\right| = |Cx| \ \overset{(*)}{\Longrightarrow} \ \frac{t}{1+t^2} = Cx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx \ \Rightarrow \ \frac{xy}{x^2+y^2} = Cx \ \Rightarrow \ \frac{y}{x^2+y^2} = C.$$

Zadatak 7.6. Naći opšte rešenje jednačine $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$.

Rešenje: Kada datu jednačinu podelimo sa x dobijamo

$$xy' - y = \sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y \ \Rightarrow \ y' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$$
$$\Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ y' = \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$$

Sada se uvođenjem smene $\dfrac{y}{x} = t$, odakle je $y' = t + x\cdot t'$, dobija

$$y' = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad t + x\cdot t' = \sqrt{1+t^2} + t \ \Rightarrow \ x\cdot\frac{dt}{dx} = \sqrt{1+t^2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \quad \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|$$
$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad t + \sqrt{1+t^2} = Cx \ \Rightarrow \ \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx$$
$$\Rightarrow \quad y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$$

7.1.3. Linearna diferencijalna jednačina

To je diferencijalna jednačina oblika $y' + f(x)y = g(x)$, gde su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije nad nekim otvorenim intervalom I. Ova jednačina se rešava uvođenjem smene

$$y = uv, \qquad \text{gde su } u = u(x) \ \text{ i } \ v = v(x),$$

Tada važi $y' = u'v + uv'$, primenom pravila za izvod proizvoda, pa ubacivanjem ove dve jednakosti u početnu jednačinu dobijamo,

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x) \quad \Rightarrow \quad u'v + u\big(v' + f(x)v\big) = g(x).$$

Da bismo našli funkcije u i v koje zadovoljavaju dobijenu jednačinu, možemo da biramo v tako da je zadovoljeno $v' + f(x)v = 0$. Odatle važi,

$$\frac{dv}{dx} + f(x)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int f(x)\,dx.$$

Kada rešimo levi integral, dobijamo,

$$\ln|v| = -\int f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \pm e^{-\int f(x)\,dx}.$$

Kako je neophodno naći jedno v koje zadovoljava jednakost, u zavisnosti od zadatka možemo izabrati $+$ ili $-$. Ovako dobijena funkcija v uvrštava se u diferencijalnu jednačinu $u'v = g(x)$, te imamo,

$$\frac{du}{dx}v = g(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{g(x)}{v(x)}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int du = \int \frac{g(x)}{v(x)}dx \quad \Rightarrow \quad u = \int g(x)\cdot e^{\int f(x)\,dx}$$

odakle jasno sledi da je rešenje polazne jednačine dato sa

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(C - \int g(x)\cdot e^{\int f(x)\,dx}\,dx\right).$$

Zadatak 7.7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

Rešenje: Uvođenjem smene $y = uv$, odakle je $y' = u'v + uv'$ dobijamo

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) = (x+1)^3.$$

Prvo rešavamo jednačinu $v' - \frac{2}{x+1}v = 0$, pa kako je $v = v(x)$ sledi,

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x+1}v \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1} \\ &\Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|x+1|^2 \quad \Rightarrow \quad |v| = (x+1)^2.\end{aligned}$$

Kako i $v = (x+1)^2$ i $v = -(x+1)^2$ zadovoljavaju gornju jednakost, imamo pravo da izaberemo jedno v, neka to bude na primer $(x+1)^2$.
Sada još rešiti jednačinu $u'v = (x+1)^3$, te važi

$$\begin{aligned}u'v = (x+1)^3 \quad &\Rightarrow \quad u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x+1 \\ &\Rightarrow \quad du = (x+1)dx \quad \Rightarrow \quad \int du = \int (x+1)dx \\ &\Rightarrow \quad u = \frac{x^2}{2} + x + C\end{aligned}$$

Kako je $y = uv$, sledi da je rešenje početne diferencijalne jednačine funkcija,

$$y = (x+1)^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right).$$

Zadatak 7.8. Naći rešenje početnog problema $y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ y(0) = 2$.

