

7.2. Diferencijalne jednačine višeg reda

Diferencijalna jednačina višeg reda je jednačina oblika

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

gde je $y = y(x)$ i $n > 1$. Red jednačine je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja u datoj jednačini, tj. red je n .

7.2.1. Snižavanje reda diferencijalne jednačine

Postoje diferencijalne jednačine višeg reda kojima se rešenje može odrediti pomoću rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina nižeg reda. Ovaj postupak se naziva snižavanje reda diferencijalne jednačine.

a) Jednačina oblika

$$y^{(n)} = f(x)$$

rešava se direktnom integracijom.

Zadatak 7.19. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' \sin^4 x = \sin 2x$.

Rešenje.

Datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$y'' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x},$$

a korišćenjem identiteta $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ dobijamo

$$y'' = 2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}.$$

Dakle,

$$y' = 2 \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = 2 \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{t^2} + C_1 = -\frac{1}{\sin^2 x} + C_1,$$

pa je

$$y = \int \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + C_1 \right) dx = -\int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int c_1 dx = \operatorname{ctg} x + C_1 x + C_2.$$

b) Diferencijalna jednačina oblika

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k < n,$$

je jednačina koja ne sadrži y i rešava se smenom $y^{(k)} = p$, gde je p funkcija koja zavisi od x tj. $p = p(x)$. Primetimo, za smenu uzimamo k -ti izvod funkcije y - najmanji izvod koji se pojavljuje u jednačini.

Zadatak 7.20. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy''' + y'' = x^2$.

Rešenje.

Kako je y'' najmanji izvod koji se pojavljuje u jednačini smena je $p = y''$, iz čega imamo da je $y''' = p'$, pa jednačina postaje

$$xp' + p = x^2.$$

Ako prethodnu jednačinu podelimo sa x dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$p' + \frac{1}{x}p = x$$

koju rešavamo smenom $p = u \cdot v$. Iz $p' = u'v + uv'$ imamo

$$vu' + uv' + \frac{1}{x}uv = x \quad \Rightarrow \quad vu' + \underbrace{u\left(v' + \frac{1}{x}v\right)}_{=0} = x,$$

pa je $v' + \frac{v}{x} = 0$ ako je $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ tj. $v = \frac{1}{x}$. Za takvo v jednačina postaje

$$\frac{1}{x}u' = x,$$

odnosno, $u' = x^2$ tj. $du = x^2 dx$. Konačno,

$$u = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

tj. p je dato sa $p = uv = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$. Jednačina

$$y'' = p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

se rešava direktnom integracijom, pa je

$$y' = \int y'' dx = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2,$$

odnosno,

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{36} + C_1 x(\ln|x| - 1) + C_2 x + C_3.$$

c) Diferencijalna jednačina oblika

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}), \quad n \geq 1$$

je jednačina koja ne sadrži x i rešava se smenom $y' = z$, gde je z funkcija koja zavisi od y tj. $z = z(y)$, pa se izvodi višeg reda računaju na sledeći način

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{z'} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = z'z, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d(z'z)}{dy} \frac{dy}{dx} = (zz'' + (z')^2)z \\ &= z^2 z'' + z(z')^2. \end{aligned}$$

Analognim postupkom tražimo i ostale izvode višeg reda. Napomenimo da je $\frac{d(z'z)}{dy} = (z'z)'_y$, a primenom pravila za izvod proizvoda dobijamo $(z'z)'_y = zz'' + (z')^2$ što objašnjava treću jednakost pri računanju y''' .

Zadatak 7.21. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $3yy'' - 5(y')^2 = 0$.

Rešenje.

Primenom smene $y' = z$, odakle je $y'' = zz'$ jednačina postaje

$$3yzz' - 5z^2 = z(3yz' - 5z) = 0.$$

Ako je $z = 0$, to znači da je $y' = 0$, pa je $y = C$.

