

1. Sistemi linearnih jednačina

-Arhitektura-

Asistent:
Tamara Kopanja

1.1. Determinante

Determinanta reda n je kvadratna šema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

čija se vrednost računa po određenim pravilima. Elementi determinante su realni brojevi a_{ij} gde sa $i = 1, 2, \dots, n$ označavamo vrstu a sa $j = 1, 2, \dots, n$ kolonu u kojoj se element nalazi. Broj vrsta i kolona određuje red determinante (broj kolona mora biti jednak broju vrsta). Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ čine glavnu dijagonalu, a elementi $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ sporednu dijagonalu. Dve determinante su jednake ako imaju jednaku brojnu vrednost.

Brojna vrednost determinante reda 1 je jednaka njenom jedinom elementu, npr. $|-2| = -2$.

Brojna vrednost determinante reda 2 određuje se tako što od proizvoda elemenata sa glavne dijagonale oduzmemo proizvod elemenata sa sporedne dijagonale:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Brojnu vrednost determinante reda 3 možemo odrediti uz pomoć Sarusovog pravila:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Zadatak 1.1. Izračunati determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) - 1 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 9) = 1 \cdot (-5) - 2 \cdot (-5) - 1 \cdot (-5) = -5 + 10 + 5 = 10$

c) $\begin{vmatrix} i^4 & i^3 \\ i^2 & i^{234} \end{vmatrix} = i^{238} - i^5 = (i^2)^{119} - i(i^2)^2 = -1 - i$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0$$

Minor (subdeterminanta) M_{ij} elementa a_{ij} determinante D reda n je determinante reda $n - 1$ koja se dobija od determinante D izostavljanjem i -te vrste i j -te kolone.

Primer:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$$

Kofaktor (algebarski komplement) A_{ij} elementa a_{ij} je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Primer: $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \cdot (-6) = 6$

Svaka determinanta D reda n može se predstaviti kao zbir n determinanti reda $n - 1$ na sledeći način:

-razvijanjem determinante po i -toj vrsti

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} ,$$

- razvijanjem po j -toj koloni

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

gde su A_{ij} odgovarajući kofaktori.

Zadatak 1.2. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ razvijajući je po

a) drugoj vrsti

b) prvoj koloni

Rešenje:

$$a) D = 1 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 - 2) + 2 \cdot (1 - 3) + (2 - 3) = 1 - 4 - 1 = -4$$

$$b) D = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (2 + 2) - (1 - 2) + 3(-1 - 2) = 4 + 1 - 9 = -4$$

Zadatak 1.3. Razvijajući determinantu po trećoj koloni izračunati

$$D = \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi}{2}i} & 1 & 0 \\ -1 & e^{-\frac{\pi}{2}i} & 1 \\ e^{\pi i} & e^{-\pi i} & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} - 1 \cdot A_{33} = 0 + (-1)^5 \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi}{2}i} & 1 \\ e^{\pi i} & e^{-\pi i} \end{vmatrix} -$$

$$(-1)^6 \begin{vmatrix} e^{\frac{\pi}{2}i} & 1 \\ -1 & e^{-\frac{\pi}{2}i} \end{vmatrix} = -(e^{-\frac{\pi}{2}i} - e^{\pi i}) - (e^0 + 1) =$$

$$= -(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) - \cos(\pi) - i \sin(\pi)) - 2 = -(-i + 1) - 2 = -3 + i$$

Zadatak 1.4. (*Domaći*) Razviti determinantu po elementima prve vrste

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Rešenje: -7

Osobine detereminanti:

1. Ako u determinanti zamene mesta vrste i kolone, ne menjajući njihov poredak, vrednost determinante ostaje ista.

$$\text{Primer: } D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

2. Ako elementi jedne vrste (kolone) zamenu mesta za elementima neke druge vrste (kolone) determinanta menja znak.

$$\text{Primer: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \text{ (druga i treća vrsta su zamenile mesta)}$$

3. Determinanta se množi nekim brojem tako što se elementi jedne vrste ili kolone pomnože tim brojem.

$$\text{Primer: } 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \cdot 3$$

4. Vrednost determinante jednaka je nuli ako su bilo koje dve vrste ili kolone jednake.

$$\text{Primer: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (prva i treća kolona su jednake)}$$

5. Vrednost determinante jednaka je nuli ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima neke druge vrste.

$$\text{Primer: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6. Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste (kolone) prethodno pomnoženi nekim brojem.

Primer: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -8 & 3 \end{vmatrix} = -7$ (prva kolona pomnožena sa -3 i dodata drugoj koloni)

7. Ako je svaki elemenat k -te vrste prikazan kao $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$ tada je determinanta jednaka zbiru determinanti D_1 i D_2 , tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Vrednost determinante je jednaka nuli ako je jedna vrsta (kolona) jednaka linearnoj kombinaciji drugih vrsta (kolona).
9. Vrednost determinante čiji su svi elementi iznad (ili ispod) glavne dijagonale jednaki nuli jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

Primer: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$

Zadatak 1.5. Izračunati determinantu i naći kada je njena vrednost jednaka

nuli. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Rešenje: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$D = 0 \text{ za } b = a \text{ ili } c = a \text{ ili } c = b.$$

Zadatak 1.6. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$

Rešenje:

$$D = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & 0 \\ 1 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)^2$$

Zadatak 1.7. (*Domaći*) Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

Rešenje: Iskoristiti ideju kao u prethodnom zadatku, pojednostaviti računanje uz pomoć osobina. Rešenje je $-2(x^3 + y^3)$.