Rešenje:

Uvodimo smenu: $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$$\begin{aligned}y' + y\cos x = \sin x\cos x \quad &\Rightarrow \quad u'\cdot v + u\cdot v' + \cos x\cdot u\cdot v = \sin x\cos x \\ &\Rightarrow \quad u'\cdot v + u(v' + \cos x\cdot v) = \sin x\cos x\end{aligned}$$

Odredimo funkciju v:

$$\begin{aligned}v' + \cos x\cdot v = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\cos x\cdot v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\cos x\,dx \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\sin x \\ &\Rightarrow \quad v = e^{-\sin x}\end{aligned}$$

Odredimo funkciju u iz jednačine $u' \cdot v = \sin x \cos x$:

$$
\begin{aligned}
u' \cdot v = \sin x \cos x \quad &\Rightarrow \quad u' \cdot e^{-\sin x} = \sin x \cos x \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} \cdot e^{-\sin x} = \sin x \cos x \\
&\Rightarrow \quad du = e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx \;\Rightarrow\; \int du = \int e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx \\
&\quad\;\; \Big[\sin x = t \Rightarrow \cos x \, dx = dt\Big] \\
&\Rightarrow \quad u = \int e^t \cdot t \, dt \\
&\quad\;\; \begin{bmatrix} u_1 = t & \Rightarrow & du_1 = dt \\ dv_1 = e^t \, dt & \Rightarrow & v_1 = e^t \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \quad u = te^t - \int e^t \, dt \;\Rightarrow\; u = te^t - e^t + C \\
&\Rightarrow \quad u = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C
\end{aligned}
$$

Sada je opšte rešenje:

$$y = u \cdot v = \Big(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\Big) \cdot e^{-\sin x} = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Ako je $y(0) = 2$, imamo

$$2 = 0 - 1 + C \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad 2 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 3,$$

pa je traženo partikularno rešenje

$$y_p = \sin x - 1 + 3e^{-\sin x}.$$

Zadatak 7.9. $(1 + y^2)\, dx + (xy + 1)\, dy = 0$

Rešenje:

S obzirom da je ova jednačina linearna po x, a ne po y, svešćemo je na oblik
$x' + f(y) \cdot x + g(y) = 0$

$$
\begin{aligned}
(1 + y^2)\, dx + (xy + 1)\, dy = 0 \quad &\Rightarrow \quad (1 + y^2)\, \frac{dx}{dy} + xy + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (1 + y^2)x' + xy + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x' + \frac{y}{1 + y^2}\, x + \frac{1}{1 + y^2} = 0
\end{aligned}
$$

Uvodimo smenu: $x = u \cdot v \Rightarrow x' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$
\begin{aligned}
x' + \frac{y}{1 + y^2}\, x = -\frac{1}{1 + y^2} \quad &\Rightarrow \quad u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{y}{1 + y^2} \cdot u \cdot v = -\frac{1}{1 + y^2} \\
&\Rightarrow \quad u' \cdot v + u\left(v' + \frac{y}{1 + y^2} \cdot v\right) = -\frac{1}{1 + y^2}
\end{aligned}
$$

Odredimo funkciju v:

$$
\begin{aligned}
v' + \frac{y}{1 + y^2} \cdot v = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = -\frac{y}{1 + y^2} \cdot v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\frac{y}{1 + y^2}\, dy \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{y}{1 + y^2}\, dy = \begin{bmatrix} 1 + y^2 = t \\ y\, dy = \frac{1}{2}\, dt \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \\
&\Rightarrow \quad \ln|v| = -\frac{1}{2} \ln|t| = -\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) \;\Rightarrow\; |v| = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}
\end{aligned}
$$

Uzećemo da je $v = -\dfrac{1}{1+y^2}$ i odrediti funkciju u iz jednačine $u' \cdot v = -\dfrac{1}{1+y^2}$:

$$\begin{aligned} u' \cdot v = -\frac{1}{1+y^2} \quad &\Rightarrow \quad u' \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) = -\frac{1}{1+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \\ &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy \quad \Rightarrow \quad \int du = \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \\ &\Rightarrow \quad u = \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right| + C \end{aligned}$$

Sada je rešenje:

$$x = u \cdot v = -\frac{\ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right| + C}{\sqrt{1+y^2}}.$$