Ako je $z \neq 0$, onda $3yz' = 5z$, što je jednačina koja razdvaja promenljive

$$3y \frac{dz}{dy} = 5z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{5}{3} \cdot \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |z| = \frac{5}{3} \ln |y| + \ln |C_1|. \Rightarrow z = C_1 y^{\frac{5}{3}},$$

a vraćanjem smene $y' = z$ dobijamo jednačinu

$$y' = C_1 y^{\frac{5}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{5}{3}} dy = C_1 dx. \Rightarrow \int y^{-\frac{5}{3}} dy = C_1 \int dx.$$

Otuda je

$$-\frac{3}{2} y^{-\frac{2}{3}} = C_1 x + C_2 \Rightarrow \sqrt[3]{y^2} (C_1 x + C_2) = -\frac{3}{2}.$$

7.2.2. Linearna diferencijalna jednačina višeg reda

Linearna diferencijalna jednačina je oblika

$$(7.4) \quad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

gde su funkcije $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ i $f(x)$ definisane i neprekidne nad nekim intervalom I i $a_n(x) \neq 0$ za $x \in I$.

Linearna diferencijalna jednačina se naziva homogena linearna diferencijalna jednačina ako je $f(x) = 0$.

Homogeni deo linearne jednačine (7.4) je

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Neka je y_p partikularno rešenje jednačine (7.4), a y_h opšte rešenje homogenog dela jednačine, tada je $y = y_h + y_p$ opšte rešenje jednačine (7.4) jer imamo da je

$$\begin{aligned} a_n(x)(y_h + y_p)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y_h + y_p)^{(n-1)} + \dots + a_1(x)(y_h + y_p)' + a_0(x)(y_h + y_p) &= \\ = a_n(x)y_h^{(n)} + a_{n-1}(x)y_h^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_h' + a_0(x)y_h + & \\ + a_n(x)y_p^{(n)} + a_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p & \\ = 0 + f(x) = f(x). & \end{aligned}$$

Svaku linearnu diferencijalnu jednačinu oblika

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

možemo zapisati, ako prethodnu jednačinu podelimo sa $a_n(x) \neq 0$, kao

$$y^{(n)} + \tilde{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_1(x)y' + \tilde{a}_0(x)y = \tilde{f}(x),$$

gde je $\tilde{a}_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ za $i = 0, 1, \dots, n-1$ i $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)}$.

Za $n = 1$ dobijamo linearnu jednačinu prvog reda

$$y' + a_0(x)y = f(x)$$

sa kojom smo se upoznali ranije.

7.2.3. Jednačina sa konstantnim koeficijentima

Ako su u linearnoj diferencijalnoj jednačini (7.4) sve funkcije koje stoje uz izvode konstantne, tj. $a_i(x) = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, u pitanju je linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$(7.5) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Najpre ćemo posmatrati slučaj kada je $f(x) = 0$, tj. posmatraćemo homogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima, odnosno jednačine oblika

$$(7.6) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Jednačina

$$(7.7) \quad a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

se naziva **karakteristična jednačina** diferencijalne jednačine. Primetimo, karakterističnu jednačinu smo dobili iz diferencijalne jednačine tako što smo zamenili $y^{(i)}$ sa r^i . Karakteristična jednačina diferencijalne jednačine n -tog reda je polinom n -tog stepena, pa postoji n korena karakteristične jednačine, neka su to r_1, r_2, \dots, r_n .

Takođe, za svako $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi da je $y = e^{r_k x}$ rešenje diferencijalne jednačine (7.6), jer je $y^{(i)} = r_k^i e^{r_k x}$, $i = 1, 2, \dots, n$, pa uvrštavanjem u jednačinu dobijamo

$$a_n r_k^n e^{r_k x} + a_{n-1} r_k^{n-1} e^{r_k x} + \dots + a_1 r_k e^{r_k x} + a_0 e^{r_k x} = e^{r_k x} (a_n r_k^n + a_{n-1} r_k^{n-1} + \dots + a_1 r_k + a_0) = 0$$

jer je r_k rešenje jednačine (7.7).

Fundamentalni skup rešenja je svaki skup $\Phi = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ koji čine n linearno nezavisnih rešenja jednačine (7.6) i tada je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

je opšte rešenje diferencijalne jednačine (7.6).

Fundamentalni skup rešenja zavisi od prirode korena karakteristične jednačine. Razlikujemo četiri slučaja.

- 1) Ako su svi koreni r_1, r_2, \dots, r_n karakteristične jednačine realni i različiti tada je fundamentalni skup rešenja

$$\Phi = \{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}\},$$

a opšte rešenje jednačine je

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Zadatak 7.22. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Rešenje.