Zadatak 1.8. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Rešenje:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ -8 & 7 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -8 & 7 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -14 & -10 \\ -8 & 39 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & -10 \\ 39 & 20 \end{vmatrix} = -280 + 390 = 110$$

2. Sistemi linearnih jednačina

Sistem m linearnih jednačina sa n nepoznatih nad poljem realnih brojeva je konjunkcija jednačina

$$(2.1) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

gde su $n, m \in \mathbf{N}$, koeficijenti a_{ij} i slobodni članovi b_i realni brojevi, x_j nepoznate $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. U slučaju da su svi slobodni članovi jednaki nuli, tj. $b_j = 0$ za $j = 1, 2, \dots, m$ tada je sistem **homogen**.

Ako je broj jednačina jednak broju promenljivih, tj. $m = n$ sistem je kvadratni. Rešenje sistema je uređena n -torka $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ takva da je zadovoljena svaka jednačina u sistemu za vrednosti $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$.

U zavisnosti od broja rešenja sistem može biti:

1. određen - ima tačno jedno rešenje
2. neodređen - ima više od jednog rešenja
3. nemoguć (kontradiktoran) - nema rešenja.

Ako sistem ima bar jedno rešenje kažemo da je *saglasan* (moguć).

Primer:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 4. \end{aligned}$$

Sistem je kontradiktoran, nema rešenje. $R_S = \emptyset$

b)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 4 \\ x_2 &= 3.\end{aligned}$$

Sistem je određen, ima jedno rešenje $R_S = \{(1, 3)\}$.

c)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 6.\end{aligned}$$

Sistem je neodređen, ima beskonačno mnogo rešenja, $R_S = \{(t, 2 - t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Homogen sistem uvek ima bar jedno rešenje $(0, 0, \dots, 0)$ i ono se naziva trivijalno rešenje. Dakle, homogen sistem nikada nije nemoguć.

Za dva sistema kažemo da su ekvivalentni ako im se skupovi rešenja poklapaju. Zbog toga je cilj prilikom rešavanja sistema transformisati ga u ekvivalentan sistem za koji je lako odrediti rešenja.

Elementarne transformacije:

1. zamena mesta jednačina
2. množenje neke jednačine brojem različitim od nule
3. dodavanje neke jednačine pomnožene brojem različitim od nule nekoj drugoj jednačini

Gausov algoritam

Pomoću Gausovog algoritma možemo rešavati proizvoljan sistem linearnih jednačina. Elementarnim transformacijama svodimo sistem na „trapezni“ ili „trougao“ oblik. Neka je dat sistem jednačina 2.1 i neka je $a_{11} \neq 0$ (ako je $a_{11} = 0$ onda menjamo jednačine tako da je koeficijent kod x_1 različit od nule).

Prvu jednačinu pomnoženu sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i dodajemo drugoj jednačini. Pomnoženu sa $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ dodajemo trećoj i tako redom. Dobijamo ekvivalentni sistem:

$$\begin{aligned}(2.2) \quad a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ (a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}})x_2 + \dots + (a_{2n} - \frac{a_{1n} \cdot a_{21}}{a_{11}})x_n &= b_2 - \frac{b_1 \cdot a_{21}}{a_{11}} \\ & \dots \\ (a_{m2} - \frac{a_{12} \cdot a_{m1}}{a_{11}})x_2 + \dots + (a_{mn} - \frac{a_{1n} \cdot a_{m1}}{a_{11}})x_n &= b_m - \frac{b_1 \cdot a_{m1}}{a_{11}}.\end{aligned}$$

Nakon označavanja koeficijenata sa c_{ij} i b'_i imamo:

$$\begin{aligned}(2.3) \quad a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b'_1 \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= b'_2 \\ & \dots \\ c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n &= b'_m.\end{aligned}$$

Ako se u sistemu pojavi jednačina čiji su svi koeficijenti jednaki nuli dok se sa desne strane nalazi element različit od nule sistem je kontradiktoran i

postupak se zaustavlja. Ako su svi koeficijenti jednaki nuli i slobodan član jednak nuli, jednačina se odbacuje i nastavlja se postupak.

Neka je $c_{22} \neq 0$. Prva i druga jednačina se prepisuju, ostaju nepromenjene. Drugu jednačinu pomnoženu sa $-\frac{c_{32}}{c_{22}}$ i dodaje trećoj,..., množi se sa $-\frac{c_{m2}}{c_{22}}$ i dodaje poslednjoj. Nastavljamo postupak dok ne dođemo do nekog od sledećih sistema:

1. „trougao“

$$(2.4) \quad \begin{array}{rclcl} g_{11}x_1 + & g_{12}x_2 + \dots + & g_{1n}x_n & = & h_1 \\ & g_{22}x_2 + \dots + & g_{2n}x_n & = & h_2 \\ & \dots & & & \\ & & g_{mn}x_n & = & h_m \end{array}$$

2. „trapezni“

$$(2.5) \quad \begin{array}{rclcl} p_{11}x_1 + & p_{12}x_2 + & \dots + & p_{1n}x_n & = & q_1 \\ & p_{22}x_2 + & \dots + & p_{2n}x_n & = & q_2 \\ & \dots & & & & \\ & & p_{kk}x_k & p_{kn}x_n & = & q_k \end{array}$$

Ako se dobije sistem (1) i ako je pri tome $g_{ii} \neq 0$ za $i = 1, 2, \dots, n$, tada je sistem određen i počev od x_n idući ka prvoj jednačini lako odredimo rešenje.