7.1.4. Bernulijeva diferencijalna jednačina

Bernulijeva jednačina je oblika

$$y' + f(x)y = g(x)y^m, \;\; m \in \mathbb{R}, \;\; y > 0.$$

Primetimo da za $m = 0$ dobijamo linearnu jednačinu, dok za $m = 1$ imamo jednačinu koja razdvaja promenljive. Postoje dva pristupa rešavanju ove jednačine:

1. direktno, uvođenjem smene $y = uv$;
2. uvođenjem pomoćne smene $z = y^{1-m}$ Bernulijeva jednačina se svodi linearnu. Opišimo taj postupak.

$$y' + f(x)y = g(x)y^m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^m} + f(x)y^{1-m} = g(x).$$

Sada kao što smo rekli, uvodimo smenu $z = y^{1-m}$, odakle na osnovu izvoda složene funkcije sledi

$$z' = (1-m)y^{-m}y' = (1-m)\frac{y'}{y^m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}.$$

Zamenom dobijenog u jednačinu dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu,

$$\frac{z'}{1-m} + f(x)z = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad z' + f(x)(1-m)z = g(x)(1-m).$$

Zadatak 7.10. Rešiti početni problem $xy' + y = y^2 \ln x, \;\; y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Rešenje: Deljenjem jednačine sa x dobijamo,

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2,$$

što je Bernulijeva jednačina za $m = 2$. Rešićemo je smenom $y = uv$. Kako je $y' = u'v + uv'$, dobijamo,

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\ln x}{x}u^2v^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = \frac{\ln x}{x}u^2v^2.$$

Kao i kod linearnih jednačina, određujemo funkciju v koja zadovoljava jednakost $v' + \dfrac{1}{x}v = 0$. Sada imamo,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln|x| \\ &\Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\frac{1}{|x|} \quad \Rightarrow \quad |v| = \frac{1}{|x|} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Sada rešavamo jednačinu $u'v = \dfrac{\ln x}{x} u^2 v^2$. Kada skratimo v u jednačini, dobijamo,

$$u' = \frac{\ln x}{x} u^2 v \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x} u^2 \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

$$\begin{bmatrix} u_1 = \ln x & \Rightarrow & du_1 = \frac{dx}{x} \\ dv_1 = \frac{dx}{x^2} & \Rightarrow & v_1 = -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C.$$

Vidimo da je $\dfrac{1}{u} = \dfrac{\ln x + 1 + Cx}{x}$, odnosno $u = \dfrac{x}{\ln x + 1 + Cx}$. Otuda je opšte rešenje polazne jednačine

$$y = uv = \frac{x}{\ln x + 1 + Cx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Ako je $y(1) = \dfrac{1}{2}$, imamo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{0 + 1 + C} \quad \Rightarrow \quad 1 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

pa je traženo partikuarno rešenje

$$y_p = \frac{1}{\ln x + 1 + x}.$$

Zadatak 7.11. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

Rešenje: U ovom zadatku ćemo promenljivu x posmatrati kao zavisnu, a y kao nezavisnu. Primetimo, u tom slučaju imamo, $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$, što implicira,

$$(2x^2 y \ln y - x)\frac{1}{x'} = y \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2x^2 y \ln y - x}{y} \quad \Rightarrow \quad x' + \frac{1}{y}x = 2x^2 \ln y.$$

Dobijena jednačina je Bernulijeva za $m = 2$. Podelićemo jednačinu sa x^2 i uvesti smenu $z = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, odakle je $z' = -\dfrac{x'}{x^2}$

$$\frac{x'}{x^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = 2\ln y \quad \Rightarrow \quad -z' + \frac{1}{y} \cdot z = 2\ln y \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{1}{y} \cdot z = -2\ln y$$

Ovim smo dobili linearnu jednačinu po z i uvodimo smenu $z = uv$, gde su $u = u(y)$ i $v = v(y)$. Kako je $z' = u'v + uv'$ dalje imamo

$$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = -2\ln y \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{y}v\right) = -2\ln y.$$