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$, odakle je fundamentalni skup $\Phi = \{e^{0x}, e^{1x}, e^{2x}\}$, a opšte rešenje je

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

- 2) Ako je r_i realan koren karakteristične jednačine višestrukosti $m > 1$, tada u fundamentalni skup rešenja ulaze i sledećih m funkcija

$$e^{r_i x}, x e^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, \dots, x^{m-1} e^{r_i x}.$$

Zadatak 7.23. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y^{iv} - 2y''' + 2y' - 1 = 0$.

Rešenje.

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0.$$

čija su rešenja $r_1 = -1, r_2 = r_3 = r_4 = 1$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^{-x}, e^x, xe^x, x^2e^x\}$, a opšte rešenje je

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x.$$

- 3) Neka je koren $r_j = \alpha_j + \beta_j i$ kompleksan koren karakteristične jednačine, tada je i $\bar{r}_j = \alpha_j - \beta_j i$ takođe koren. Za $y_j = e^{r_j x}$ imamo

$$\begin{aligned} y_j &= e^{r_j x} = e^{(\alpha_j + \beta_j i)x} = e^{\alpha_j x} e^{\beta_j x i} \\ &= e^{\alpha_j x} (\cos \beta_j x + i \sin \beta_j x) \\ &= \underbrace{e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x}_{\text{Re}\{y_j\}} + i \underbrace{e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x}_{\text{Im}\{y_j\}}. \end{aligned}$$

Nas interesuju samo realna rešenja, pa zbog toga u fundamentalni skup rešenja ulaze $\text{Re}\{y_j\}$ i $\text{Im}\{y_j\}$. Primitimo da je $\text{Re}\{e^{\bar{r}_j x}\} = \text{Re}\{y_j\}$ i $\text{Im}\{e^{\bar{r}_j x}\} = -\text{Im}\{y_j\}$, pa je dovoljno posmatrati samo jedan od konjugovano kompleksnog para korena.

Zadatak 7.24. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''' - y = 0$.

Rešenje.

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - 1 = 0.$$

čija su rešenja $r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, r_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, pa je fundamentalni skup $\Phi = \{e^x, e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\}$, a opšte rešenje je

$$y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

- 4) Ako je $r_j = \alpha_j + \beta_j i$ koren karakteristične jednačine višestrukosti $m > 1$, tada u fundamentalni skup rešenja ulaze i sledećih $2m$ funkcija

$$\begin{aligned} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, & \quad x e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\ e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, & \quad x e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x. \end{aligned}$$

Zadatak 7.25. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y^v - y^{iv} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$.

Rešenje.

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1 = 0$$

čija su rešenja $r_1 = 1, r_2 = r_3 = i, r_4 = r_5 = -i$, pa je fundamentalni skup

$$\Phi = \{e^x, \cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x\},$$

a opšte rešenje je

$$y = C_1e^x + C_2 \cos x + C_3 x \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \sin x.$$

U slučaju kada je $f(x) \neq 0$, prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, a zatim jedno partikularno rešenje početne diferencijalne jednačine tražimo jednom od sledećih metoda:

- Metod jednakih koeficijenata,
- Metod varijacije konstanti.

7.2.4. Metod jednakih koeficijenata

Ako je

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

gde je $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stepena m i n , jednačina ima jedno partikularno rešenje oblika

$$y_p = x^s e^{\alpha x} (T_k(x) \cos \beta x + R_k(x) \sin \beta x),$$

gde su $T_k(x)$ i $R_k(x)$ nepoznati polinomi stepena $k = \max\{m, n\}$, a s je višestrukost korena $\alpha + \beta i$ karakteristične jednačine. Ako $\alpha + \beta i$ nije rešenje karakteristične jednačine, uzima se da je $s = 0$.

Specijalno, za $\beta = 0$ izraz

$$e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

ne zavisi od $Q_n(x)$, u tom slučaju uzimamo da je $Q_n(x) = 0$ i $k = m$.