Ako je dobijen sistem (2) on se može napisati u obliku

$$(2.6) \quad \begin{array}{rclcl} p_{11}x_1 + & p_{12}x_2 + \dots + & p_{1k}x_k & = & q_1 - p_{1k+1}x_{k+1} - \dots - p_{1n}x_n \\ & p_{22}x_2 + \dots + & p_{2k}x_k & = & q_2 - p_{2k+1}x_{k+1} - \dots - p_{2n}x_n \\ & \dots & & & \\ & & p_{kk}x_k & = & q_k - p_{kk+1}x_{k+1} - \dots - p_{kn}x_n, \end{array}$$

Zaključujemo da sistem ima beskonačno mnogo rešenja koja zavise od izbora $x_{k+1}, \dots, x_n$ tj. $n - k$ promenljivih je proizvoljno pa je sistem $n - k$ puta neodređen.

Zadatak 2.1. Gausovim algoritmom rešiti sistem jednačina:

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & 3x + 5y = -4 & \text{b)} \quad x + 2y - z = 2 \\ & -3x - y = 8 & 2x + 3y + z = 5 \\ & & 3x + 4y + 2z = 7 \end{array}$$

Rešenje:

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & 3x + 5y = -4 \\ & -3x - y = 8 \end{array}$$

Prvu jednačinu prepisemo, a u drugu dodamo prvu (pomoženu sa 1).

$$\begin{array}{lcl} 3x + 5y & = & -4 \\ 4y & = & 4 \end{array}$$

Iz druge jednačine dobijamo direktno $y = 1$ i nakon vraćanja u prvu dobijamo $x = -3$. Sledi da je $R_S = \{(-3, 1)\}$.

$$\begin{array}{rclcl} \text{b)} & x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ & 3x & + & 4y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

Prvu jednačinu prepisemo. Prvu množimo sa (-2) i dodajemo drugoj, a zatim je množimo sa (-3) i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rclcl} & x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & - & 2y & + & 5z & = & 1 \end{array}$$

Prepisujemo prvu i drugu jednačinu, a drugu množimo sa (-2) i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rclcl} & x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & & & - & z & = & -1 \end{array}$$

Iz treće dobijamo $z = 1$, zatim iz druge $y = 2$ i iz prve da je $x = -1$. Sledi $R_S = \{(-1, 2, 1)\}$.

Kramerovo pravilo

Kramerovo pravilo se može primeniti samo za rešavanje kvadratnih sistema. Neka je dat sistem jednačina

$$\begin{array}{rcl} (2.7) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & & \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

$$D_S = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{- determinanta sistema}$$

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{- dobijamo kada umesto koeficijenata uz } x_i$$

stavimo slobodne članove

Ako je $D_S \neq 0$ sistem je određen i ima jedinstveno rešenje $(x_1, \dots, x_n)$ gdje je $x_i = \frac{D_i}{D_S}$. Ako je $D_S = 0$ sistem je neodređen ili nemoguć.

Za homogen sistem važi:

$D_S \neq 0$ sistem je određen

$D_S = 0$ sistem je neodređen.

Zadatak 2.2. Kramerovim pravilom rešiti sisteme iz Zadatka 2.1.

Rešenje:

$$\text{a) } D_S = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 15 = 12 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 40 = -36,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 12 = 12$$

Sledi da je $x = \frac{D_x}{D_S} = \frac{-36}{12} = -3, y = \frac{D_y}{D_S} = \frac{12}{12} = 1$ pa je $R_S = \{(-3, 1)\}$.

$$\text{b) } D_S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1.$$

Sledi da je $x = \frac{-1}{1} = -1, x = \frac{2}{1} = 2$ i $z = \frac{1}{1} = 1$ pa je $R_S = \{(-1, 2, 1)\}$.

Zadatak 2.3. Rešiti sisteme jednačina:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x + 3y - 5z = 6 & \text{b) } 3x + 3y - 5z = 6 \\ 2x \quad \quad + z = 3 & 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 3y - 4z = 9. & 3x + 3y - 4z = 9. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } x + y = 6 & \text{d) } x + y + z = 5 \\ 2x + y = 9 & 3x - y + 2z = 1 \\ 4x + 2y = 18 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e) } x + y + 2z + 2u = 5 \\ 2x + y - z - u = 0 \\ 3x + 2y + z + u = 5 \\ -x - y + 2z + u = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{f) } 2x - y + 3z - 2u + 4v = -1 \\ 4x - 2y + 5z + u + 7v = 2 \\ 2x - y + z + 8u + 2v = 1 \end{array}$$

Rešenje:

a)

$$\begin{array}{rcl} x + 3y - 5z & = & 6 \\ 2x \quad \quad + z & = & 3 \\ 3x + 3y - 4z & = & 9. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & + & 3y & - & 5z & = & 6 \\ & - & 6y & + & 11z & = & -9 \\ & - & 6y & + & 11z & = & -9. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & + & 3y & - & 5z & = & 6 \\ & - & 6y & + & 11z & = & -9 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & + & 3y & = & 6 & + & 5z \\ & - & 6y & = & -9 & - & 11z \end{array}$$

Neka je $z = t, t \in \mathbb{R}$. Tada je $y = \frac{3}{2} + \frac{11}{6}t$ i $x = 6 + 5t - \frac{9}{2} - \frac{11}{2}t = \frac{3}{2} - \frac{t}{2}$.