Iz pretpostavke da je $v' - \dfrac{1}{y}v = 0$ sledi

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{y}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}$$
$$\Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|y| \quad \Rightarrow \quad |v| = |y|$$
$$\Rightarrow \quad v = \pm y \quad \Rightarrow \quad v = -y.$$

Sada odrđujemo u iz jednačine $u'v = -2\ln y$.

$$\frac{du}{dy} \cdot (-y) = -2\ln y \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2\ln y}{y}\, dy \quad \Rightarrow \quad \int du = 2\int \frac{\ln y}{y}\, dy$$

$$\left[\ln y = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dt\right]$$

$$\Rightarrow \quad u = 2\int t\, dt \quad \Rightarrow \quad u = t^2 + C \quad \Rightarrow \quad u = \ln^2 y + C$$

Otuda je

$$z = uv = -y(\ln^2 y + C),$$

odnosno

$$x = \frac{1}{z} = -\frac{1}{y(\ln^2 y + C)}.$$

Zadatak 7.12. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $2y' \ln x + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{y}$

Rešenje: Ako datu jednačinu podelimo sa $2 \ln x$

$$2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y} \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{y}{2x \ln x} = \frac{\cos x}{2 \ln x} \cdot y^{-1},$$

vidimo da se radi o Bernulijevoj jednačini za $m = -1$. Množimo polaznu jednačinu sa $\dfrac{y}{\ln x}$, pa uvodimo smenu $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$:

$$\begin{aligned} 2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y} \quad &\Rightarrow \quad 2yy' + \frac{y^2}{x \ln x} = \frac{\cos x}{\ln x} \\ &\Rightarrow \quad z' + \frac{z}{x \ln x} = \frac{\cos x}{\ln x}. \end{aligned}$$

Dobili smo linearnu jednačinu po z, pa uvodimo smenu $z = uv$, odakle je $z' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} z' + \frac{z}{x \ln x} = \frac{\cos x}{\ln x} \quad &\Rightarrow \quad u'v + uv' + \frac{1}{x \ln x} \cdot uv = \frac{\cos x}{\ln x} \\ &\Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{1}{x \ln x}\, v\right) = \frac{\cos x}{\ln x}. \end{aligned}$$

Iz uslova $v' + \dfrac{1}{x \ln x}\, v = 0$ određujemo funkciju v:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x \ln x}\, v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{1}{x \ln x}\, dx \;\Rightarrow\; &\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x \ln x} \\ &= \left[\ln x = t \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = dt \right] \\ \Rightarrow \quad \ln|v| = -\int \frac{dt}{t} \;\;&\Rightarrow\;\; \ln|v| = -\ln|t| \\ \Rightarrow \quad |v| = \frac{1}{|t|} \;\;&\Rightarrow\;\; v = \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln x}. \end{aligned}$$

Sada iz jednačine $u'v = \frac{\cos x}{\ln x}$ određujemo funkciju u:

$$u' \cdot \frac{1}{\ln x} = \frac{\cos x}{\ln x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \cos x \;\Rightarrow\; \int du = \int \cos x\, dx \;\;\Rightarrow\;\; u = \sin x + C.$$

Sada je rešenje

$$z = u \cdot v = \frac{\sin x + C}{\ln x},$$

odnosno

$$y = \sqrt{z} = \sqrt{\frac{\sin x + C}{\ln x}}.$$

7.1.5. Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je leva strana jednačine totalni diferencijal funkcije $F(x,y)$, tj. da je

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

odnosno,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Ako takva funkcija $F(x,y)$ postoji, tada iz $dF(x,y) = 0$ sledi da je $F(x,y) = C$, i to je rešenje ove diferencijalne jednačine u implicitnom obliku.