Zadatak 7.26. Naći ono rešenje $y(x)$ jednačine

$$y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = e^{-\frac{1}{2}x}$$

koje zadovoljava uslove $y(0) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, tj. jednačinu

$$y''' - \frac{7}{2}y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 - \frac{7}{2}r^2 + 2r + 2 = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = r_2 = 2, r_3 = -\frac{1}{2}$, pa je rešenje homogenog dela

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Kako je

$$e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$$

za $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 0, P_m(x) = 1, k = 0$ i $\alpha + \beta i = -\frac{1}{2} + 0i = -\frac{1}{2}$ je jednostruki koren karakteristične jednačine pa imamo da je $s = 1$, te sledi da je partikularno rešenje oblika

$$y_p = A x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} y_p' &= A \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x}, \\ y_p'' &= A \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = A \left(\frac{x}{4} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}x}, \\ y_p''' &= A \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = A \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{8}\right) e^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

Ubacivanjem y_p u početnu jednačinu dobijamo

$$A \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{8}\right) e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{7}{2} A \left(\frac{x}{4} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}x} + 2A \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} + 2A x e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x},$$

a sređivanjem po stepenima od x imamo

$$A \left(-\frac{1}{8} - \frac{7}{8} + 2 - 1\right) x + \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2} + 2\right) A = 1,$$

što važi za $A = \frac{4}{25}$. Dakle,

$$y_p = \frac{4}{25} x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Opšte rešenje diferencijalne je $y = y_h + y_p$, tj.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{25} x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Iz uslova $y(0) = 1$ dobijamo da je

$$C_1 + C_3 = 1,$$

a iz uslova $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ zaključujemo da mora da važi da je $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$ jer

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{2x} &= +\infty. \end{aligned}$$

Konačno, rešenje koje ispunjava uslove je

$$y = \left(\frac{4}{25}x + 1\right)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Zadatak 7.27. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo diferencijalne jednačine, tj. jednačinu

$$y''' + y'' = 0.$$

Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je

$$r^3 + r^2 = 0,$$

čija su rešenja $r_1 = r_2 = 0, r_3 = -1$, pa je rešenje homogenog dela

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}.$$

Pošto je

$$x^2 + 1 + 3xe^2 \neq e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za sve polinome $P_m(x)$ i $Q_n(x)$, moramo da tražimo partikularno rešenje posebno za jednačinu

$$y''' + y'' = x^2 + 1,$$

a posebno za jednačinu

$$y''' + y'' = 3xe^x.$$

Primetimo da ako je y_1 rešenje jednačine $y''' + y'' = x^2 + 1$, a y_2 rešenje jednačine $y''' + y'' = 3xe^x$, tada je $y_p = y_1 + y_2$ rešenje početne jednačine, jer je

$$\begin{aligned} y_p''' + y_p'' &= (y_1 + y_2)''' + (y_1 + y_2)'' = y_1''' + y_1'' + y_2''' + y_2'' \\ &= x^2 + 1 + 3xe^x. \end{aligned}$$

Kako je

$$x^2 + 1 = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

za $\alpha = 0, \beta = 0, P_m(x) = x^2 + 1, k = 2$ i $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ je dvostruki koren karakteristične jednačine, te imamo da je $s = 2$ i dobijamo da je partikularno rešenje y_{p1} jednačine

$$y''' + y'' = x^2 + 1,$$

oblika

$$y_{p_1} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Tada je

$$\begin{aligned} y'_{p_1} &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ y''_{p_1} &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ y'''_{p_1} &= 24Ax + 6B, \end{aligned}$$

a ubacivanjem dobijenih vrednosti u jednačinu $y''' + y'' = x^2 + 1$, dobijamo

$$24Ax + 6B + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1$$

i sređivanjem po stepenima od x

$$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = x^2 + 1.$$

Rešenje sistema

$$\begin{aligned} 12A &= 1, \\ 24A + 6B &= 0, \\ 6B + 2C &= 1, \end{aligned}$$

je $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{3}$ i $C = \frac{3}{2}$, pa je

$$y_{p_1} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

Analogno, imamo da je

$$3xe^x = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x),$$

za $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_m(x) = 3x$, $k = 1$ i $\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$ nije koren karakteristične jednačine i imamo da je $s = 0$, pa je partikularno rešenje y_{p_2} jednačine

$$y''' + y'' = 3xe^x,$$

oblika

$$y_{p_2} = (Ax + B)e^x.$$

Ubacivanjem

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= Ae^x + (Ax + B)e^x, \\ y''_{p_2} &= Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x, \\ y'''_{p_2} &= 2Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x, \end{aligned}$$

u jednačinu $y''' + y'' = 3xe^x$, dobijamo

$$(3A + Ax + B) \cdot e^x + (2A + Ax + B) \cdot e^x = 3xe^x,$$

a sređivanjem po stepenima od x i upoređivanjem koeficijenata dobijamo da su $A = \frac{3}{2}$ i $B = -\frac{15}{4}$ rešenja sistema

$$\begin{aligned} 2A &= 3, \\ 5A + 2B &= 0, \end{aligned}$$

pa je

$$y_{p_2} = \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right) e^x.$$

Konačno,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right) e^x,$$

a opšte rešenje je

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right) e^x. \end{aligned}$$

Zadatak 7.28. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y^{iv} + 2y'' + y = 8 \cos x.$$