Sistem je neodređen, rešenja su $R_S = \left\{ \left(\frac{3-t}{2}, \frac{3}{2} + \frac{11}{6}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

b)

$$\begin{array}{rrrr} 3x & + & 3y & - & 5z & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} z & + & 2x & + & 2y & = & 6 \\ -5z & + & 3x & + & 3y & = & 3 \\ -4z & + & 3x & + & 3y & = & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} z & + & 2x & + & 2y & = & 6 \\ & & 13x & + & 13y & = & 21 \\ & & 11x & + & 11y & = & 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} z & + & 2x & + & 2y & = & 6 \\ & & x & + & y & = & \frac{21}{13} \\ & & x & + & y & = & \frac{21}{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} z & + & 2x & + & 2y & = & 6 \\ & & x & + & y & = & \frac{21}{13} \\ & & & & 0 & = & \frac{21}{11} - \frac{21}{13} \end{array}$$

Sledi da je $R_S = \emptyset$.

c)

$$\begin{array}{rrrr} x & + & y & = & 6 \\ 2x & + & y & = & 9 \\ 4x & + & 2y & = & 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & + & y & = & 6 \\ & - & y & = & -3 \\ & - & 2y & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 6 \\ & y & = -3 \\ & 0 & = 0 \end{array}$$

Sledi da je $y = 3$, a zatim da je $x = 3$, pa je $R_S = \{(3, 3)\}$.

d)

$$\begin{array}{rcl} x & + & y + z = 5 \\ 3x & - & y + 2z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y + z = 5 \\ & - & 4y - z = -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & z = 5 - y \\ & - & z = -14 + 4y \end{array}$$

Za $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ je $z = 14 - 4t$ i $x = 5 - t - 14 + 4t = -9 + 3t$, tj.
 $R_S = \{(3t - 9, t, 14 - 4t) : t \in \mathbb{R}\}$.

e)

$$\begin{array}{rcl} x & + & y + 2z + 2u = 5 \\ 2x & + & y - z - u = 0 \\ 3x & + & 2y + z + u = 5 \\ -x & - & y + 2z + u = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y + 2z + 2u = 5 \\ & - & y - 5z - 5u = -10 \\ & - & y - 5z - 5u = -10 \\ & & 4z + 3u = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y + 2z + 2u = 5 \\ & - & y - 5z - 5u = -10 \\ & & 0 = 0 \\ & & 4z + 3u = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y + 2z + 2u = 5 \\ & - & y - 5z - 5u = -10 \\ & & 4z + 3u = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y + 2z = 5 - 2u \\ & - & y - 5z = -10 + 5u \\ & & 4z = 8 - 3u \end{array}$$

Za $u = t$, $t \in \mathbb{R}$ je $z = 2 - \frac{3}{4}t$, $y = 10 - 5t - 10 + \frac{15}{4}t = \frac{-5}{4}t$ i
 $x = 5 - 2t - 4 + \frac{3}{2}t + \frac{5}{4}t = 1 + \frac{3}{4}t$, odnosno

$$R_S = \left\{ \left(1 + \frac{3}{4}t, -\frac{5}{4}t, 2 - \frac{3}{4}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

f)

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & u & + & 7v & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & + & 8u & + & 2v & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\ & & & & - & z & + & 5u & - & v & = & 4 \\ & & & & - & 2z & + & 10u & - & 2v & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 2x & - & y & + & 3z & - & 2u & + & 4v & = & -1 \\ & & & & - & z & + & 5u & - & v & = & 4 \\ & & & & & & & & & & 0 = & -6 \end{array}$$

Sistem je kontradiktoran tj. $R_S = \emptyset$.

Zadatak 2.4. Odrediti realne parametre c i d tako da sistem bude neodređen i rešiti u slučaju neodređenosti:

$$\begin{array}{rrrr} 5x & + & 3y & + & z & = & -5 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ cx & + & 2y & - & z & = & d \end{array}$$

Rešenje:

Sistem će biti neodređen ili nemoguć ako je $D_S = 0$,

$$D_S = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \\ c & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3c + 2 + 2c - 10 + 3 = 5 + 5c.$$

Dakle, $D_S = 0$ akko $c = -1$. Za $c = -1$ sistem je nemoguć ili neodređen. Menjamo u sistemu $c = -1$ i rešavamo Gausovom metodom sistem:

$$\begin{array}{rrrr} 5x & + & 3y & + & z & = & -5 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & - & z & = & d \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 5x & + & 3y & + & z & = & -5 \\ -x & + & 2y & - & z & = & d \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 13y & - & 4z & = & -15 \\ 0 & = & d + 2 \end{array}$$

Za $d \neq -2$ sistem je nemoguć. Za $d = -2$:

$$\begin{array}{rrrr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 13y & - & 4z & = & -15 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & - & 2y & = & 2 & - & z \\ 13y & = & -15 & + & 4z \end{array}$$

Za $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ je $y = \frac{-15}{13} + \frac{4}{13}t$ i $x = 2 - t - \frac{30}{13} + \frac{8}{13}t = \frac{-4}{13} - \frac{5}{13}t$, pa je

$$R_S = \left\{ \left(\frac{-4}{13} - \frac{5}{13}t, \frac{-15}{13} + \frac{4}{13}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zadatak 2.5. Odrediti realan parametar b tako da sistem bude nemoguć

$$\begin{array}{rrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & b \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

Rešenje:

$$\begin{array}{rrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & b \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 4z & = & -1 \\ & & & & 4z & = & b - 1 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} x & - & 3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -1 \\ & & 4z & = & b - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} x & - & 3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -1 \\ & & 0 & = & b \end{array}$$

Za $b \neq 0$ sistem je nemoguć, a za $b = 0$ imamo sistem

$$\begin{array}{rrcl} x & - & 3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -1 \end{array}$$

koji je određen.