Da bi takva funkcija postojala, u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$, potrebno je i dovoljno da funkcije P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ budu neprekidne, i da važi

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \ (x,y) \in G.$$

Zadatak 7.13. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(y - 3x^2)\, dx + (x - 4y)\, dy = 0.$$

Rešenje: Kako je

$$P(x,y) = y - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$
$$Q(x,y) = x - 4y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 1,$$

vidimo da važi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Zaključujemo da je u pitanju jednačinu totalnog diferencijala, jer su funkcije P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ polinomi po obe promenljive, te stoga neprekidne na jednostruko povezanoj oblasti $\mathbb{R}^2$. Zato postoji funkcija $F(x,y)$, tako da važi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y - 3x^2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x - 4y.$$

Sada imamo,

$$F(x,y) = \int (y - 3x^2)\, dx = yx - x^3 + \phi(y).$$

Primetimo najpre da kada integralimo funkciju $y - 3x^2$ po x, promenljivu y posmatramo kao konstantu. Sa druge strane, kada smo rešili integral umesto konstante C, kao do sada, dodali smo neku funkciju ϕ koja zavisi od y. Razlog tome je što funkcija $F(x,y)$ zavisi od dve promenljive, pa kako smo imali integral po x, dodajemo funkciju po y, jer je njen izvod po x jednak nuli. Jasno, da smo integralili po y, dodali bismo funkciju po x, tj. $\psi(x)$.

U nastavku, koristeći drugi uslov, dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(yx - x^3 + \phi(y)\big) = x + \phi'(y) = x - 4y,$$

odakle je

$$\phi'(y) = -4y \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = -4\int y\, dy \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = -2y^2 + \tilde{C}.$$

Konačno, $F(x,y) = yx - x^3 - 2y^2 + \tilde{C}$, pa je krajnje rešenje (u implicitnom obliku) dato sa

$$yx - x^3 - 2y^2 = C.$$

Zadatak 7.14. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $x\,dx + y\,dy = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$

Rešenje:
Pošto je

$$P(x,y) = x - \frac{y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1\cdot(x^2+y^2) + y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$Q(x,y) = y + \frac{x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

vidimo da je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, pa ovo jeste jednačina totalnog diferencijala jer su funkcije P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne na jednostruko povezanoj oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Odredimo funkciju $F(x,y)$ takvu da važi $dF = P\,dx + Q\,dy$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad &\Rightarrow \quad F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \psi(y)\\
&\Rightarrow \quad F(x,y) = \int \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \phi(y)\\
&\Rightarrow \quad F(x,y) = \frac{x^2}{2} - y\cdot\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \phi(y)\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \phi(y)\right) = y + \frac{x}{x^2+y^2}\\
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \phi'(y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}\\
&\Rightarrow \quad \frac{x}{x^2+y^2} + \phi'(y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}\\
&\Rightarrow \quad \phi'(y) = y\\
&\Rightarrow \quad \phi(y) = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + \tilde{C}
\end{aligned}$$

Sada za funkciju F važi

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} + \tilde{C},$$

pa je rešenje date diferencijalne jednačine u implicitnom obliku dato sa

$$x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C.$$

7.1.6. Jednačine koje dopuštaju integracioni množitelj

Postavlja se pitanje šta ako za jednačinu oblika $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ nije zadovoljen uslov $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$? Jedan od načina da se prevaziđe ovaj problem jeste da se odredi funkcija $h(x,y) \neq 0$, koju nazivamo *integracioni množitelj*, tako da jednačina

$$h(x,y)P(x,y)\,dx + h(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala.

Zadatak 7.15. Pokazati da diferencijalna jednačina $x\,dx + y\,dy + x\,dy - y\,dx = 0$ ima integracioni množitelj oblika $h = h(x^2+y^2)$ i naći njeno opšte rešenje.

Rešenje: Primetimo da se data jednačina može zapisati kao

$$(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0.$$

Očito, vidimo da ona nije jednačina totalnog diferencijala. Množenjem jednačine sa nekom funkcijom $h = h(x,y)$ dobijamo,

$$\underbrace{h(x,y)(x-y)}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{h(x,y)(x+y)}_{Q(x,y)}\,dy = 0. \tag{7.1}$$