Rešenje: Prvo tražimo rešenje homogenog dela $y^{iv} + 2y'' + y = 0$. Formiramo karakterističnu jednačinu

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r^2 + 1)^2 = 0,$$

i vidimo da su koreni $r_1 = r_2 = i$ i $r_3 = r_4 = -i$. Kako su dvostruki koreni konjugovano kompleksni brojevi (čiji je realni deo 0), imamo

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x.$$

Nehomogeni deo je $f(x) = 8 \cos x$, pa ga možemo predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x) \\ &= e^0 (8 \cos x + 0 \sin x) \end{aligned}$$

pa je $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_m(x) = 8$ i $Q_n(x) = 0$. Kako je $\alpha + \beta i = i$ dvostruki koren karakteristične jednačine, sledi da je $s = 2$, a s obzirom da je $k = 0$, uzimamo da su $T_k(x) = A$ i $R_k(x) = B$. Otuda je partikularno rešenje y_p koje odgovara nehomogenoj jednačini

$$\begin{aligned} y_p &= x^s e^{\alpha x} (T_k(x) \cos \beta x + R_k(x) \sin \beta x) \\ &= x^2 e^0 (A \cos x + B \sin x) \\ &= x^2 (A \cos x + B \sin x). \end{aligned}$$

Preostaje da izračunamo koeficijente A i B vraćanjem $y_p = Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x$ u početnu jednačinu. Prvo računamo izvode od y_p do četvrtog reda

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ax \cos x - Ax^2 \sin x + 2Bx \sin x + Bx^2 \cos x \\ &= (2Ax + Bx^2) \cos x + (2Bx - Ax^2) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= (2A + 2Bx) \cos x - (2Ax + Bx^2) \sin x + (2B - 2Ax) \sin x + (2Bx - Ax^2) \cos x \\ &= (2A + 4Bx - Ax^2) \cos x + (2B - 4Ax - Bx^2) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''' &= (4B - 2Ax) \cos x - (2A + 4Bx - Ax^2) \sin x + (-4A - 2Bx) \sin x + (2B - 4Ax - Bx^2) \cos x \\ &= (6B - 6Ax - Bx^2) \cos x + (-6A - 6Bx + Ax^2) \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p^{iv} &= (-6A - 2Bx) \cos x - (6B - 6Ax - Bx^2) \sin x + (-6B + 2Ax) \sin x + (-6A - 6Bx + Ax^2) \cos x \\ &= (-12A - 8Bx + Ax^2) \cos x + (-12B + 8Ax + Bx^2) \sin x. \end{aligned}$$

Sada uvrštavamo u početnu jednačinu $y^{iv} + 2y'' + y = 8 \cos x$, i imamo

$$\begin{aligned} &(-12A - 8Bx + Ax^2) \cos x + (-12B + 8Ax + Bx^2) \sin x \\ &+ 2 \left((2A + 4Bx - Ax^2) \cos x + (2B - 4Ax - Bx^2) \sin x \right) \\ &+ Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x = 8 \cos x, \end{aligned}$$

odnosno

$$-8A \cos x - 8B \sin x = 8 \cos x.$$

Pošto su $\sin x$ i $\cos x$ linearno nezavisne funkcije, prethodna jednakost je tačna samo ako je $A = -1$ i $B = 0$, pa je

$$y_p = -x^2 \cos x.$$

Rešenje početne jednačine je zbir homogenog i partikularnog rešenja

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x - x^2 \cos x.$$

Primetimo još da smo množenjem trigonometrijskih funkcija sa x^2 kod formiranja partikularnog rešenja zapravo obezbedili linearnu nezavisnost homogenog i partikularnog rešenja.