Zadatak 2.6. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati sistem linearnih jednačina i rešiti ga u slučaju neodređenosti.

$$\begin{array}{rrcrcl} ax & + & (a-1)y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & az & = & a \\ & - & ay & + & az & = & 0 \end{array}$$

Rešenje: Determinanta sistema je

$$D_S = \begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a + a^3 - a^2 + a = a^2(a-2)$$

Dakle, za $D_S \neq 0$, odnosno $a \neq 0$ i $a \neq 2$ sistem je određen.

Za $a = 0$ i $a = 2$ sistem je neodređen ili nemoguć. Ispitajmo koji je od tih slučajeva.

$a = 0$

$$\begin{array}{rrcr} & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 1 + y \end{array}$$

Za $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ je $z = 1 + t$ i $x = t$ pa je $R_S = \{(t, t, 1 + t) : t \in \mathbb{R}\}$.

$a = 2$

$$\begin{array}{rrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & 3y & - & 3z & = & -3 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & - & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -3 \end{array}$$

Sistem je nemoguć, tj. $R_S = \emptyset$.

Zadatak 2.7. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati sistem linearnih jednačina i rešiti ga u slučaju neodređenosti

$$\begin{array}{lcl} \text{a) } x + y + z = a & \text{b) } x - 2y + (a+1)z = 3 \\ x + (a+1)y + z = 2a & 5x + 2y = 1 \\ x + y + az = -a & ax + 2z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{c) } (a-1)x & = & 0 \\ x + (a-1)y & = & 0 \\ y - (a-1)z & = & 0. \end{array}$$

Rešenje:

a)

$$D_S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a + 1 + 1 - a - 1 - 1 - a = a^2 - a = a(a-1)$$

Za $D_S \neq 0$ tj. $a \neq 0$ i $a \neq 1$ sistem je određen.

$a = 0$

$$\begin{array}{rrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

Sledi da je $z = 0$ i $x = -y$. Ako je $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ onda je $R_S = \{(-t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. Sistem je neodređen.

$$a = 1$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -2 \end{array}$$

Sistem je nemoguć, $R_S = \emptyset$.

b)

$$D_S = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a+1 \\ 5 & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 4 - 2a(a+1) + 20 = -2a^2 - 2a + 24 =$$

$$= -2(a^2 + a - 12) = -2(a+4)(a-3)$$

$D_S \neq 0$ za $a \neq -4$ i $a \neq 3$ i tada je sistem određen. Za $a = -4$ i $a = 3$ sistem je neoređen ili nemoguć.

$$a = -4$$

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y & - & 3z & = & 3 \\ 5x & + & 2y & & & = & 1 \\ -4x & & & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y & - & 3z & = & 3 \\ & & 12y & + & 15z & = & -14 \\ & - & 8y & - & 10z & = & 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y & - & 3z & = & 3 \\ & - & 4y & - & 5z & = & 7 \\ & & 12y & + & 15z & = & -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y & - & 3z & = & 3 \\ & - & 4y & - & 5z & = & 7 \\ & & & & 0 & = & 7 \end{array}$$

Sistem je nemoguć, $R_S = \emptyset$.

$$a = 3$$

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ 5x & + & 2y & & & = & 1 \\ 3x & & & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ & & 12y & - & -20z & = & 14 \\ & & 6y & - & 10z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ & & 6y & - & -10z & = & 7 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} x & - & 2y & = & 3 & - & 4z \\ & & 6y & = & 7 & + & 10z \end{array}$$

Za $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ je $y = \frac{7}{6} + \frac{5}{2}t$ i $x = 3 - 4t + \frac{7}{3} + 5t = t + \frac{16}{3}$ pa je

$$R_S = \left\{ \left(t + \frac{16}{3}, \frac{7}{6} + \frac{5}{2}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

c)

$$D_S = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$$

Za $D_S \neq 0$ tj. za $a \neq 1$ sistem je određen. Za $D_S = 0$ sistem je neodređen (jer je homogen pa ne može biti nemoguć).

$$\begin{array}{rr} & 0 & = & 0 \\ x & & = & 0 \\ & y & = & 0. \end{array}$$

Sledi da je $R_S = \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Zadatak 2.8. U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutovati sistem linearnih jednačina i rešiti ga u slučaju neodređenosti

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{rrrr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & a \\ x & + & by & + & 6z & = & -2 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{rrrr} -ax & & & - & 3z & = & 3b \\ x & + & (a+1)y & & & = & 1 \\ ax & - & & 2y & + & 4z & = & -2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \begin{array}{rrrr} ax & & + & bz & = & -a \\ & (a+b)y & & & = & b \\ bx & & & az & = & 2a \end{array} \end{array}$$

Rešenje:

a)

$$D_S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & b & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & b \end{vmatrix} = 18 - 6 + 2b - 3 + 3b - 24 = 5b - 15$$

Za $D_S \neq 0$, odnosno $b \neq 3$ sistem je određen. Za $b = 3$ sistem je nemoguć ili neodređen.