Potrebno je da za nove funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ važi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Za $h(x,y) = h(x^2+y^2)$ imamo

$$\frac{\partial h}{\partial x} = h'(x^2+y^2)\cdot 2x \quad \text{i} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = h'(x^2+y^2)\cdot 2y,$$

odakle

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= h'(x^2+y^2)\cdot 2y\cdot(x-y) + h(x^2+y^2)\cdot(-1),\\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= h'(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot(x+y) + h(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Da bi jednačina (7.1) bila jednačina totalnog diferencijala mora da važi

$$\begin{aligned}
2h'(x^2+y^2)(xy-y^2) - h(x^2+y^2) &= 2h'(x^2+y^2)(xy+x^2) + h(x^2+y^2)\\
2(x^2+y^2)h'(x^2+y^2) &= -2h(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Uvođenjem smene $t = x^2+y^2$ dobijamo

$$t\cdot h'(t) = -h(t) \quad\Rightarrow\quad t\cdot\frac{dh}{dt} = -h \quad\Rightarrow\quad \frac{dh}{h} = -\frac{dt}{t} \quad\Rightarrow\quad \ln|h| = -\ln|t|,$$

pa možemo uzeti $h(t) = t^{-1}$, odnosno $h(x^2+y^2) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Sada jednačina (7.1) dobija oblik,

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy = 0,$$

i ona je sigurno jednačina totalnog diferencijala na svakoj jednostuko povezanoj oblasti koja ne sadrži koordinatni početak. Otuda postoji funkcija $F(x,y)$ tako da važi,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Stoga je,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\\
&= \left[\begin{array}{c} x^2+y^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - y\int \frac{dx}{x^2+y^2}\\
&= \frac{1}{2}\ln|t| - y\cdot\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \phi(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \phi(y).
\end{aligned}$$

Sa druge strane imamo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \phi'(y)\\
&= \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{y^2} + \phi'(y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} + \phi'(y).
\end{aligned}$$

Kako je $Q(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, zaključujemo da je $\phi'(y) = 0$, odakle je $\phi(y) = \tilde{C}$.

Konačno, $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + \tilde{C}$, pa je rešenje jednačine (u implicitnom obliku) dato sa,

$$\ln(x^2+y^2) - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C,\ y \neq 0.$$

Treba napomenuti da zbog $y \neq 0$ dobijeno rešenje treba posmatrati na jednostruko povezanim oblastima gornje poluravni $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$, ili donje poluravni $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < 0\}$.

Zadatak 7.16. Pokazati da diferencijalna jednačina $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + (x^2+y^2)\, dy = 0$ ima integracioni množitelj oblika $f(x,y) = f(x)$ i naći njeno opšte rešenje.

Rešenje: Očigledno, polazna jednačina nije jednačina totalnog diferencijala. Množenjem jednačine sa nekom funkcijom $f(x)$ dobijamo,

$$\underbrace{f(x)\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{f(x)(x^2+y^2)}_{Q(x,y)}\, dy = 0. \tag{7.2}$$

Potrebno je da za nove funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ važi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Imamo

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = f(x)\left(2x + x^2 + y^2\right),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = f'(x)(x^2+y^2) + f(x)2x.$$

Da bi jednačina (7.2) bila jednačina totalnog diferencijala mora da važi

$$f(x)2x + f(x)(x^2+y^2) = f'(x)(x^2+y^2) + f(x)2x \quad \Rightarrow \quad f(x) = f'(x).$$

Zaključujemo da je $f(x) = e^x$, pa jednačina (7.2) dobija oblik,

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + e^x(x^2+y^2)\, dy = 0,$$

i ona je sigurno jednačina totalnog diferencijala, pa onda znamo da postoji funkcija $F(x,y)$ tako da važi,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^x(x^2+y^2).$$

Otuda je,

$$F(x,y) = \int e^x(x^2+y^2)\, dy = e^x \int (x^2+y^2)\, dy = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \psi(x)$$

Sa druge strane imamo,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + e^x \cdot 2xy + \psi'(x) = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \psi'(x).$$

Vidimo da je $\psi'(x) = 0$, odakle je $\psi(x) = \tilde{C}$.

Konačno, $F(x,y) = e^x\left(x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) + \tilde{C}$, pa je rešenje jednačine (u implicitnom obliku) dato sa,

$$e^x\left(3x^2y + y^3\right) = C.$$

7.1.7. Kleroova jednačina

To je jednačina oblika $y = xy' + f(y')$, gde f ima neprekidan drugi izvod različit od 0 na nekom intervalu (a, b). Uvodimo smenu $y' = p$, pri čemu je p funkcija od x, što nam daje

$$y = xp + f(p) \tag{7.3}$$

Diferenciranjem jednačine (7.3) dobija se

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \quad \Rightarrow \quad p'\big(x + f'(p)\big) = 0.$$

Odavde je $p' = 0$ ili $x + f(p') = 0$.