7.2.5. Metod varijacije konstanti

Ako je poznat fundamentalni skup rešenja $\Phi = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ homogenog dela diferencijalne jednačine, tada se opšte rešenje može naći po formuli

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n,$$

pri čemu su funkcije $C_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ određuju iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 &+ C_2'(x)y_2 &+ \dots &+ C_n'(x)y_n &= &0 \\ C_1'(x)y_1' &+ C_2'(x)y_2' &+ \dots &+ C_n'(x)y_n' &= &0 \\ &\vdots &&&& \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} &+ C_2'(x)y_2^{(n-1)} &+ \dots &+ C_n'(x)y_n^{(n-1)} &= &f(x), \end{aligned}$$

nakon integracije, tj. $C_i(x) = \int C_i'(x) dx$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Zadatak 7.29. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Rešenje. Prvo rešavamo homogeni deo, tj. jednačinu

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

čija je karakteristična jednačina

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Rešenja karakteristične jednačine su $r_1 = r_2 = 1$, pa je fundamentalni skup rešenja homogenog dela

$$\Phi = \{e^x, xe^x\}.$$

Sada opšte rešenje tražimo u obliku

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Sistem

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x &+ C_2'(x)xe^x &= &0 \\ C_1'(x)e^x &+ C_2'(x)(x+1)e^x &= &\frac{e^x}{x}, \end{aligned}$$

rešavamo tako što prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, pa je

$$C_2'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2.$$

Iz prve jednačine određujemo $C_1(x)$ jer je

$$C_1'(x) = -xC_2'(x) = -x \cdot \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow C_1(x) = -\int dx = -x + C_1.$$

Dakle, opšte rešenje je

$$y = (-x + C_1)e^x + (\ln|x| + C_2)xe^x,$$

odnosno

$$y = \underbrace{C_1e^x + C_2xe^x}_{y_h} - \underbrace{xe^x + xe^x \ln|x|}_{y_p}.$$

Zadatak 7.30. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \frac{e^{4x}}{1 + e^{2x}}.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina homogene jednačine je

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0,$$

a njeni koreni su $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ i $r_3 = 3$. Otuda je fundamentalni skup rešenja

$$\Phi = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}.$$

Opšte rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} + C_3(x)e^{3x}.$$

Sistem jednačina

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} + C_3'(x)e^{3x} &= 0, \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} + 3C_3'(x)e^{3x} &= 0, \\ C_1'(x)e^x + 4C_2'(x)e^{2x} + 9C_3'(x)e^{3x} &= \frac{e^{4x}}{1 + e^{2x}}. \end{aligned}$$

rešavamo koristeći Kramerovo pravilo

$$\begin{aligned} D_S &= \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2e^{6x}, \\ D_{C_1'} &= \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ \frac{e^{4x}}{1 + e^{2x}} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{e^{9x}}{1 + e^{2x}} \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = \frac{D_{C_1'}}{D_S} = \frac{e^{3x}}{2(1 + e^{2x})}, \\ D_{C_2'} &= \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & \frac{e^{4x}}{1 + e^{2x}} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = -\frac{2e^{8x}}{1 + e^{2x}} \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = \frac{D_{C_2'}}{D_S} = -\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}, \\ D_{C_3'} &= \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & \frac{e^{4x}}{1 + e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{7x}}{1 + e^{2x}} \quad \Rightarrow \quad C_3'(x) = \frac{D_{C_3'}}{D_S} = \frac{e^x}{2(1 + e^{2x})}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{e^{3x}}{2(1 + e^{2x})} dx = \int \frac{e^{2x}e^x}{2(1 + e^{2x})} dx = \left[\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 \pm 1}{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C_1 = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^x + C_1, \\ C_2(x) &= - \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx = \left[\begin{array}{l} 1 + e^{2x} = t \\ 2e^{2x} dx = dt \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \\ &= -\frac{1}{2} \ln |t| + C_2 = -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C_2, \\ C_3(x) &= \int \frac{e^x}{2(1 + e^{2x})} dx = \left[\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C_3 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^x + C_3. \end{aligned}$$

Stoga je opšte rešenje

$$y = \left(\frac{e^x}{2} - \frac{\operatorname{arctg} e^x}{2} + C_1 \right) e^x + \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C_2 \right) e^{2x} + \left(\frac{\operatorname{arctg} e^x}{2} + C_3 \right) e^{3x},$$

odnosno

$$y = \underbrace{C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}}_{y_h} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(e^x (e^x - \operatorname{arctg} e^x) - e^{2x} \ln(1 + e^{2x}) + e^{3x} \operatorname{arctg} e^x \right)}_{y_p}.$$