$$b = 3$$

$$\begin{array}{rrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & a \\ x & + & 3y & + & 6z & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & y & - & 5z & = & a - 6 \\ & & y & + & 5z & = & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & y & - & 5z & = & a - 6 \\ & & & & 0 & = & a - 11 \end{array}$$

Za $a \neq 11$ sistem je nemoguć. Za $a = 11$ dobijamo

$$\begin{array}{rrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & y & - & 5z & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x & + & 2y & = & 3 & - & z \\ & - & y & = & 5 & + & 5z \end{array}$$

Sistem je neodređen, za $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ je $y = -5 - 5t$ i $x = 3 - t + 10 + 10t = 9t + 13$ pa je $R_S = \{(9t + 13, -5 - 5t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

b)

$$D_S = \begin{vmatrix} -a & 0 & -3 \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 1 & a+1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -4a^2 - 4a + 6 + 3a^2 + 3a =$$

$$= -a^2 - a + 6 = -(a - 2)(a + 3)$$

Sistem je određen za $D_S \neq 0$ tj. za $a \neq 2$ i $a \neq -3$, dok je za $D_S = 0$ sistem neodređen ili nemoguć.

$$a = 2$$

$$\begin{array}{rrcr} -2x & & & - & 3z & = & 3b \\ & x & + & 3y & & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & 4z & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x & + & 3y & & = & 1 \\ & & 6y & - & 3z & = & 3b + 2 \\ & - & 8y & + & 4z & = & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x & + & 3y & & = & 1 \\ & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & 2y & - & z & = & b + \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & + & 3y & = & 1 \\ & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & b - \frac{1}{3} \end{array}$$

Za $b \neq \frac{1}{3}$ sistem je nemoguć i $R_S = \emptyset$. Za $b = \frac{1}{3}$ imamo

$$\begin{array}{rcl} x & + & 3y & = & 1 \\ & - & 2y & + & z & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & & = & 1 & - & 3y \\ & & z & = & -1 & + & 2y \end{array}$$

Za $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ je $z = -1 + 2t$ i $x = 1 - 3t$ pa je $R_S = \{(1 - 3t, t, 2t - 1) : t \in \mathbb{R}\}$.

c)

$$D_S = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a+b \\ b & 0 \end{vmatrix} = a^2(a+b) - b^2(a+b) =$$

$$= (a+b)(a^2 - b^2) = (a+b)^2(a-b)$$

Za $D_S \neq 0$ tj. $a \neq b$ i $a \neq -b$ sistem je određen. Za $D_S = 0$ sistem je neodređen ili nemoguć.

$$a = b$$

$$\begin{array}{rcl} ax & + & az & = & -a \\ & 2ay & & = & a \\ ax & & az & = & 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ax & + & az & = & -a \\ & 2ay & & = & a \\ & & 0 & = & 3a \end{array}$$

Za $a \neq 0$ sistem je nemoguć $R_S = \emptyset$. Za $a = 0$ sistem postaje $0 = 0$ tj. tri puta neodređen sistem $R_S = \{(s, w, t) : s, w, t \in \mathbb{R}\}$.

$$a = -b$$

$$\begin{array}{rcl} ax & - & az & = & -a \\ & & 0 & = & -a \\ -ax & & az & = & 2a \end{array}$$

Za $a \neq 0$ sistem je nemoguć $R_S = \emptyset$. Za $a = 0$ ista situacija kao malopre, sistem je tri puta neodređen $R_S = \{(s, w, t) : s, w, t \in \mathbb{R}\}$.

Napomena 2.9. U zadacima sa diskusijom u zavisnosti od parametra ne koristimo Kramерово pravilo. Ako je $D_x = D_y = D_z = 0$ ne znamo da li je sistem neodređen ili nemoguć.

Primer:

$$x + y = 2$$

$$2x + 2y = 2$$

$$D_S = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ i}$$

$$D_x = D_y = 0$$

a **sistem je neodređen**.

$$x + y + z = 1$$

$$2x + 2y + 2z = 2$$

$$x + y + z = 3$$

$$D_S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ i}$$

$$D_x = D_y = D_z = 0$$

a **sistem je nemoguć** (prva i treća jednačina vode do kontradikcije).

3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 3.1. Rešiti sledeće sisteme linearnih jednačina:

a) $x + 2y - z = 2$ b) $x + y = 1$

$$3x - y + 2z = 7 \quad \quad x + z = 3$$

$$-x - y + 2z = 3 \quad \quad y + z = 0$$

Zadatak 3.2. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati sistem linearnih jednačina:

a) $ax - 3y = a$ b) $2x + y + az = 1$

$$(a-4)x + (a-7)y = -6 \quad \quad ax + 3y - z = 5$$

$$x - y + 7z = -3$$

c) $5x + (a-2)y = 1$ d) $x + y + z = 6$

$$3x + y - z = 0 \quad \quad ax + 4y + z = 5$$

$$ax + (a-2)y + 2z = 2 \quad \quad 6x + (a+2)y + 2z = 13$$

4. Matrične jednačine**Matrice**

Pravougaona šema oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

je **matrica formata (tipa) $m \times n$** .

Vrednosti a_{ij} , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ su **elementi matrice**. Takvu matricu označavamo sa $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. U slučaju da je $m = n$ matrica je kvadratna. Mi ćemo raditi sa matricama kod kojih su elementi a_{ij} realni brojevi. Matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ su **jednake** ako je $m = p$ i $n = q$ i $a_{ij} = b_{ij}$, odnosno ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

- Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli zove se **nula-matrica**

- Kvadratna matrica E čiji su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli, a svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici, zove se **jedinična matrica**
- Suprotna matrica matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ je $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$.
- Transponovana matrica matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dobija se kada u matrici A sve odgovarajuće vrste i kolone zamene mesta, označavamo sa A^T .