1) Iz $p' = 0$ sledi $p = C$, pa vraćanjem u jednačinu (7.3) dobijamo $y = Cx + f(C)$, i ova familija pravih (koja zavisi od parametra C) je opšte rešenje Kleroove diferencijalne jednačine.

2) Iz $x = -f'(p)$ možemo izraziti p u zavisnosti od x, tj. $p = g(x)$, odakle se, vraćanjem u jednačinu (7.3), dobija
$$y = x\,g(x) + f\big(g(x)\big).$$
U pitanju je singularno rešenje, koje je obvojnica familije pravih pod 1), tj. tangenta na singularno rešenje u svakoj tački je jedna od pravih iz opšteg rešenja.

   Ovo rešenje možemo dobiti i parametarkom obliku
$$x = -f'(p) \quad \text{i} \quad y = -f'(p)p + f(p).$$

Zadatak 7.17. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y = xy' + \dfrac{1}{2y'}$.

Rešenja: Data jednačina je očigledno Kleroova, pa uvodimo smenu $y' = p$, $p = p(x)$. Tada je

$$y = xy' + \frac{1}{2y'} \quad \Rightarrow \quad y = xp + \frac{1}{2p}.$$

Diferenciranjem ove jednačine dobija se

$$y' = p + xp' - \frac{1}{2p^2}p' \quad \Rightarrow \quad p'\left(x - \frac{1}{2p^2}\right) = 0.$$

Imamo dve mogućnosti:

1) $p' = 0 \quad \Rightarrow \quad p = C \quad \Rightarrow \quad y = Cx + \dfrac{1}{2C}$;

2) $x - \dfrac{1}{2p^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \dfrac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2x}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm x\sqrt{\dfrac{1}{2x}} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{2x}$

   S druge strane,
$$x - \frac{1}{2p^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{2p^2}} \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{2p^2}p + \frac{1}{2p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{p}}.$$

Zadatak 7.18. Uvodeći smenu $y = \dfrac{1}{z}$, $z = z(x)$ rešiti jednačinu $(y')^3 - y^4(y + xy') = 0$.

Rešenje: Uvrštavajući smenu $y = \dfrac{1}{z}$, odakle je $y' = -\dfrac{1}{z^2}z'$ u polaznu jednačinu

$$-\frac{1}{z^6}(z')^3 - \frac{1}{z^4}\Big(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2}z'\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(z')^3 - z + xz' = 0,$$

dobijamo Kleroovu jednačinu,

$$z = xz' - (z')^3.$$

Uvođenje smene $z' = p$ nam daje jednačinu $z = xp - p^3$, čijim diferenciranjem se dobija

$$z' = p + xp' - 3p^2p' \quad \Rightarrow p'(x - 3p^2) = 0.$$

Sada imamo dva slučaja:

1) $p' = 0 \quad \Rightarrow \quad p = C \quad \Rightarrow \quad z = Cx - C^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = Cx - C^3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{Cx - C^3},\ C \neq 0.$

2) $x - 3p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3p^2} \quad$ i $\quad z = 3p^2 \cdot p - p^3 \quad \Rightarrow \quad z = 2p^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{2p^3}}.$

7.1.8. Zadaci za samostalan rad

1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$.
2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$.
3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $dy = \dfrac{x^3 + y}{x}dx$.
4. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'\sin x + y\cos x = \sin^2 x$.
5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.
6. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine
$$\left(\frac{y}{x + y}\right)^2 dx + \left(\frac{x}{x + y}\right)^2 dy = 0.$$
7. Pokazati da diferencijalna jednačina
$$(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)dy = 0,$$
ima integracioni množitelj oblika $h = h(x + y)$ i naći njeno opšte rešenje.
8. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y = \dfrac{y'}{2}(2x + y')$.