Operacije sa matricama:

- Sabiranje matrica: Ako je $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, tada je $A+B = C$ gde je $C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.
Dakle, matrice se mogu sabirati samo ako su istog formata i to tako što im se sabiraju elementi na odgovarajućim mestima.

Primer:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Osobine sabiranja matrica:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
 2. $A + 0 = A$
 3. $A + (-A) = 0$
 4. $A + B = B + A$
- Množenje matrice skalarom: Ako je α neki skalar ($\alpha \in \mathbb{R}$) a $[a_{ij}]_{m \times n}$ matrica, tada je $\alpha [a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$. Dakle, matricu množimo skalarom tako što se svaki njen element pomnoži tim skalarom.

Primer:

$$(-3) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}$$

- Proizvod matrica: Ako je $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times k}$, tada je proizvod matrica, u oznaci $A \cdot B$ matrica $C = [c_{ij}]_{m \times k}$ gde je $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Dakle, dve matrice se mogu pomnožiti samo ako je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice. Rezultat je matrica čiji je broj vrsta isti kao kod prve matrice a broj kolona kao kod druge matrice. Element u i -toj vrsti i j -toj koloni proizvoda dobija se tako što se elementi i -te vrste prve matrice pomnože sa odgovarajućim elementima j -te kolone druge matrice i dobijeni proizvodi se saberu.

Primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Osobine proizvoda matrica:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $(A+B)C = AC + BC$
3. $A(B+C) = AB + AC$
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. $EA = AE = A$ za $A \neq 0$
6. Ako je $AB = 0$ ne sledi da je $A = 0$ ili $B = 0$

Primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Napomena 4.1. Množenje matrica nije komutativno.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Transponovanje

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Osobine transponovanja matrice:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Zadatak 4.2. Izračunati $3A - 2D + 5E$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Rešenje:

$$3A - 2D + 5E = \begin{bmatrix} 3-2+5 & 6-4+0 \\ 6-6+0 & 3-8+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4.3. Izračunati, ako je moguće:

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} - \text{nemoguće je množiti}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \cdot [2]_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$[2]_{1 \times 1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} - \text{nemoguće je množiti}$$

Zadatak 4.4. Date su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Odrediti $A^2 + BC - 3E$.**Rešenje:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2 + BC - 3E = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 38 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Inverzna matricaDeterminanta kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ je

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Adjungovana matrica kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ je

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}^T$$

gde su $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ kofaktori elementa a_{ij} .

Ako je A kvadratna matrica reda n i ako postoji kvadratna matrica X takva da je $AX = XA = E$ tada je X inverzna matrica matrice A i označavamo je sa A^{-1} .

Kvadratna matrica je regularna ako ima inverznu matricu, a singularna ako je nema. Kvadratna matrica je regularna (ima inverznu) akko je $\det(A) \neq 0$.

Tada je $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$.

Osobine inverzne matrice:

1. Ako su A i B regularne matrice istog reda tada je $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. Ako je A regularna matrica, tada je i A^T regularna matrica i važi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. Ako je A regularna matrica, tada je $(A^{-1})^{-1} = A$.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{jer je } \det(A) = -6 \text{ i } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Napomena 4.5. Kod matrica reda 2 adjungovana matrica se može lako odrediti tako što elementima na glavnoj dijagonali zamenimo (međusobno) mesta, a elementima na sporednoj zamenimo samo znak.

Zadatak 4.6. Odrediti A^{-1} , ako postoji:

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad c) \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

- a) Kako je $\det(A) = 5 - 4 = 1 \neq 0$, inverzna matrica matrice A postoji. Da bismo je odredili, izračunaćemo prvo adjungovanu matricu $\text{adj}(A)$ matrice A kao transponovanu kofaktor-matricu matrice A . Kofaktori A_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$ elemenata a_{ij} matrice A su

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1,$$

tako da je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo, korišćenjem napomene 4.5 brže bismo izračunali adjungovanu matricu.

b) Determinanta matrice B je

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

što znači da inverzna matrica postoji i

$$B^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T.$$

Dakle

$$B^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Determinanta matrice C je

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

pa zaključujemo da inverzna matrica postoji. Adjungovana matrica je

$$\text{adj}(C) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, inverzna matrica je

$$C^{-1} = \frac{1}{-1} \text{adj}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrične jednačine su jednačine u kojima se kao poznate i nepoznate promenljive javljaju matrice.

Zadatak 4.7. Rešiti matrične jednačine:

a) $AX = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $AX - 2X = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$

c) $X - 2XA = B$ ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Rešenje:

a) Nakon množenja jednakosti sa leve strane sa A^{-1} imamo

$$\overbrace{A^{-1}A}^E X = A^{-1}B$$

odnosno $X = A^{-1}B$. Moramo odrediti inverznu matricu A^{-1} . Determinanta $\det(A) = 3 - 12 = -9$. Sledi,

$$A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$X = A^{-1}B = \frac{-1}{9} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{9} \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Napisaćemo jednačinu u pogodnijem obliku i zatim množimo sa leve strane sa odgovarajućom inverznom matricom:

$$(A - 2E)X = B$$

$$(A - 2E)^{-1}(A - 2E)X = (A - 2E)^{-1}B$$

$$X = (A - 2E)^{-1}B$$

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

pa je $\det(A - 2E) = -3 + 5 = 2 \neq 0$. Sledi da je

$$X = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{(A-2E)^{-1}} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -52 & -30 \\ -12 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -15 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$c) X - 2XA = B$$

$$X(E - 2A) = B$$

$$X \underbrace{(E - 2A)(E - 2A)^{-1}}_E = B(E - 2A)^{-1}$$

Dakle, sada smo množili sa desne strane sa inverznom matricom matrice $(E - 2A)$.

$$E - 2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinante $\det(E - 2A) = 25 - 12 = 13 \neq 0$, pa inverzna postoji.

$$\text{adj}(E - 2A) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}}_{(E-2A)^{-1}} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -17 & -12 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4.8. Rešiti matričnu jednačinu $AXB = C$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Množimo jednačinu sa A^{-1} sa leve strane i sa B^{-1} sa desne strane.

$$AXB = C$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_E X \overbrace{BB^{-1}}^E = A^{-1}CB^{-1}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

Računamo inverzne matrice matrica A i B .

$$\det(A) = 8 + 12 + 3 - 18 + 8 + 2 = 15 \neq 0,$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & -14 & -5 \\ 5 & -5 & -5 \\ -2 & 11 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 5 & -2 \\ -14 & -5 & 11 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 0 - 4 - 2 + 3 + 4 = 1 \neq 0,$$

$$\text{adj}(B) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vraćamo se da računamo X :

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 5 & -2 \\ -14 & -5 & 11 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 18 & 11 & 1 \\ -39 & -8 & 2 \\ -15 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 51 & -25 & 8 \\ -138 & 70 & -29 \\ -45 & 25 & -15 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4.9. Rešiti matricnu jednačinu $AX - B = X$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$AX - B = X$$

$$AX - X = B$$

$$(A - E)X = B$$

$$(A - E)^{-1}(A - E)X = (A - E)^{-1}B$$

$$A - E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanta $\det(A - E) = 6 \neq 0$, pa inverz postoji, računamo adjungovanu matricu:

$$\text{adj}(A - E) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4.10. Rešiti matricnu jednačinu $ABX = 4X + C$ za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = A^T, C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

$$ABX = 4X + C$$

$$(AB - 4E)X = C$$

$$(AB - 4E)^{-1}(AB - 4E)X = (AB - 4E)^{-1}C$$

$$X = (AB - 4E)^{-1}C$$

$$AB - 4E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Od dobijene matrice $AB - 4E$ tražimo inverznu. Determinanta je $\det(AB - 4E) = 16 + 16 + 8 - 24 = 16 \neq 0$, a adjungovana matrica:

$$\text{adj}(AB - 4E) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -4 & -28 & 12 \\ 4 & 12 & -4 \end{bmatrix}^T$$

Primitimo da je $\text{adj}(AB - 4E)$ simetrična i da je jednaka svojoj transponovanoj matrici. Rešenje po X je

$$X = \frac{1}{4} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}}_{(AB-4E)^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.

Zadatak 4.11. Matričnim računom rešoto sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rrcr} -x & + & 2y & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z = 5 \\ & & y & + & z = 3 \end{array}$$

Rešenje: Zapišaćemo sistem jednačina u matričnom obliku sa matricama:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sledi da je $AX = B$, odnosno $X = A^{-1}B$. Inverznu matricu matrice A smo već računali u Zadatku 4.6.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dakle, rešenje sistema je $x = 1, y = 2, z = 1$, odnosno $R_S = \{(1, 2, 1)\}$.

Zadatak 4.12. Matričnim računom rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rrcr} -x & + & y & + & 2z = 2 \\ 2x & + & 3y & - & z = 7 \\ 2x & - & y & + & z = 3 \end{array}$$

Rešenje:

Slično kao u prethodnom zadatku, sistem možemo napisati u matričnom obliku kao $AX = B$ gde su sada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sledi da je $X = A^{-1}B$, pa računamo A^{-1} . Determinanta je $\det(A) = -20$.

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ -8 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Dobijamo rešenje za X :

$$X = \underbrace{\frac{1}{-20} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ -8 & 1 & -5 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{20} \begin{bmatrix} -28 \\ -20 \\ -24 \end{bmatrix},$$

odnosno $x = \frac{7}{5}, y = 1, z = \frac{6}{5}$.

Zadatak 4.13. Matričnim računom rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rrcrcl} 5x & - & 3y & + & 2z & = & -17 \\ -x & & & + & 7z & = & 9 \\ x & + & 3y & & & = & 7 \end{array}$$

Rešenje:

Sistem možemo napisati kao $AX = B$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -17 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rešenje za X dobijamo kao $A^{-1}B$, no pre toga računamo inverznu matricu matrice A . Determinanta matrice je $\det(A) = -132$.

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -21 & 6 & -21 \\ 7 & -2 & -37 \\ -3 & -18 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{132} \begin{bmatrix} -21 & 6 & -21 \\ 7 & -2 & -37 \\ -3 & -18 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -17 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje sistema je $x = -2, y = 3, z = 1$, odnosno $R_S = \{(-2, 3, 1),\}$.

5. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 5.1. Izračunati $2A^2 - 3A^T + 4E$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadatak 5.2. Izračunati A^{-1} , ako postoji:

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad c) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Zadatak 5.3. Rešiti matrične jednačine:

$$a) \quad XA = B, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad AX = B \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad AX - 2X = B + 3E \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$